

『望ましい先物契約のあり方に関する理論的分析』
報告書

原 千秋¹
京都大学経済研究所

June 17, 2005

¹本報告書を作成するにあたり、石井良輔氏には翻訳の労をとって頂いた。記して感謝したい。

1 序論

今日の市場経済を取り巻く不確実性は、気候の変化や地震や津波の発生、新しい油田や鉱脈の発見といった自然現象に起因するものから、規制・法令の変更やクーデターと行った政治的、人為的なものまで、極めて多岐に亘る。商品先物は、これら多種多様な不確実性に由来する商品の価格変動リスクをヘッジ（回避）する方策を与える。リスクヘッジの機会が与えられることで、生産者・流通業者・消費者とも生産・交易・消費に安心して勤しむことができる。先物契約およびその取引の場たる先物取引所の経済的・社会的役割とは、経済社会に内在する多種多様なリスクの分散・軽減し、効率的な資源配分を達成する点にある。

先物契約が新たに導入されるということは、投資家のリスクヘッジ機会は増えることを意味し、それゆえ経済全体としても望ましく、程度の違いはあれ、投資家・生産者・仲介業者・消費者のいずれもが恩恵に浴すると考えられることが多い。しかしながら、先物契約の新規導入が、経済社会に存在する全ての経済主体にとって望ましいとは限らない。なぜなら、リスクヘッジの機会が増えても、新規導入の結果、既存の（すでに取引されている）先物契約の需給バランスが崩れ、その結果既存の先物の価格がかわることにがあるのだが、この価格の変化が、一部の経済主体に損失を与えるかもしれないからである。例えば、新しい先物契約を導入した結果、安全利子率が下がるなら、年金生活者など、直接間接にお金の貸し手となっている人々の利子収入は減ってしまう。また、同様に、もし新規先物の導入で投資家が信用リスクのような個別リスク（idiosyncratic risk）をより効果的にヘッジできるようになると、マクロリスクをより積極的にとるようになり、その結果、株価指数先物をはじめとして、株価は全面高の様相を呈するようになる。これは株や株価指数先物を空売りしていた投資家には損失がもたされることとなる。

無論、これは全ての取引者が損失を被ることを意味するものではない。既存証券の価格の変化が、その取引に関わる（売り手が買い手の）一方の損となることのみを意味するものである。このような、本来は市場構造の変化であったものが需給不均衡を生むことで引き起こされた価格の変化が取引参加者にもたらす影響は、経済学ではしばしば金銭的外部性（pecuniary externalities）と呼ばれる。上述の事情を手短かに言えば、先物契約の新規導入が、一部の投資家に負の金銭的外部性をもたらすかもしれないということである。

以上のように、新規に先物契約を導入がもたらす負の金銭的外部性の可能性を考慮すると、先物契約の導入が全ての経済主体にとって有益であると単純に結論づけるのは誤りであることがわかる。本報告書では、このような金銭的外部性まで分析の射程に含めた最近の研究を展望する。

2 モデル

2.1 基本的枠組み

数学的な表記の負担を軽減するため、本報告書では、商品先物の新規導入を考察しうるもっとも簡明な理論モデルを採用する。すなわち、経済は生産活動を全く伴わず、市場取引を通じたりスクの分散に従事する消費者のみより成るとする。このようなタイプの経済は、経済学では、純粋交換経済（pure exchange economy または endowment economy）と呼ばれるものであるが、本報告書の文脈では、もちろん、「消費者」を「投資家」または「取引者」と読み替えてもらって構わない。

消費は2時点のみで起こると仮定する。金融工学における多くの文献では、消費は連続時点で起こると仮定し、確率微分方程式など高度な数学的技法を駆使して分析を進めるが、この仮定により、難解な数学的問題点を避けて通ることができる。さらに、第2時点で実現しうる全ての状態を網羅した状態空間 (state space) は有限、より具体的には、状態空間は1から S までの整数よりなる集合 $\{1, 2, \dots, S\}$ であると仮定しよう。また第1時点には全く不確実性がないものとする。これらも簡単化の一環である。

さらに、各時点および各状態において、1種類のみの財が消費されると仮定する。無論、現実には各時点および各状態において複数種類の財が取引・消費されるのだが、それら複数種類の財を明示的にモデルの中に盛り込むと、不確実性が直物市場における価格に及ぼす影響をも分析しなければならない。この分析には更なる困難が伴うので、本報告書では、各時点および各状態において、1種類のみの財が消費されると仮定するのである。

