不完備市場の一般均衡モデル

平成 25 年 2 月 21 日

目 次

記法

- $\boldsymbol{R}$：全ての実数よりなる集合，$(-\infty, \infty)$
- $\boldsymbol{R}_+$：全ての非負の実数よりなる集合，$[0, \infty)$
- $\boldsymbol{R}_{++}$：全ての正の実数よりなる集合，$(0, \infty)$
- $\boldsymbol{R}^n$：n 次元の実数ベクトル空間
- $\boldsymbol{R}^n_+, \boldsymbol{R}^n_{++}$： $x = (x_1, \cdots, x_n)^\top$ が $x \in \boldsymbol{R}^n_+$ ならば，全ての i について $x_i \geq 0$ であり，$x \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ ならば，全ての i について $x_i > 0$
- $\boldsymbol{N}$：全ての正の整数よりなる集合

集合 A, B について

- $A \subseteq B$：$x \in A$ ならば $x \in B$
- $A \cup B$：$x \in A \cup B$ ならば $x \in A$ または $x \in B$
- $A \cap B$：$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ かつ $x \in B$
- $A \setminus B$：$x \in A \setminus B$ ならば $x \in A$ かつ $x \notin B$
- A^c：$x \in A^c$ ならば $x \notin A$
- $\varnothing$：空集合
- $A \times B$：$(x, y) \in A \times B$ ならば $x \in A$ かつ $y \in B$

$A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ について[1]

- $A^\top$：行列 A の転置
- $\operatorname{rank} A$：行列 A の階数
- $\det A$：行列 A の行列式
- $\operatorname{Col} A$：行列 A の列空間，つまり $\operatorname{Col} A = \{Ax \mid x \in \boldsymbol{R}^n\}$．$A$ が写す像のことで他の文献では $\mathrm{Im}, \mathrm{Ran}, \mathrm{Range}$ 等で記されることもある．
- $\ker A$：行列 A の零化空間ないしは核空間，つまり $\ker A = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid 0 = Ax\}$．一般の関数 $f(x)$ については $\ker f = \{x \mid 0 = f(x)\}$ として定義する．他の文献では null 等で記されることもある．

$x = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \boldsymbol{R}^n, y = (y_1, \cdots, y_n)^\top \in \boldsymbol{R}^n$ について

- $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$：内積 (inner product)
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$：ユークリッドノルム (Euclid norm)

[1]有限次元の m 行 n 列実数行列 A は $\boldsymbol{R}^{m \times n}$ に含まれると書く．

特に指定しない限り実数空間やその部分集合では上で定義した内積やノルムを用いる．また一般のベクトル空間について $\cdot, \|\cdot\|$ は特に指定しない限りにおいてはその空間に定められた適当な内積とノルムであるとする．さらにベクトルに関わる演算で 0 と書いた場合には特に指定しない限りにおいてはベクトル空間のゼロ元 (加法単位元) と解釈する．

ベクトル空間 X について

- $\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$: $e_1, \cdots, e_n \in X$ の張る空間,
  つまり $\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \;\middle|\; \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^\top \in \boldsymbol{R}^n \right\}$
- $\dim X$: X の次元

内積空間 X 上の線形部分空間 Z について

- $Z^\perp$: Z の直交補空間，つまり $Z^\perp = \{x \in X \mid$ 全ての $z \in Z$ について $x \cdot z = 0\}$

第 1 章　分析の枠組と均衡概念

この章ではこのノートにおいて共通するモデルの設定，分析の枠組みと均衡概念を説明する．

1.1　モデル

このノートにおいては以下のような純粋交換経済を基本として考える．

- 時点
  時点 0,1 の 2 期間モデルとし，時点 0 では不確実性が存在しないが，時点 1 では不確実性が存在する．
- 状態
  時点 1 において正の整数 S 個の不確実性を表現する状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ のうちの一つが生起すると考える．よって状態は離散的で有限個である．便宜的に時点 0 を状態 $s = 0$ と表すこととする．
- 財
  正の整数 N 種類の物理的，空間的に区別される財が存在する．時点 1 ではこれらの財が状態依存財 (state contingent commodity) として取引されるために，この経済モデルにおいては $N(1+S)$ 個の区別される財が存在することとなる．これらの財は直物市場 (spot market) で取引される．
- 財価格
  時点 0 での財価格ベクトルを $p^0 \in \boldsymbol{R}^N$，時点 1 の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ における財価格ベクトルを $p^s \in \boldsymbol{R}^N$ とする．また全ての時点，状態における財価格ベクトルをまとめて $p := (p^0, p^1, \cdots, p^S) \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ と表す．
- 消費者
  市場には正の整数 I 人の消費者が存在する．消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ は以下のように特徴づけられる．
  1. 消費集合：消費者 i の消費集合を $X_i \subseteq \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ とする．
  2. 効用関数：消費者 i は効用関数 $U_i : X_i \to \boldsymbol{R}$ を持つ．U_i には消費者 i のリスクに対する態度，時間割引率，確率的信念などが反映される．
  3. 初期保有量：消費者 i は状態 $s \in \{0, 1, \cdots, S\}$ で初期保有量 $e_i^s \in \boldsymbol{R}^N$ を持つ．全ての状態について初期保有量をまとめて $e_i := (e_i^0, e_i^1, \cdots, e_i^S) \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ と表す．
- 証券 (asset)
  時点 0 において市場では正の整数 J 種類の証券が取引されるとする．証券とは時点 1 において購買力を支払うことを約束する契約，証書と見なされる．証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ の時点 0 での 1 単位当たり取引価格は $q_j \in \boldsymbol{R}$ で表され，全ての証券の取引価格をまとめて $q := (q_1, \cdots, q_J)^\top \in \boldsymbol{R}^J$ と表す．1 単位の証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ が時点 1 で支払う購買力，

つまりペイオフは財価格の関数であることを明示的に示すために，関数 $r_j^s : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$ を用いて $r_j(p) := (r_j^1(p^1), \cdots, r_j^S(p^S))^\top \in \boldsymbol{R}^S$ と表す．

上記の設定の下で消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ の効用最大化問題は以下のように記述される．

$$
\begin{aligned}
\max_{(x_i, y_i) \in X_i \times \boldsymbol{R}^J} \quad & U_i(x_i) \\
\text{subject to} \quad & p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i \leq p_i^0 \cdot e_i^0 \\
& \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } p^s \cdot x_i^s \leq p_i^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s)
\end{aligned}
$$