経済学においては、分析の便宜上しばしば「状態依存財 (state-contingent commodity)」という財概念が用いられる。日常生活で財や商品と言った場合には、それらは物理的特性によって定義されるのであるが、「状態依存財」と言った場合には、物理的特性のみならず、その財が提供される時点や状態によっても規定される。ここまで列挙した仮定が意味するところは、本報告書の分析対象たる純粋交換経済には、全部で $1 + S$ 種類の状態依存財が存在するというのである。数学的には、添え字 $s \in \{1, 2, \dots, S\}$ で第2時点に状態 s で提供される状態依存財を表す。添え字 $s = 0$ および別個に明記される次元は、第1時点で提供される状態依存財を表すことにする。

経済には H 人の消費者より成ると仮定する。簡単化のため消費者の名前の集合は $\{1, 2, \dots, H\}$ とする。各消費者 $h \in \{1, 2, \dots, H\}$ は、その効用関数 $u_h : R_+ \times R_+^S \rightarrow R$ とリスク・エクスポージャ (risk exposure, 初期賦存ベクトル initial endowment vector と呼ばれる) $(e_{0h}, e_h) \in R \times R^S$ によって特徴付けられる。これは経済学においては標準的な定式化であるが、本報告書の文脈では若干のコメントが必要であろう。まず、効用関数は状態依存財に対する好みを表しているのだが、より具体的には、リスクに対する態度と、異時点間の消費の代替可能性を数学 (数量) 的に表している。また、リスク・エクスポージャとは、消費者が直面している、所得に関する不確実性を表している。通常これは実現する状態に応じて大きく変動すると想定してほしい。この変動を軽減するのが、先物市場の役割に他ならない。また、本稿を通して、各消費者の消費集合が非負象限であり、 u_h は連続・強単調・強準凹であり、 $(e_{0h}, e_h) \in R_{++} \times R_{++}^S$ であると仮定する。

効用関数 u_h におかれたこれらの仮定は、経済学では標準的であるが、無害であるとは言い難い。実際、相対的リスク回避度が1以上で一定のものなど、いくつかの重要な効用関数を排除してしまっているのだが、我々の分析に必要な性質は、富水準が厳密に正のときに純需要が一価・連続であることである。この性質は、リスク・エクスポージャが厳密に正であるとき、 u_h が正象限において強単調・強準凹ならば得られる。

2.2 先物契約・効用最大化問題・証券市場均衡

先物契約は第2時点での価値ベクトル $a \in R^S$ で特徴付けられる。この先物契約の背後には無論原資産があると想定されるが、このベクトルの第 s 成分 a_s は、状態 s における原資産の価格を表していると考えよう。いま、 J 種類の先物 $(a_1, a_2, \dots, a_J)$ が取引可能であるとしよう。第1時点での消費を価値基準財 (ニューメレール) とすると、先物契約の価格をベクトルの形で $q = (q_1, q_2, \dots, q_J) \in R^J$ と書くことができる。本報告書では、このベクトルのことを「先物価格

ベクトル」と呼ぼう。実のところ、この用語法はあまり正確ではない。先物契約 j の価格 q_j は、この契約を 1 単位買うために犠牲にしなければならない第 1 時点での消費量を表しているが、実際の先物市場での「先物価格」とは、(2 時点モデルのように、値洗いを無視すれば、) 原資産と引渡しと交換に支払われる、実現する状態には依存しない価値額である。したがって、この枠組みで本来「先物価格」と呼ばれるべきものは、第 2 時点での確実 (deterministic) な消費を価値基準財とする価格である。しかし、この差異は以後の分析上本質的な違いを何ら生まないので、本報告書では、「先物価格」はすべて第 1 時点での消費を価値基準財とするものである。

消費者 h の効用最大化問題は

$$\begin{aligned} \max_{(w_h, y_h) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^J} \quad & u_h \left(e_{0h} + w_h, e_h + \sum_{j=1}^J y_{jh} a_j \right), \\ \text{subject to} \quad & w_h + q \cdot y_h = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここで y_h は J 種類の先物契約のポートフォリオ、 w_h はこのポートフォリオを第 1 時点で組むにあたって生じた費用または収益に -1 を乗じたものである。各 h について (w_h^*, y_h^*) が上の最大化問題の解であり、 $\sum_{h=1}^H (w_h^*, y_h^*) = (0, 0)$ を満たしているならば、先物価格ベクトル q と 1 期目の消費と証券の配分 $((w_1^*, y_1^*), (w_2^*, y_2^*), \dots, (w_H^*, y_H^*))$ は $(a_1, a_2, \dots, a_J)$ の「先物市場均衡」と言うことにしよう。 u_h が $u_h^{-1}(u_h(0, 0))$ を除いて強準凹であり、リスク・エクスポージャが厳密に正なので、消費と証券の配分は均衡証券価格ベクトルが決まれば唯一に決定される。また、ワルラス法則により $\sum_{h=1}^H y_h^* = 0$ のみから $\sum_{h=1}^H w_h^* = 0$ が従う点にも注意しておこう。