$x_i = (x_i^0, x_i^1 \cdots, x_i^S) \in X_i, x_i^s = (x_{i1}^s, \cdots, x_{iN}^s)^\top \in \boldsymbol{R}^N$ は財の消費ベクトルで，$y_i = (y_{i1}, \cdots, y_{iJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ は証券の保有量を表すポートフォリオ (portfolio) ベクトルである．任意の i, j について y_{ij} は負値を取ることも許容される．つまり証券の空売り (short-sell) も可能である．

時点 1 において実現する状態はただ一つなので，$(p^1, \cdots, p^S)$ は予想 (期待) 価格であり，この問題は時点 0 の消費者の消費計画を決定する問題と解釈できる．通常の効用最大化問題と異なり $1 + S$ 本の予算制約式が存在する．

以下では具体的な証券ペイオフ，効用関数の例を挙げる．

1.1.1 例 (証券のペイオフ)

1. **実物資産 (real asset)**
   証券 j が実物資産であるとは証券 j のペイオフが以下のように表される時を言う．全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ についてある財ベクトル $a_j^s \in \boldsymbol{R}^N$ が存在し，任意の価格ベクトル $p^s \in \boldsymbol{R}^N$ について
   $$r_j^s(p^s) = p^s \cdot a_j^s$$
   となる．つまり時点 1 において状態 s が生起した時に a_j^s だけの財を得られる証券となる．この時，$r_j^s(p^s)$ は p^s について 1 次同次な関数となる．

2. **名目資産 (nominal asset)**
   証券 j が名目資産であるとは証券 j のペイオフが以下のように表される時を言う．全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ についてあるスカラー量 $a_j^s \in \boldsymbol{R}$ が存在し，任意の価格ベクトル $p^s \in \boldsymbol{R}^N$ について
   $$r_j^s(p^s) = a_j^s$$
   となる．つまり時点 1 において状態 s が生起した時に，p^s の値に関わらず a_j^s だけの購買力を得られる証券となる．

3. **オプション (option)**
   証券 j が行使価格 (strike price) k のコールオプション (call option) であるとは証券 j のペイオフが以下のように表される時を言う．あるスカラー量 $k \in \boldsymbol{R}$ と全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ についてある財ベクトル $a_j^s \in \boldsymbol{R}^N$ が存在し，任意の価格ベクトル $p^s \in \boldsymbol{R}^N$ について
   $$r_j^s(p^s) = \max\{p^s \cdot a_j^s - k, 0\}$$
   となる．つまり時点 1 において状態 s が生起した時に，あらかじめ時点 0 で決められた行使価格 k だけの購買力を証券の保有者が支払うことで，a_j^s だけの財 (原資産 (underlying asset) と呼ぶ) を購入することができる権利である．権利なので $k > p^s \cdot a_j^s$ ならば権利を

行使せずその証券からのペイオフは0である．プットオプション (put option) は逆に売却する権利である．証券 j が行使価格 k のプットオプションならばペイオフは以下のように表される．

$$r_j^s(p^s) = \max\{k - p^s \cdot a_j^s, 0\}$$

名目資産を原資産とするオプションも考えることができ，ある名目資産 j の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ におけるペイオフが $a_j^s \in \boldsymbol{R}$ で表される時，この名目資産 j についての行使価格 k のコールオプションの状態 s でのペイオフは $\max\{a_j^s - k, 0\}$ であり，プットオプションならば $\max\{k - a_j^s, 0\}$ である．

ここでコールオプションとプットオプションのペイオフの関係について見てみよう．行使価格が k であり，時点1の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ において得られる財ベクトルが a_j^s であるコールオプションを1単位買い，全ての状態においてペイオフが1の名目資産を k 単位だけ買うとする．このような名目資産はすべての状態において同じペイオフを支払うので，リスクが無い資産である．つまり銀行預金や国債などの安全資産 (risk-free asset) と呼ばれる資産に対応する．このポートフォリオの時点1の状態 s におけるペイオフは

$$\max\{p^s \cdot a_j^s - k, 0\} + k = \max\{p^s \cdot a_j^s, k\}$$

である．次に行使価格が k であり，時点1の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ において支払う財ベクトルが a_j^s であるプットオプションを1単位買い，状態 s におけるペイオフが $p^s \cdot a_j^s$ である実物資産を1単位買うとする．このポートフォリオの時点1の状態 s におけるペイオフは

$$\max\{k - p^s \cdot a_j^s, 0\} + p^s \cdot a_j^s = \max\{k, p^s \cdot a_j^s\}$$

である．

このように上記2つのポートフォリオが実現するペイオフは任意の状態で等しくなる．名目資産に対するオプションに対してもこの関係は当然成り立つ．第2章で述べる標準的な仮定の下での裁定取引の非存在により導かれる無裁定価格の原理を用いれば

$$\begin{aligned} & \text{行使価格 } k \text{ のコールオプションの単位価格} + k \times \text{安全資産の単位価格 (国債の単位価格等)} \\ = \ & \text{行使価格 } k \text{ のプットオプションの単位価格} + \text{原資産の単位価格 (株価等)} \end{aligned}$$

が成立する．この関係をプット・コール・パリティ (put-call parity) と呼ぶ．

4. **社債 (corporate bond)**
時点1の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ におけるある企業の生産物が財ベクトル $a_j^s \in \boldsymbol{R}^N$ で表せるとする．ただし a_j^s の負の成分は投入物を表すとする．この時，この企業の時点1の状態 s での企業価値は $p^s \cdot a_j^s$ で表される．このような企業が発行する額面 (face value) $k \in \boldsymbol{R}$ の社債とは，企業に支払い能力がある場合は k，ない場合は残りの企業価値だけの購買力を受け取ることができる証券である．つまりこの社債の状態 s におけるペイオフは以下のように表すことができる．

$$r_j^s(p^s) = \min\{k, p^s \cdot a_j^s\}$$

ある企業が額面 k の社債を1枚だけ発行しており，その企業の時点1の状態 s での生産物を $a_j^s \in \boldsymbol{R}^N$ とする．この社債の保有者の時点1の状態 s で得られる利益は $\min\{k, p^s \cdot a_j^s\}$ である．またこの企業の株主は有限責任 (limited liability) の原則から時点1の状態 s において $\max\{0, p^s \cdot a_j^s - k\}$ だけの利益を得られる．株主と社債保有者の利益の和を取ると $\min\{k, p^s \cdot a_j^s\} + \max\{0, p^s \cdot a_j^s - k\} = p^s \cdot a_j^s$ と確かに企業価値と一致する．

ここで上記の設定の下での株主と債権保有者の利益相反 (conflict of interest) について考えてみよう．$S=2$ として企業は以下の費用 0 で執行できる 2 つのプロジェクトの意思決定問題に直面していると考える．