2.3 市場スパンと状態価格ベクトル

効用最大化問題や市場均衡を、先物価格ベクトルやポートフォリオを介して定義するのは直截であるが、いざ数学的な解析となると、やや煩雑になる傾向がある。そこで、この小節では、数学的により取り扱いやすく、文献にも頻繁に登場する、市場スパンと状態価格ベクトルを紹介しよう。

$\mathbf{R}^S$ の部分集合 A に関して、 $\text{lin } A$ を A を含む最小の線型部分空間とする。効用関数が強単調性を満たすことと、リスク・エクスポージャが厳密に正であることにより、各均衡先物価格ベクトル $q \in \mathbf{R}^J$ に対して $p \in \mathbf{R}_{++}^S$ が存在して、 $z = \sum_{j=1}^J y_j a_j$ を満たす全ての $z \in \text{lin } \{a_1, a_2, \dots, a_J\}$ と $y \in \mathbf{R}^J$ に対して $p \cdot z = q \cdot y$ が成り立つことが知られている。先物契約構造と均衡先物価格ベクトルはそれぞれ $\mathbf{R}^S$ の線形部分空間と $\mathbf{R}_{++}^S$ 上のベクトルを一意に定める。これらをそれぞれ「市場スパン (market span)」および「状態価格ベクトル (state price vector)」と呼ぶことにしよう。市場スパンが $\mathbf{R}^S$ に一致するとは、どんなリスクでも、取引されている先物契約を適当に組み合わせればヘッジできることを意味する。この場合、先物市場は完備 (complete) であると言われる。そうでない場合は不完備 (incomplete)。先述した、ポートフォリオ y と第 2 時点の消費 z の対応を用いると、 $G = \text{lin } \{a_1, a_2, \dots, a_J\}$ とすると最大化問題 (1) は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \max_{(w_h, z_h) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^S} \quad & u_h(e_{0h} + w_h, e_h + z_h), \\ \text{subject to} \quad & w_h + p \cdot z_h = 0, \\ & z_h \in G. \end{aligned} \quad (2)$$

より一般に、 G を R^S の任意の線形部分空間としよう。各 h に対して (w_h^*, z_h^*) が上の最大化問題 (2) の解であり、 $\sum_{h=1}^H (w_h^*, z_h^*) = \sum_{h=1}^H (e_{0h}, e_h)$ が成り立つとき、状態価格ベクトル p と 2 期間の消費配分 $((w_1^*, z_1^*), (w_2^*, z_2^*), \dots, (w_H^*, z_H^*))$ を市場スパン G の「均衡」と呼ぶことにする。先物市場均衡と同様に、均衡状態価格ベクトルによって消費配分は唯一に決定され、 $\sum_{h=1}^H z_h^* = 0$ のときには $\sum_{h=1}^H w_h^* = 0$ が成り立つ。

2.4 1 財の仮定について

本報告書では、各状態に財が 1 種類のみ存在するものと仮定している。この仮定は確かに非現実的であるが、金融の分野ではしばしばおかれる仮定である。また、一見した時に思えるほど悪いものではないことを、以下で例示しよう。

各状態 $s \geq 0$ に、 L 種類 ($L \geq 2$) の財が存在するとする。さらに、各 $s \geq 0$ について Y_s は R^L の部分集合とし、経済全体として実現可能な投入・産出量の組み合わせは、 $Y \subset (R^L)^{1+S}$ は、 $Y = Y_0 \times Y_1 \times \dots \times Y_S$ という可分な形をした生産集合で表されているとしよう。これはつまり、ある状態における生産活動が他の状態における生産活動とは無関係に選ぶことができ、なおかつ、第 2 時点での産出のために第 1 時点における初期投資は必要とされない、ということである。さらに状態依存的な生産集合 Y_s はレオンチェフ (Leontief) 型と仮定しよう。¹ L 番目の財は労働とすれば、任意の $\ell < L$ に対して $y_{\ell s} > 0$ となるような任意の $y_s \in Y_s$ において Y_s を支持するベクトルは、整数倍を除いて唯一に定まる。この支持ベクトル (のひとつ) を φ_s で表そう。これは、状態 s における直物市場での、(正数倍を除いて) 唯一の均衡価格ベクトルであることもよく知られている。