(a) プロジェクト A　状態 1 では企業価値が k_A^L，状態 2 では企業価値が k_A^H となる．
(b) プロジェクト B　状態 1 では企業価値が k_B^L，状態 2 では企業価値が k_B^H となる．

ここで $k, k_A^L, k_A^H, k_B^L, k_B^H$ の大小関係は $k_B^L < k_A^L < k < k_A^H < k_B^H$ とする．つまりプロジェクト A はリターンのリスクが小さく，プロジェクト B はリターンのリスクが大きいプロジェクトである．

社債保有者にはプロジェクト A の方が好ましい．なぜならばプロジェクト A を執行した場合の社債保有者の得る利益は状態 1 ならば k_A^L，状態 2 ならば k となり，プロジェクト B を執行した場合は状態 1 ならば k_B^L，状態 2 ならば k となるため，いい結果 (状態 2) が起こったならば社債保有者の得る利益はどちらのプロジェクトでも k なのに対し，悪い結果 (状態 1) が起こったならば社債保有者の得る利益はプロジェクト B を執行するとプロジェクト A を執行した場合に比べ $k_B^L < k_A^L$ と厳密に低くなる．よって社債保有者はプロジェクト A をより好ましいと考える．

逆に株主にとってはプロジェクト B の方が好ましい．なぜならばプロジェクト A を執行した場合の株主の得る利益は状態 1 ならば 0，状態 2 ならば $k_A^H - k$ となり，プロジェクト B を執行した場合は状態 1 ならば 0，状態 2 ならば $k_B^H - k$ となるため，悪い結果 (状態 1) が起こったならば株主の得る利益はどちらのプロジェクトでも 0 なのに対し，いい結果 (状態 2) が起こったならば株主の得る利益はプロジェクト A を執行するとプロジェクト B を執行した場合に比べ $k_A^H - k < k_B^H - k$ と厳密に低くなる．よって株主はプロジェクト B をより好ましいと考える．

このように社債保有者と株主とではどちらのプロジェクトが好ましいかは異なり利益相反が起こっている．

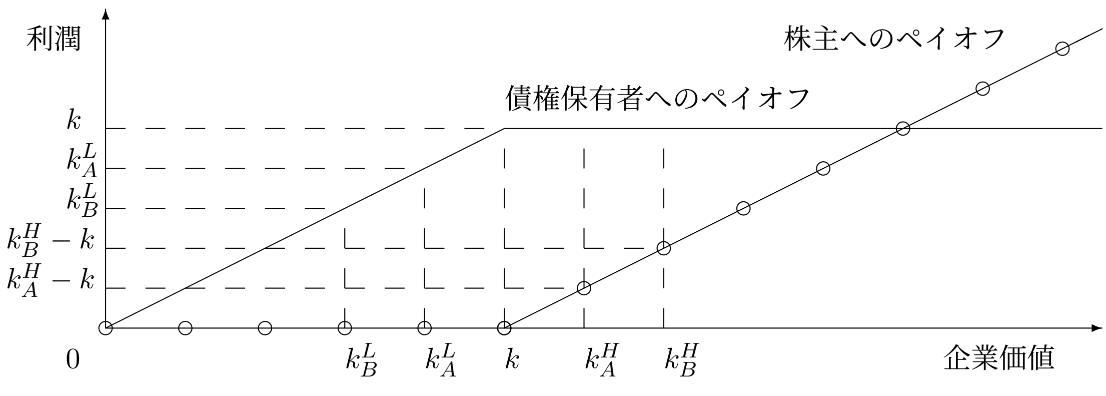

図 1.1.1: 社債保有者と株主の得る利益の比較：利益相反の例

図 1.1.1 は社債保有者と株主の得る利益を図示化したものである．図 1.1.1 を見れば利益相反が起こっていることが明確にわかる．実際には企業は株主の保有物であるので株主の意思が優先される．このような時に社債保有者の観点からすると，より多くのプレミアムがない限り社債を保有することはデメリットになる．つまり社債のスプレッドが拡大する傾向が起きる．このような社債スプレッドが拡大する傾向は現実世界でもよく観測される．

1.1.2 例 (効用関数の例)

1. **期待効用関数 (expected utility function)**
以下のような効用関数を期待効用関数と呼ぶ.

$$U_i(x_i) = u_i^0(x_i^0) + \delta_i \sum_{s=1}^{S} \pi_i^s u_i(x_i^s)$$

ここで $u_i^0 : (\boldsymbol{R}^N \text{の部分集合}) \to \boldsymbol{R}, u_i : (\boldsymbol{R}^N \text{の部分集合}) \to \boldsymbol{R}$ である．また δ_i は主観的効用割引因子であり将来時点の効用を割り引いて評価する．$\pi_i = (\pi_i^1, \cdots, \pi_i^S)$ は主観的確率であり，消費者 i が予想する時点 1 で状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ が生起する確率となる．よって全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $\pi_i^s > 0, \sum_{s=1}^{S} \pi_i^s = 1$ を満たす．最もスタンダードな定式化だが，マクロ経済学や実験経済学の実証結果と整合的ではないことも知られている．

2. **状態依存型期待効用 (state-dependent expected utility)**
以下のように効用関数が状態依存性を持つ場合，状態依存型期待効用となる．

$$U_i(x_i) = u_i^0(x_i^0) + \delta_i \sum_{s=1}^{S} \pi_i^s u_i^s(x_i^s)$$

$u_i^s(\cdot)$ は異なる s で違う関数形を持つ．状態依存型期待効用は通常の期待効用関数に比べ表現できる選好関係の幅が広くなるが，依然として効用関数の異時点間，異なる状態間での加法分離性 (additive separability) は保持される．

3. **習慣形成 (habit formation)**
株式市場には「株式プレミアムパズル」(equity premium puzzle)[1]と呼ばれる現象が存在する．これは加法分離的な相対的危険回避度一定 (Constant Relative Risk Aversion : CRRA) 型の期待効用関数を想定した時，現実で観測される株式のリスクプレミアム (株式の期待リターンと無リスクな金利の差) を今述べたようなモデルの上で説明するためには，リスク態度に対するパラメータを非現実的な値としなければならない (消費者のリスク態度が通常考えられる程度からリスク回避的な方向へ大きく逸脱する) という現象である．つまり，実際に観測される株式のリスクプレミアムは標準的な理論の上で妥当な株式のリスクプレミアムに比べて高くなりすぎている，ということである．この現象を説明するために用いられるのが習慣形成である．具体的には以下のように定義される．

$$U_i(x_i) = \sum_{s=1}^{S} u_i(x_i^0, x_i^s)$$

ここで $u_i : (\boldsymbol{R}^N \times \boldsymbol{R}^N \text{の部分集合}) \to \boldsymbol{R}$ である．このように定式化すると u_i が時点 0 での消費 x_i^0 の影響を受けるようになる．

4. **ナイト流不確実性 (Knightian uncertainty)**
近年，応用が進んでいる概念の一つとしてナイト流不確実性が知られている．(主観的) 確率を付与せずに不確実性を捉えようとする試みで，一例として次のような定式化がされる．

$$U_i(x_i) = u_i(x_i^0) + \delta_i \min_{s \in \{1, \cdots, S\}} u_i(x_i^s)$$

この場合の効用最大化とは最も悪い状態での効用水準をできるだけ高くすることである．

[1] Mehra and Prescott[1985] でその存在が提起される．

5. **帰納的効用 (recursive utility)**
株式プレミアムパズルを別の側面から捉えた「リスクフリーレートパズル」(risk-free rate puzzle) を解決するためによく用いられるのが帰納的効用関数である．具体的には以下のように定式化される．$N=1$ として関数 $u_i : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}, v_i : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ を考える．u_i, v_i は厳密に単調増加かつ連続であるとする．よって逆関数 u_i^{-1}, v_i^{-1} が存在する．この時，効用関数を以下のように置く．

$$U_i(x_i) = u_i(x_i^0) + \delta_i u_i \left(v_i^{-1} \left(\sum_{s=1}^{S} \pi_i^s v_i(x_i^s) \right) \right)$$

ここで $v_i^{-1}\left(\sum_{s=1}^{S} \pi_i^s v_i(x_i^s)\right)$ は財ベクトル $(x_i^1, \cdots, x_i^S)$ の確実性等価 (certainty equivalent) である[2].

帰納的効用関数では u_i が異時点間，v_i が状態間での配分の望ましさを決定することになり，効用関数の柔軟性が向上する．具体的に $\overline{x}_i = x_i^1 = \cdots = x_i^S$ とすると

$$U(x_i) = u_i(x_i^0) + \delta_i u_i(\overline{x}_i)$$

である．つまり異時点間限界代替率 (Intertemporal Marginal Rate of Substitution : IMRS) は u_i によって決定され，v_i は将来の不確実性に対するリスク態度を決定する．$u_i = v_i$ ならば U_i は期待効用関数である．

1.2　均衡概念

1.2.1 定義 (証券市場均衡 (Asset Market Equilibrium)) 直物市場における財の取引価格ベクトル $p = (p^0, p^1, \cdots, p^S) \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ と証券価格ベクトル $q = (q_1, \cdots, q_J) \in \boldsymbol{R}^J$，そして状態依存財とポートフォリオ配分 $((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)) \in (\boldsymbol{R}^{N(1+S)} \times \boldsymbol{R}^J)^I$ が**証券市場均衡** (以下 AME) であるとは以下の 2 条件を満たす時を言う．

1. 効用最大化
全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について (x_i^*, y_i^*) は以下の最大化問題の解である．

$$\begin{aligned} \max_{(x_i, y_i) \in X_i \times \boldsymbol{R}^J} \quad & U_i(x_i) \\ \text{subject to} \quad & p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i \leq p_i^0 \cdot e_i^0 \\ & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } p^s \cdot x_i^s \leq p_i^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \end{aligned}$$

2. 需給均衡条件
$((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*))$ は以下を満たす．

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} e_i, \quad \sum_{i=1}^{I} y_i^* = 0$$

[2] このような効用関数は Kreps–Porteus 型効用関数と呼ばれるが，このノートでは 2 期間モデルを考えているので Selden[1978] の表現に近い．

時点 1 において実現する状態は 1 つだけなので価格 $p^1, \cdots, p^S$ は全ての消費者に共通の予想と解釈される．また時点 1 における取引は時点 0 における予想であるが，需給均衡条件を満たすことからどの状態が実現したとしても実行可能である．この直物市場の価格の性質を自己実現的 (self-fullfilling) な価格予想と呼ぶ．

通常の純粋交換経済の均衡モデルにおいては，ワルラス法則と均衡価格の同次性が得られる．AME においてもワルラス法則が成立することは以下の命題によって示される．

1.2.2 命題 全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について U_i が強単調[3]である時，以下が成立する．

1. 効用最大化解において全ての予算制約は等号で成立する．
2. (p, q) が AME の均衡価格ならば，全ての $s \in \{0, 1, \cdots, S\}$ について $p^s \in \boldsymbol{R}^N_{++}$ である[4]．
3. $(p, q, ((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)))$ が AME である時，全ての $n \in \{1, \cdots, N\}$ について以下が成立する．

$$\sum_{i=1}^{I} x_{in}^{*0} - \sum_{i=1}^{I} e_{in}^0 = \frac{1}{p_n^0}\left(-\sum_{m \neq n} p_m^0 \left(\sum_{i=1}^{I} x_{im}^{*0} - \sum_{i=1}^{I} e_{im}^0\right) - \sum_{j=1}^{J} q_j \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^*\right)$$

全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{i=1}^{I} x_{in}^{*s} - \sum_{i=1}^{I} e_{in}^s = \frac{1}{p_n^s}\left(-\sum_{m \neq n} p_m^s \left(\sum_{i=1}^{I} x_{im}^{*s} - \sum_{i=1}^{I} e_{im}^s\right) + \sum_{j=1}^{J} r_j^s(p^s) \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^*\right)$$

命題 1.2.2 の証明 1. $((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*))$ を効用最大化解とする．ここである $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $p^0 \cdot x_i^{*0} + q \cdot y_i^* < p^0 \cdot e_i^0$ であると仮定する．この時，$\alpha = p^0 \cdot (e_i^0 - x_i^{*0}) - q \cdot y_i^* > 0$ である．よってある $n \in \{1, \cdots, N\}$ について

$$\widehat{x}_{in}^0 := \begin{cases} x_{in}^{*0} + \alpha / |p_n^0|, & \text{if } p_n^0 \neq 0 \\ x_{in}^{*0} + \alpha, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし，新たな財配分 $\widehat{x}_i^0 = (x_{i1}^{*0}, \cdots, x_{i,n-1}^{*0}, \widehat{x}_{in}^0, x_{i,n+1}^{*0}, \cdots, x_{iN}^{*0})$，$\widehat{x}_i = (\widehat{x}_i^0, x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})$ を考えれば，$\widehat{x}_i$ は予算制約を満たす．また効用関数の強単調性から $U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i^*)$ となり，x_i^* が効用最大化解であることと矛盾．よって全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $p^0 \cdot x_i^{*0} + q \cdot y_i = p^0 \cdot e_i^0$ である．またある $i \in \{1, \cdots, I\}$ とある $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $p^s \cdot x_i^{*s} < p_i^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* r_j^s(p^s)$ ならば $\alpha = \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* r_j^s(p^s) + p^s \cdot (e_i^s - x_i^{*s}) > 0$ となるために，先ほどと同様の方法で消費者 i の効用を改善をさせるような財配分を構築できるために矛盾．以上より効用最大化解において予算制約は全て等号で成立する．