「均衡」があるということは、もちろん企業の最適化行動が定義されていることを意味するが、先物市場が不完備である場合、伝統的ミクロ経済学で考えられる意味での「利潤」は定義されないので、一般には企業の目的関数を特定する必要がある。しかし、今のケースではその必要はない。なぜなら、生産集合は状態に関して可分なので、第 1 時点における企業の目的関数が何であろうと、最適な投入産出計画においては、各状態の直物市場において利潤を最大化していなければならないのだが、後者はここではきちんと定義されているからである。また、規模に対する収穫一定下では各直物市場での利潤は 0 なので、本報告書では持ち株構造をモデル化する必要はないことに注意しておこう。

他方、消費者については、 $v_h : (R_+^L)^{1+S} \rightarrow R$ を消費者 h の、 $L(1+S)$ 種類の状態依存財に関する効用関数だとしよう。この関数が時間と状態について可分だとすると、 $\eta = (\eta_{0h}, \eta_{1h}, \dots, \eta_{Sh})$ なる各 $\eta \in (R_+^L)^{1+S}$ に対して

$$v_h(\eta_h) = v_{0h}(\eta_{0h}) + \sum_{s=1}^S v_{sh}(\eta_{sh}),$$

と書くことができる。直物市場での均衡価格ベクトルが φ_s であることから、 $u_{sh} : R_+ \rightarrow R$ を

$$\begin{aligned} & \max_{\eta_{sh} \in R_+^L} && v_h(\eta_{sh}), \\ \text{subject to} &&& \varphi_s \cdot \eta_h \leq x_{sh}. \end{aligned}$$

¹レオンチェフ型生産集合の定義については、ミクロ経済学の標準的な教科書を参照されたい。

という最大化問題のバリュー関数であると定義すれば、効用関数 v_h は

$$u_h(x_{0h}, x_h) = u_{0h}(x_{0h}) + \sum_{s=1}^S u_{sh}(x_{sh}),$$

と書き直すことができる。次に、 $\zeta_h \in (R_+^L)^{1+S}$ を消費者 h の初期賦存ベクトル（リスク・エクスポージャ）であるとし、 $e_{sh} = \varphi_s \cdot \zeta_{sh}$ と定義しよう。すると、 e_{sh} ($s \in \{0, 1, 2, \dots, S\}$ および $h \in \{1, 2, \dots, H\}$) と u_h ($h \in \{1, 2, \dots, H\}$) は本報告書のモデルに合致する経済を成す。さらに、すべての s について $\zeta_{\ell s} > 0$ であるような ℓ が存在するなら、 $e_s > 0$ であり、先においた仮定は満たされる。従って、本報告書のモデルは、複数の証券を含む生産経済モデルと考えることができる。

ここまでの議論から分かるように、1 財の仮定が正当化されるための本質的な条件は、均衡スポット価格ベクトル φ_s が取引可能な証券に依存しないということである。状態可分なレオンチェフ型生産集合を仮定する以外に、例えば、対応する間接的効用関数がゴーマン（Gorman）型であるなどとの仮定をおいても、この条件は満たされる。

3 諸結果の展望

3.1 資産価格形成モデルなど

資産価格形成モデル（Capital Asset Pricing Model、略して CAPM）とは、2.1 節で紹介した純粋交換経済の特殊ケースである。具体的には、状態空間 $\{1, 2, \dots, S\}$ の上にひとつの客観的な確率分布 P が与えられており、任意の消費者の効用関数 u_h が、第 1 時点の消費量および第 2 時点の消費の、 P を使って求められる平均と分散にのみ依存する場合、この理論モデルのことを CAPM と呼ぶのである。効用関数に関するこの仮定は非常に強いもので、現実のデータを用いた実証研究では棄却ことが多い。にもかかわらず CAPM が重宝されるのは、その均衡が明快に特徴付けられるからである。まず、すべての消費者のリスク・エクスポージャの総和を「マーケット・ポートフォリオ（market portfolio）」と呼ぶことにしよう。CAPM の均衡の特徴の第 1 は、「証券市場線（security market line）」と呼ばれる価格付け公式である。これは、先物契約など、任意の金融商品の超過期待収益率（期待収益率から、デフォルト（債務不履行）・リスクのない債券の利回りを引いたもの）は、その金融商品とマーケット・ポートフォリオの収益率の共分散に比例することを主張するものである。第 2 は「投資信託定理（mutual fund theorem）」と呼ばれるもので、これは、均衡における任意の消費者の第 2 時点における消費パターンは、マーケット・ポートフォリオとデフォルト・リスクのない債券の組み合わせとして表されることを主張するものである。

以上 2 つの特徴は有名だが、それらほどは知られていないながら、重要性については決して劣らない特徴もいくつか存在する。まず第 1 は、先物市場が不完備であるケースですら、デフォルト・リスクがない債券とマーケット・ポートフォリオが取引されている限り、証券市場線の主張は成立するという。その第 2 は、いくつかの仮定を追加すれば、既存の先物契約の価格は新しい先物契約の導入によってなんら影響を受けないということである。これらの結果は Oh（1996）及びその中で引用されている先行研究で証明されている。したがって、第 1 節で触れた、金銭的外部性は全く生じることがなく、それゆえ全ての消費者にとって新規先物契約の導入は必ず望ま