2. $(p, q, ((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)))$ を AME とする．この時，AME の定義より $((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*))$ は予算制約式を満たす．よって $p^0 \cdot x_i^{*0} + q \cdot y_i^* \leq p^0 \cdot e_i^0$ と全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $p^s \cdot x_i^{*s} \leq p_i^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* r_j^s(p^s)$ が成立する．ここである $n \in \{1, \cdots, N\}$ について $p_n^0 \leq 0$ とすると，全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ と任意の正の実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}_{++}$ について新たな財配分 $\widehat{x}_i^0 = (x_{i1}^{*0}, \cdots, x_{i,n-1}^{*0}, x_{in}^{*0} + \alpha, x_{i,n+1}^{*0}, \cdots, x_{iN}^{*0})$，$\widehat{x}_i = (\widehat{x}_i^0, x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})$ を考えれば，$\widehat{x}_i$ は予算制約を満たす．また効用関数の強単調性から $U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i^*)$ となり，x_i^* が効用最大化解で

[3] $x \in X_i, a \in \boldsymbol{R}_+^{N(1+S)} \setminus \{0\}, x + a \in X_i$ ならば $U_i(x) < U_i(x + a)$ を満たすことを言う．

[4] (p, q) が均衡価格であるという条件を (p, q) の下での効用最大化解が存在するという条件に弱めても成立する．また効用関数の強単調性は，少なくとも 1 人の消費者について保証されていれば成立する．

あることと矛盾．よって $p^0 \in \boldsymbol{R}^N_{++}$ である．任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ の場合についても，ある $n \in \{1, \cdots, N\}$ について $p^s_n \le 0$ ならば同様の方法で任意の消費者 i の効用を改善させるような財配分を構築できるために矛盾．よって全ての $s \in \{0, 1, \cdots, S\}$ について $p^s \in \boldsymbol{R}^N_{++}$ である．

3. 1. より全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について以下が成立する．

$$p^0 \cdot x_i^0 + \sum_{i=1}^{J} q_j y_{ij} = p_i^0 \cdot e_i^0, \quad \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } p^s \cdot x_i^s = p_i^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s)$$

全ての $i = 1, \cdots, I$ にわたって上の等式を足しあげると

$$p^0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^0 - \sum_{i=1}^{I} e_i^0 \right) = -\sum_{i=1}^{I} \sum_{i=1}^{J} q_j y_{ij} = -\sum_{i=1}^{J} q_j \sum_{i=1}^{I} y_{ij}$$

$$\text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } p^s \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^s - \sum_{i=1}^{I} e_i^s \right) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) = \sum_{j=1}^{J} r_j^s(p^s) \sum_{i=1}^{I} y_{ij}$$

となることから目的の等式が得られる． ///

命題 1.2.2 から AME において標準的な仮定を置けばワルラス法則が成立することが分かる．しかしながら均衡価格の同次性については必ずしもそうではない．

ここで任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について効用最大化解が需要関数 $x_i^*(p, q), y_i^*(p, q)$ で表せるとする．ある価格ベクトルが (p, q) で表される AME が命題 1.2.2 の仮定を満たすならば，需給均衡条件とワルラス法則により (p, q) についての連立方程式が $(1 + S)(N - 1) + J$ 個だけ存在することが分かる．しかしながら (p, q) の次元は $N(1 + S) + J$ なので，未知数の数と方程式の数が一致しない．この場合は未知数の数の方が方程式の数より多いため，一般に解は複数個存在する．

しかし，特定のケースにおいては未知数の数を減らすことができる．

- 時点 0 において
  $p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i \le p^0 \cdot e_i^0$ なので価格ベクトルが (p^0, q) から，任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}_{++}$ について $(\alpha p^0, \alpha q)$ としても予算制約の取る範囲は変わらない．特に $p_1^0 = 1$ としても一般性は失われないことが分かる．
- 時点 1，状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ において
  $p^s \cdot x_i^s \le p_i^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s)$ なので，全ての $j \in \{1, \cdots, J\}$ について $r_j^s(p^s)$ が p^s に対し 1 次同次であれば，価格ベクトルを p^s から，任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}_{++}$ について αp^s としても予算制約の取る範囲は変わらない．例えば実物資産などのペイオフは財価格に対しての 1 次同次性を保持する．しかしながら名目資産，オプション，社債等の証券のペイオフは財価格に対しての 1 次同次性を保持しない．

もし任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ についてある証券のペイオフが財価格に対しての 1 次同次性を保持しないのであれば，(未知数の数) – (式の数) = S となり，一般には無数の解が存在しうる．この S を解の自由度，均衡の multiplicity と呼ぶ．

しかしある仮定を置けば未知数の数は $(1 + S)(N - 1) + J$ とすることができる．第 3 章で述べる完備性の仮定がそのような仮定の 1 つである．

第2章　裁定取引と状態価格

この章では裁定取引と状態価格を定義し，裁定取引が存在しないことと状態価格が存在することが同値であること (ファイナンスの基本定理) を示す．またこの定理を導くのに用いる補題と，その双対的な関係にある結果について説明する．

2.1　定義

2.1.1 定義 (裁定取引 (arbitrage trading)) ポートフォリオ $\eta := (\eta_1, \cdots, \eta_J)^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が価格ベクトル (p, q) の下で**裁定取引**であるとは以下の $1 + S$ 本の不等式

$$\begin{array}{rcl} q \cdot \eta & \leq & 0 \\ \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \qquad \eta \cdot r^s(p^s) = \displaystyle\sum_{j=1}^{J} \eta_j r_j^s(p^s) \geq 0 \end{array}$$

が成立し，少なくともこれらの不等式のうちの 1 つは狭義の不等号で成立する時を言う．

定義 2.1.1 は以下の 2 条件の少なくともどちらか一方が必ず成立することと同値である．

1. $q \cdot \eta < 0$ ならば，全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $\eta \cdot r^s(p^s) \geq 0$
2. $q \cdot \eta \leq 0$ ならば，全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $\eta \cdot r^s(p^s) \geq 0$ かつ，ある $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $\eta \cdot r^s(p^s) > 0$

条件 1 は時点 0 で売上を得て $(q \cdot \eta < 0)$，時点 1 で (ポートフォリオを組んだことによる) 負債を被ることがないという事を述べている．条件 2 は時点 0 で投資を必要とせず $(q \cdot \eta \leq 0)$，時点 1 で (ポートフォリオを組んだことによる) 負債を被ることはなく，かつ少なくとも一つの状態では厳密に正の利益を得られるという事を述べている．

定義からも分かるようにあるポートフォリオが裁定取引か否かは時点 0 での財価格 p^0 とは無関係である．また価格ベクトル (p, q) が AME における価格ベクトルである必要もない．

次の命題から標準的な設定の下で，AME において裁定取引は存在しないことが示される．

2.1.2 命題 ある $i \in \{1, \cdots, I\}$ について U_i が強単調とする．この時，(p, q) が AME における均衡価格ならば，(p, q) の下での裁定取引は存在しない．

命題 2.1.2 の証明 対偶

「(p, q) の下で裁定取引が存在するならば (p, q) は AME における均衡価格ではない」

を示す．あるポートフォリオ $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_J)^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が価格ベクトル (p, q) の下での裁定取引であるとする．ここで行列 B を以下のように定義する．

$$B := \begin{pmatrix} -q_1 & \cdots & -q_J \\ r_1^1(p^1) & \cdots & r_J^1(p^1) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^S(p^S) & \cdots & r_J^S(p^S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q^\top \\ r^1(p^1)^\top \\ \vdots \\ r^S(p^S)^\top \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(1+S)\times J}$$

裁定取引の定義から

$$z := (z^0, z^1, \cdots, z^S)^\top = B\eta = \begin{pmatrix} -q\cdot\eta \\ r^1(p^1)\cdot\eta \\ \vdots \\ r^S(p^S)\cdot\eta \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}_+^{1+S} \setminus \{0\}$$

であることが分かる．つまり任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，予算制約を満たすような配分 (x_i, y_i) に対し

$$\begin{aligned} & p^0 \cdot x_i^0 + q\cdot(y_i+\eta) \le p^0 \cdot e_i^0 \\ & p^s \cdot x_i^s \le p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J (y_{ij}+\eta_j) r_j^s(p^s), \quad \text{for all } s \in \{1, \cdots, S\} \end{aligned}$$

が成立する．さらに z を用いて全ての $s \in \{0, 1, \cdots, S\}$ について次のような財ベクトルを定義する．

$$w^s = \left(z^s / \sum_{n=1}^N p_n^s \right) \mathbf{1}_N \in \boldsymbol{R}_+^N$$

ここで $\mathbf{1}_N$ はすべての要素が 1 である N 次の実数ベクトルである．少なくとも 1 人の消費者の効用関数が強単調ならば $p^s \in \boldsymbol{R}_{++}^{N(1+S)}$ なので，このような w^s は well-defined である．$w = (w^0, w^1, \cdots, w^S) \in \boldsymbol{R}_+^{N(1+S)} \setminus \{0\}$ として，任意の正の実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}_{++}$ について配分 $(x_i + \alpha w, y_i + \alpha\eta)$ が予算制約を満たすかどうか確認する．$\sum_{n=1}^N p_n^s = 0$ ならば $p^s \cdot (\alpha w) = 0$ なので自明．$\sum_{n=1}^N p_n^s \neq 0$ である時，

$$\begin{aligned} p^0 \cdot (x_i^0 + \alpha w^0) + q\cdot(y_i + \alpha\eta) &= p^0 \cdot x_i^0 + q\cdot y_i + \alpha(p^0\cdot w^0 + q\cdot\eta) \\ &= p^0 \cdot x_i^0 + q\cdot y_i + \alpha(z^0 + q\cdot\eta) \\ &= p^0 \cdot x_i^0 + q\cdot y_i \\ &\le p^0 \cdot e_i^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^s \cdot (x_i^s + \alpha w^s) - r^s(p^s)\cdot(y_i + \alpha\eta) &= p^s \cdot x_i^s - r^s(p^s)\cdot y_i + \alpha(p^s\cdot w^s - r^s(p^s)\cdot\eta) \\ &= p^s \cdot x_i^s - r^s(p^s)\cdot y_i + \alpha(z^s - r^s(p^s)\cdot\eta) \\ &= p^s \cdot x_i^s - r^s(p^s)\cdot y_i \\ &\le p^s \cdot e_i^s \end{aligned}$$

が全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について成立する．つまり $(x_i + \alpha w, y_i + \alpha\eta)$ は予算制約を満たす．強単調な U_i について w の定義から $U_i(x_i + \alpha w) > U_i(x_i)$ であるので，(p, q) の下では強単調な効用関数を持つ消費者 i について効用最大化解が存在しない．よって (p, q) は AME における均衡価格ではない．したがって題意は示された．　///

命題 2.1.2 は数理ファイナンスにおける無裁定価格と経済学的な AME の均衡価格の橋渡しをする．無裁定価格とは具体的には以下のような価格付けの原理になる．仮に証券 A, B, C が存在したとして，証券 B, C の取引価格が既知であるとする．この時，全ての状態において証券 A と同じペイオフを達成するようなポートフォリオを証券 B, C を用いて組成できるならば，そのようなポートフォリオ組成にかかる費用が証券 A の取引価格と一致するようになる．この考え方の背景にあるのが裁定取引の非存在である．事実，A のペイオフを複製するポートフォリオの

組成にかかる費用と A の取引価格が異なれば，裁定取引を容易に作ることができる．もし命題 2.1.2 の要件が成立するならば AME の均衡価格 (p,q) は裁定取引の存在を許さないので，(p,q) の下での無裁定価格は AME における均衡価格と矛盾しない．

命題 2.1.2 で定義した行列 B は後のファイナンスの基本定理を示すにあたっても非常に有用な概念であるので覚えておきたい．

次に状態価格を定義する．

2.1.3 定義 (状態価格 (state price)) $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top \in \boldsymbol{R}^S_{++}$ が価格ベクトル (p,q) の下での**状態価格**ベクトル[1]であるとは，任意の $j \in \{1, \cdots, J\}$ について

$$q_j = \sum_{s=1}^{S} \lambda^s r_j^s(p^s)$$

が成立することを言う．

状態 s の状態価格 λ^s は時点 1 の状態 s において 1 単位の購買力を得るために必要な時点 0 での費用と見なせる．つまり状態価格 λ が存在し，かつその値が分かっているならば，任意のペイオフを持つ証券の取引価格が分かるようになる．また全ての状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について λ^s は証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ に依存しない．