しいのである。

Detemple and Selden (1991) では、オプションを導入すると原資産の株式の価格が上昇するような、債券・株式・オプション市場のモデルが提示された。このモデルは CAPM とは若干異なり、オプションの導入が株価に影響を与える可能性を示した。若干特殊な効用関数のケースに集中し、一般的な効用関数に対してパレート改善を達成できる新規先物契約導入の可能性の問題は、この研究の射程外であった点において、CAPM に似ている。

3.2 Hakansson (1982)

本報告書では、新規先物契約の導入は消費者のリスク・エクスポージャになんら影響を与えない場合のみを取り扱うが、Hakansson (1982) は、リスク・エクスポージャを変化させる可能性をも持つ、より一般的な金融革新を許容する枠組みの中で、金融革新の様々なタイプと、それらに付随する厚生の変化の間に成立しうるいくつかの一般的な関係を明らかにした。本報告書同様、彼の問題意識は全ての消費者にとって望ましい金融革新が可能であるか否かを探る点にあった。

各状態に 1 種類の財のみ存在する場合、どのような先物契約を導入したとしても、それに合わせて適切な所得移転を行えば、消費者全員の効用水準を導入前の効用水準より上げるのが可能であることが知られている。Hakansson (1982) は、以下のような、2 つのステージより成る取引を用いることで、そのような所得移転のプロファイルを構成した。まず最初に、消費者は、新規に導入される先物契約の以外先物契約を取引する。その際消費者は、先物の原資産が満期に配達されて消費に回されると想定して、先物契約の最適ポートフォリオを選択する。しかし、先物は実際には清算されないまま留め置かれ、その代わりに、この均衡における先物契約の配分が、先物取引の第 2 ラウンドでのリスク・エクスポージャとして扱われ、さらに、このラウンドでは、新規導入される先物契約もまた取引に供せられる。いずれの消費者にとっても、第 2 ラウンドの先物取引の結果達成される消費は、第 1 ラウンドの取引終了時に得られたであろう消費より好ましく（厳密には、少なくとも同程度には望ましく）なる。これは単に、第 1 ラウンドの取引終了時の配分が、第 2 ラウンドの出発点だからである。そしてこの第 2 ラウンドで達成される均衡先物価格ベクトルではなかった、第 1 ラウンド終了時のポートフォリオの価値額を、移転所得額と定義するのである。

しかし、残念ながら、このような所得移転プロファイルの構成法は、実現可能性に欠ける。もし、上述のシナリオのように、先物取引には第 2 ラウンドがあるなら、消費者は当然この事実を予見し、第 2 ラウンドの最初における先物契約のポートフォリオの価値額を最大にするように、第 1 ラウンドで先物契約を取引するであろう。それゆえ、合理的な予想のもとでは、第 1 ラウンドで取引される先物契約の均衡価格は、第 2 ラウンドにおける均衡価格と等しくなってしまう。また、このとき、もし仮に第 2 ラウンドが取引の場が開かれず、それゆえ第 1 ラウンドに先物契約の原資産が配達され、消費に回されたとしても、その結果得られる消費が、全ての消費者にとって、新規先物契約導入前に達成される消費ほど望ましいとは限らない。それゆえ、全ての消費者にとって、第 2 ラウンド終了時に達成される消費配分が、新規先物契約導入前の均衡消費配分ほど好ましくはなくなる可能性が生じてしまうのである。

また、所得移転プロファイルを構築する際、消費者の効用関数が私的情報であるので、この移転メカニズムの誘引両立性についても考察する必要がある。政策立案者が上記のようなメカニズムを実施しようとしたら、各消費者は政策立案者に、真の効用関数で伝えるインセンティブを

持たない。Hakansson が主唱するタイプの移転を実際に行うメカニズムが果たして存在するのかわかるかは明らかではないが、この問題は研究に値するであろう。複数財とそれに続く取引モデルにおける、第 1 期での匿名の証券再配分によってパレート改善をもたらすことの不可能性についての Kajii (1994) の貢献は参考になる可能性を持っている。