2.2　ファイナンスの基本定理

証券の価格付けにおいて重要な定理が下記のファイナンスの基本定理となる．

2.2.1 定理 (ファイナンスの基本定理 (Fundamental Theorem of Finance)) (p,q) を任意の価格ベクトルとする．この時，以下の 2 条件は同値である．

1. (p,q) の下で裁定取引は存在しない．
2. (p,q) の下で状態価格が存在する．

(p,q) は AME の均衡価格である必要はない．またファイナンスの基本定理は他の文献ではアセットプライシングの第 1 基本定理と呼ばれることもある．命題 2.1.2 とファイナンスの基本定理により，標準的な仮定を課せば AME における状態価格は必ず存在することが言える．

定理の証明に入る前にファイナンスの基本定理について数学的な特徴付けを行おう．行列 B を命題 2.1.2 で定義した行列とする．つまり

$$B := \begin{pmatrix} -q_1 & \cdots & -q_J \\ r_1^1(p^1) & \cdots & r_J^1(p^1) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^S(p^S) & \cdots & r_J^S(p^S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q^\top \\ r^1(p^1)^\top \\ \vdots \\ r^S(p^S)^\top \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(1+S)\times J}$$

とする．ただし価格ベクトル (p,q) は必ずしも AME の均衡価格である必要はない．

$\eta \in \boldsymbol{R}^J$ が裁定取引であることと $B\eta \in \boldsymbol{R}^{1+S}_+ \setminus \{0\}$ であることは同値である．これは命題 2.1.2 の証明における議論からも明らかである．次に $\lambda \in \boldsymbol{R}^S$ が状態価格ベクトルであることと $(1, \lambda^\top)B = 0$ であることは同値である．実際に計算すると

$$(1,\lambda^\top)B = \left(-q_1 + \sum_{s=1}^{S} \lambda^s r_1^s(p^s), \cdots, -q_J + \sum_{s=1}^{S} \lambda^s r_J^s(p^s)\right)$$

[1]他に state price deflator, state price density, pricing kernel などとも呼ばれる．

となり確かに成立する．

よってファイナンスの基本定理における 2 つの条件は以下のように書き換えられる．

1. $B\eta \in \boldsymbol{R}_{+}^{1+S} \setminus \{0\}$ となるような $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ が存在しない．
2. $(1, \lambda^\top)B = 0$ となるような $\lambda \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ が存在する．

つまりこの 2 条件の同値性を確かめられたならば，ファイナンスの基本定理が示せたことになる．さらにこの 2 条件を以下のように書き換える．

1. $B\eta \in \boldsymbol{R}_{+}^{1+S} \setminus \{0\}$ となるような $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ が存在する．
2. $(1, \lambda^\top)B = 0$ となるような $\lambda \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ が存在する．

このようにするとファイナンスの基本定理は条件 1,2 のどちらか一方のみが成立することを要求していることが分かる．よって，このような行列 B が持つ線形台数的な性質を示すことが，以降の証明となる．

ここで条件 1,2 は同時には成立しない事が示せる．仮に条件 1,2 が同時に成立した場合，$\alpha = B\eta \in \boldsymbol{R}_{+}^{1+S} \setminus \{0\}$ とおけば，

$$(1, \lambda^\top)B\eta = \begin{cases} (1, \lambda^\top)\alpha \in \boldsymbol{R}_{++} \\ 0 \cdot \eta = 0 \end{cases}$$

が成立するので矛盾．よって条件 1,2 が同時に成立することはない．

したがって条件 1 が成立しなければ条件 2 は必ず成立することを示せればよい．

このことを示すために必要な数学的ツールが分離定理である．

2.2.2 定理 (分離定理 (Separeting Theorem)) Z を $\boldsymbol{R}^J$ 上の非空な凸部分集合とし，$w \in \boldsymbol{R}^J$ とする．$\inf\{\|w - z\| \mid z \in Z\} > 0$ ならば，ある $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ と $c \in \boldsymbol{R}$ が存在して，全ての $z \in Z$ に対し

$$\eta \cdot z \geq c > \eta \cdot w$$

が成立する．

ここで $\inf\{\|w - z\| \mid z \in Z\} > 0$ という条件は w が Z の境界上に存在することを排除するための条件である．

命題 2.2.2 の証明 $\delta := \inf\{\|w - z\| \mid z \in Z\} > 0$ とおく．ここで全ての正の整数 n について $\|w - z_n\| \leq \delta + 1/n$ であるような点列 $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq Z$ を取ることができる．もし $(z_n)_{n=1}^\infty$ のような点列を取ることができなければ，ある正の整数 n が存在し，全ての $z \in Z$ について $\|w - z\| > \delta + 1/n$ となり，δ の定義より矛盾する．ここで $(z_n)_{n=1}^\infty$ の定義から $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq \{z \in Z \mid \|w - z\| \leq \delta + 1\}$ であるので，$(z_n)_{n=1}^\infty$ は実数空間上の有界な部分集合に含まれる点列となり，Bolzano–Weierstrass の定理から収束する部分列 $(z_{\widehat{n}})$ を持つ[2]．$(z_{\widehat{n}})$ の極限を z^* とすると，$(z_{\widehat{n}}) \subseteq Z$ なので $\inf\{\|z^* - z\| \mid z \in Z\} = 0$ である．また，ノルムの連続性から

$$\|w - z^*\| = \lim_{\widehat{n} \to \infty} \|w - z_{\widehat{n}}\| \geq \delta$$

なので $\|w - z^*\| \geq \delta$ が言える[3]．

[2] より一般的に凸集合の性質と中線定理から点列 $(z_n)_{n=1}^\infty$ がコーシー列であることを示す方法もある．その場合は実数空間に限らない，より一般のヒルベルト空間に対して分離定理が成立することを示せる．