3.3 Allen and Gale (1992)

本報告書およびここで紹介されている研究論文では、先物契約の新規導入に伴う均衡価格や経済厚生の変化について議論されているが、その導入を実際に行う経済主体（例えば先物取引所やその会員）のインセンティブの問題については、あまり議論されていない。ただ、Allen and Gale (1992) は、企業の社債発行の問題の中で、このインセンティブの問題を取り扱った。彼らのモデルでは、社債などを発行することにより市場取引に供せられる証券構造に影響を及ぼし、もってその保有資産の価値を高めるというのが、企業家が社債を発行する動機であった。それゆえ、彼らのモデルでは、新たな社債の導入は必ず金銭的な外部性を伴う。これらの外部性は一部の消費者にとって負である可能性があり、したがって、企業家が導入する社債から、一部の消費者は損失を被る可能性を排除できない。

3.4 Hara (2005)

Hara (2005) は、2.1 節で定義した類の任意の純粋交換経済に対し、以下の 2 つの性質を持つ S 種類の先物契約の列が存在することを示した。第 1 に、 S 種類の先物契約が全て取引される場合、先物市場は完備である。第 2 に、各先物契約 j に対し、単一の価格 q_j が存在し、 S 種類の先物契約のうち最初の J 種類だけが取引されたとき、 J が 1 から S までのどの値をとろうとも、 $(q_1, q_2, \dots, q_J)$ が均衡先物価格ベクトルとなる。言い換えると、 S 種類の先物契約が 1 種類ずつ順番に市場に導入されるとすると、どの先物価格も、それ以降に導入される先物契約の影響を受けずにすみながら、先物市場は完備になるのである。したがって、新規導入の先物契約は既に存在している先物に金銭的な外部効果を与えることはなく、それゆえどの消費者も効用が減少することはない。さらに、リスク・エクスポージャの分布は $H(1+S)$ 次元の空間の 1 点とみなされるが、この空間において極めて小さなある集合にリスク・エクスポージャが属さない限り、先物契約を新たに導入する度に、少なくとも 1 人の消費者の消費が厳密により好ましくなることを示した。また、先物契約の新規導入の担い手である、先物取引所の会員が投票によって導入の可否を決める状況をゲーム論的に考察したが、この点については第 4 で触れることにする。

3.5 Cass and Citanna (1998) および Elul (1995, 1999) など

2.4 で紹介したような、直物市場において複数種類の財が取引されるモデルにおいては、Hart (1975) と Newbery and Stiglitz (1984) が、新規の先物契約を導入した結果、全ての消費者が損失を被る例を提示している。このような複数種類の財のモデルでは、さらに、Cass and Citanna (1998) や Elul (1995) では、既存の先物契約の種類の数と消費者（のタイプ）の数が状態の数よりも十分に少ないならば、既存の先物毛約がどんなタイプであれ、適当な先物契約を新規に導入すれば、全ての消費者の効用が増加、或いは減少することが一般的に可能であることを示した。ここで注意しなければならないのは、ここでの証明法において状態・先物・消費者の数に関する

仮定が重要な役割を果たしていることである。この点については後で詳説しよう。

本報告書で用いられている、1 財モデルの場合、新規の先物契約を導入した結果、全ての消費者が損失を被ることはありえない。これは、1 財モデルでは、新規先物契約の導入の直物市場への影響を考慮する必要がないからである。先物市場の一般均衡論的分析の文献では、この性質は均衡配分の制約つき効率性 (constrained efficiency) と呼ばれている。しかしながら、全ての消費者の効用が高まるかは自明ではない。状態・消費者・既存の先物契約の種類の数に関する、Cass and Citanna (1998) および Elul (1995) と同様の仮定と証明方法を用いれば、既存の先物契約がいかなる種類であれ、一般的に全ての消費者の効用を上げるような新規の先物契約が存在することを Elul (1995) は示した。

3.6 文献の比較

これら状態・消費者・既存の先物契約の種類の数に関する仮定をより具体的に述べると、以下のようになる。2.1 節で定義したように、消費者の人数を H 、状態の数を S 、証券の種類数を J とすると、Elul (1999) は

$$S \geq H + J + 1 \text{ かつ } H \geq \max\{2, J + 1\}$$

と仮定し、Cass and Citanna (1998) は

$$S \geq 2H + J - 1$$

と仮定し、Elul (1995) は

$$S \geq 2H + HJ + H(J + 1)(J + 2)/2$$

と仮定した。容易に見てとれるように、もし J が S に十分近い値をとるならば、これらの不等式はいずれも満たされない。つまり、先物市場が既にほとんど完備である場合には、彼らの結果は、全ての消費者の効用水準を上げるような新規先物契約の存在を保証しないのである。他方、Hara (2005) では、 S 種類の先物契約が 1 種類ずつ順番に導入して、全ての消費者の効用水準を決して下げることなく完備市場に到達する可能性を保証しているので、既存の先物契約の種類の数 J が状態の S に比べて十分に小さくなければならないという仮定は必要ない。しかしながら、Hara (2005) では、既存の先物契約の種類が任意に指定されたときには、全ての消費者の効用水準を引き上げる新規先物契約の存在の可能性は保証されていない。そこでは、先物契約が全く取引されていない状況からスタートして、順次適当な証券を導入していく状況を想定しているので、中間段階の不完備市場で取引されている先物契約も適切に選ばれている必要があるのである。したがって、Hara (2005) の結果と Cass and Citanna (1998) および Elul (1995, 1999) の結果は互いに補完し合うものと解釈すべきであろう。

また、上述の不等式からわかるように、Cass and Citanna (1998) 及び Elul (1995, 1999) の結果では、消費者の数に上限が必要であるが、これはひどく不適切な条件である。まず、当然のことではあるが、もし経済に少数の消費者しかいない場合、分析の出発点であった先物市場は完全競争的であるという仮定は適切ではない。しかしこの問題は、特段に重大ではない。なぜな

ら、有限人の消費者は、それぞれが無限人の消費者によって構成される有限のタイプを表していると解釈しなおすことができるからである。もっと重大な問題とは、「経済モデルが持つべき性質とは？」という、やや概念的な問題に関わるので、以下にこの点をやや詳しく述べよう。

そもそも、経済モデルの中に定式化されている有限種類の消費者とは、数学的な議論を簡単にするために、実際の無限に近い多種多様な消費者の集まりを近似する、いわば仮想的分析対象である。たとえ特定のタイプを持つ消費者が、モデル化された有限種類の消費者の中に1人もいなかったとしても、それに似たタイプの消費者は、少数ながらも実際には存在するとイメージするのが、経済モデルの正しい解釈なのである。したがって、モデル化された経済に関する「良い」定理とは、この有限性に依拠することなく頑健（robust）に成り立つ命題である。逆に、比較的少数の消費者によって経済が構成されているというモデル化に強く依存する方法でのみ証明され得る定理の場合、その経済学的含意がどれほど重大であるかは、明らかではないと言わざるを得ない。

以上の点を明らかにするために、若干の位相的考察を加えてみよう。経済を定義する際、2.1節で行ったように、消費者の名前を効用関数とリスク・エクスポージャに対応付ける方法もあるが、他方、経済を、2.1節で触れられた性質を持つような全ての効用関数とリスク・エクスポージャの集まりの上で定義された分布とみなす方法もある。つまり、消費者の名前や誰がどのような効用関数とリスク・エクスポージャを持つかは経済分析上本質的でなく、経済全体での効用関数とリスク・エクスポージャの分布のみが本質的であるとみなす立場である。この立場をとるとき、比較の対象たる2つの経済が似ているか似ていないかを判定するためには、効用関数とリスク・エクスポージャの集合で定義された全ての確率測度の集合の上に適当な位相を導入せねばならないが、これには良く知られたものが2種類ある。1つは確率測度の弱収束と平均リスク・エクスポージャの収束のみを要請するもの。もう1つはそれらに加えて、確率測度の台の閉収束位相に関する収束を要請するものである。これらはそれぞれ α 位相および β 位相と呼ばれ、無論前者は後者より粗い。つまり、 β 位相に関する近似は、 α 位相に関する近似となっているが、逆は必ずしも真ではないのである。それゆえ、少数の消費者でモデル化された経済が近似しうる、多種多様な消費者より成る「本当の」経済は、 α 位相に関する方が多岐に亘ることになる。これらの位相についてのより詳しい説明については、Dierker (1982) を参照されたい。

2つ前の段落で、少数の消費者でモデル化された経済が、多種多様な消費者より成る「本当の」経済を近似すると説明したとき、念頭におかれていたのは α 位相である。他方、Cass and Citanna (1998, Section 4) は、彼らの定理の仮定を正当化する際に β 位相を用いている。もし、Cass and Citanna (1998) で分析される、比較的少数の消費者モデル化された経済が、多種多様な消費者より成る本当の経済を β 位相に関して近似しているなら、近似の精度を（ β 位相に関して）高めても、定理が依然として成立すると予想される。²しかしながら、もし、彼らがモデル化した経済が、本当の経済を α 位相に関してのみ近似していたとすると、近似の精度を（ α 位相に関して）高めたとき、定理が依然として成立するかどうかは明らかでない。むしろ、彼らの証明法によれば、成立しないことが強く予想される。³ α 位相より β 位相の方が経済学的に重要だとする明らかな理由がない以上、彼らの結果の経済学的含意を重大さを正しく査定するのは困難である。

他方、Hara (2005) の証明は総純需要関数についての不動点に似た議論に依っているので、無

²このくだりの信憑性については、彼らの証明法に目を通せば確認できる。ここで彼らの証明を子細に紹介する余裕はないので、読者の皆さんの寛容を請う次第である。

³前脚注に同じ。

限種類の消費者がいる経済にも簡単に拡張することができる。この点は、Hara (2005) のアプローチが優れる点として、強調しておくに値するだろう。

最後に、Cass and Citanna (1998) および Elul (1995, 1999) の証明法について、厚生の変化の観点からコメントしておこう。彼らは、最初に、上に示した不等式の条件の下、「取引されないが、余計ではない」先物契約の存在を示した。「取引されないが、余計ではない」先物契約とは、リスクヘッジの機会を高めつつも、ある適当な価格の下では、どの消費者もそれを全く売買しないような先物契約のことである。次に、そういった先物契約の利得構造を適当な方向に少しだけ変更すれば、この先物は実際に何人かの消費者によって取引され、なおかつ (Cass and Citanna (1998) および Elul (1995) では) 均衡効用水準が任意の方向に変化すること、または (Elul (1998) では) 既存の先物の価格が影響を受けないようにすることができることを示した。このステップは陰関数定理の応用であり、したがって、結果として起こる効用の変分は微小の可能性がある。それゆえ、文献で存在が証明された効用水準の変化は非常に小さく、こういった変化を引き起こした先物契約は現実との関連性が非常に薄いのではないかと、という疑念を払拭するすべはない。

4 結論

本報告書では、新規に導入される先物契約が、社会厚生上いかなる変化を引き起こすかを考察した。特に、新規導入が既存の先物の価格に及ぼす影響に関する、比較的最近の理論的研究を展望した。CAPM など、いくつかの特殊ケースでは、これら金銭的外部性の有無についてはっきりとした結果が得られたが、一般的なケースでは、社会厚生の変化の向き (増減) は一概に定めることができず、いくつかの仮定の下で、経済にいる消費者全員の効用水準が上るための十分条件が得られた。本報告書では、それら十分条件をごく簡明に紹介した。

これらの条件は十分条件なので、むしろ、それらが満たされない場合でも、消費者全員の効用水準を上げるような新規の先物契約が存在する場合もある。そのような先物の存在条件ばかりでなく、存在するものと仮定した上で特徴づけの問題に取り組むのは、今後の研究の有益なる進展の方向であろう。また、これまでの研究では、新規の先物契約が導入される前と後の均衡配分を比較するという、いわゆる比較静学 (comparative statics) の手法に則って分析が進められたが、実際の時間的な経過の中で新しいタイプの先物契約が導入されるとき、動学経路の分析も、現実への応用を考えると重要であろう。最後に、先物契約を導入する経済主体 (先物取引所の会員) の集合体が、新たに提案される先物契約の取引開始の可否を問う投票の行動に関するゲーム論的分析は、Hara (2005) によって始められたばかりであるが、その解の存在や特徴づけの問題は、ナッシュ均衡にのみ与えられ、部分ゲーム完全均衡の場合には、未だ解決をみていない。この問題も今後取り組まれるべき問題であろう。

References

- [1] F. Allen and D. Gale, Arbitrage, short sales, and financial innovation, *Econometrica* **59** (1991), 1041–1068.
- [2] D. Cass and A. Citanna, Pareto-improving financial innovation in incomplete markets, *Economic Theory* **11** (1998), 467–494.

- [3] J. Detemple and L. Selden, A general equilibrium analysis of option and stock market interactions, *International Economic Review* **32** (1991), 279–303.
- [4] E. Dierker, Regular economies, in: *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 2, edited by K. J. Arrow and M. D. Intriligator, North-Holland, Amsterdam (1982).
- [5] R. Elul, Welfare effects of financial innovation in incomplete markets with several goods, *Journal of Economic Theory* **65** (1995), 43–78.
- [6] R. Elul, Welfare-improving financial innovation with a single good, *Economic Theory* **13** (1999), 25–40.
- [7] N. H. Hakansson, Changes in the financial market: Welfare and price effects and the basic theorems of value conservation, *Journal of Finance* **37** (1982), 977–1004.
- [8] C. Hara, Pareto improvement and agenda control of sequential financial innovations, manuscript (2005), Institute of Economic Research, Kyoto University.
- [9] O. Hart, On the optimality of equilibrium when the market structure is incomplete, *Journal of Economic Theory* **11** (1975), 418–443.
- [10] A. Kajii, Anonymity and optimality of competitive equilibria when markets are incomplete, *Journal of Economic Theory* **64** (1994), 115–129,
- [11] D. Newbery and J. Stiglitz, Pareto inferior trade, *Review of Economic Studies* **101** (1984), 1–12.
- [12] G. Oh, Some results in the CAPM with non-traded endowments, *Management Science* **42** (1996), 286–293.