[3] 三角不等式を用いることで $\|w - z^*\| = \delta$ も言える．

ここで $\eta := z^* - w, c := \eta \cdot z^*$ とする．もし $\|\eta\| = 0$ ならば $\delta = 0$ となるので，$\|\eta\| > 0$ である．つまり $\eta \neq 0$ である．この時,

$$\eta \cdot w = \eta \cdot (z^* - \eta) = c - \|\eta\|^2 < c$$

なので $\eta \cdot w < c$ が成立する．

任意の $z, z_{\widehat{n}} \in Z$ と $t \in [0,1]$ について Z の凸性から $(1-t)z_{\widehat{n}} + tz \in Z$ である．また δ の定義から

$$\|(1-t)z_{\widehat{n}} + tz - w\| \geq \delta$$

である．ノルムの連続性から $\widehat{n} \to \infty$ とすると

$$\|(1-t)z^* + tz - w\| \geq \delta$$

が得られる．ここで関数 $f : [0,1] \to \boldsymbol{R}_+$ を

$$f(t) := \|(1-t)z^* + tz - w\|^2$$

と定義すると，任意の $t \in [0,1]$ のついて $f(t) \geq \delta^2$ かつ $f(0) = \|z^* - w\|^2 = \delta^2$ なので区間 $[0,1]$ において $t = 0$ で $f(t)$ は最小値 δ^2 を取る．さらに

$$\begin{aligned}
f(t) &= \|(1-t)z^* + tz - w\|^2 \\
&= \|t(z - z^*) + z^* - w\|^2 \\
&= \|(z - z^*)\|^2 t^2 + 2(z - z^*) \cdot (z^* - w)t + \|z^* - w\|^2 \\
f'(0) &= 2(z - z^*) \cdot (z^* - w) \\
&= 2\eta \cdot (z - z^*) \\
&= 2(\eta \cdot z - c)
\end{aligned}$$

であるが f は $t = 0$ で最小値を取るので $f'(0) \geq 0$ であり，よって $\eta \cdot z \geq c$ が得られる．以上より，全ての $z \in Z$ について $\eta \cdot z \geq c > \eta \cdot w$ である． ///

ここで分離定理の幾何学的な意味を考えてみよう．証明中の定義をそのまま用いると $c - \eta \cdot z = (z^* - w) \cdot (z^* - z) \leq 0$ となる．つまり $z^* - w$ と $z^* - z$ の成す角は必ず 90 度以上となることが分かる．よって $z^* - w$ と直交し，z^* を通る直線を引いた時に，点 w と凸集合 Z がこの直線で分離されることが分かる．z^* は w に最も近い，Z に含まれる点列の極限として表すことができる点であり，Z についての w の一意な[4]最良近似点と見なせる．また η は点 w で凸集合 Z を支持するようなベクトルとなる．

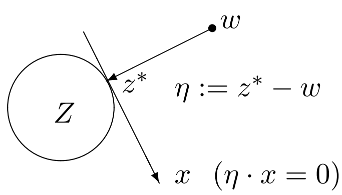

図 2.2.1: 分離定理の幾何学的意味

この分離定理を用いることで以下の命題 (Stiemke の補題) を示すことができる．

[4]中線定理が成り立つユークリッドノルムなので，z^* は一意であることが凸集合の性質と中線定理を用いて示すことができる．

2.2.3 命題 任意の実数行列 $B \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$ について，以下の 2 条件のうち一方のみが必ず成立する．

1. ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ が存在し $\zeta^\top B = 0$ を満たす．
2. ある $\eta \in \boldsymbol{R}^m$ が存在し $B\eta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ を満たす．

命題 2.2.3 の持つ幾何学的背景を考えよう．$m = n = 2$ として B の行ベクトルを b_1, b_2 とする．この時，$Z = \{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ がどういう領域を取るかを考える．
・$b_1 = -b_2$ である時
図 2.2.2 の左側の図における点線部分が Z となる．$\zeta = (1,1)^\top$ とすれば条件 1 が満たされることはすぐに分かる．また Z が線形部分空間であることも自明である．
・任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}$ について $b_1 \neq \alpha b_2$ である時
この時，b_1 と b_2 は線形独立である．Z の領域は図 2.2.2 の右側の図における縦線部分が Z となる．b_1 と b_2 の線形独立性から条件 1 は満たされない．また Z が線形部分空間ではないことも分かる．

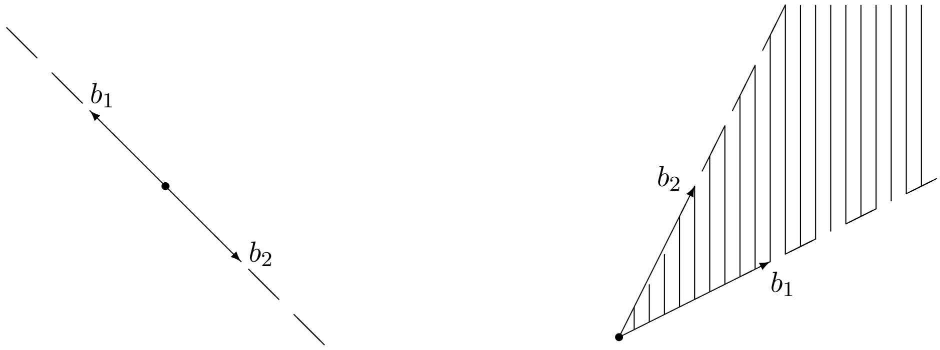

図 2.2.2: B の行ベクトルが作る多面錐

つまり

「条件 1 が成立することと $\{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ が線形部分空間であることは同値」

という予想が立つ．事実，この予想は真であることを証明しよう．

$Z = \{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ として，Z が線形部分空間とする．全ての要素が 1 である n 次の実数ベクトル $\mathbf{1}_n \in \boldsymbol{R}^n_+$ について，$\mathbf{1}_n^\top B \in Z$ である．Z が線形部分空間であることから $-(\mathbf{1}_n^\top B) \in Z$ でもある．よって，ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+$ が存在し，$-(\mathbf{1}_n^\top B) = \zeta^\top B$ である．すなわち，$(\zeta + \mathbf{1}_n)^\top B = 0$ かつ $\zeta + \mathbf{1}_n \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ なので，条件 1 が満たされる．

逆に条件 1 が成立する時，ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ が $\zeta^\top B = 0$ を満たす．任意の $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ と任意の $x, y \in \boldsymbol{R}^n_+$ について $\alpha(x^\top B) + \beta(y^\top B) = (\alpha x + \beta y)^\top B$ を考えた時，任意の正の実数 $\gamma \in \boldsymbol{R}_{++}$ について $(\gamma\zeta)^\top B = 0$ であることから，十分大きな γ を取れば $(\alpha x + \beta y)^\top B = (\alpha x + \beta y + \gamma\zeta)^\top B \in Z$ とできる．よって Z は線形部分空間となる．

では命題 2.2.3 の証明に入る．

命題 2.2.3 の証明 条件 1,2 が同時に成立することはない．なぜならば条件 1,2 が同時に成立するとして条件 1 を満たすベクトルを $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_{++}$，条件 2 を満たすベクトルを $\eta \in \boldsymbol{R}^m$ とすれば

$$\zeta^\top B\eta = \begin{cases} (\zeta^\top B)\eta = 0 \cdot \eta = 0 \\ \zeta^\top (B\eta) = \zeta \cdot (B\eta) > 0, \quad \text{なぜならば}\ \zeta \in \boldsymbol{R}^n_{++}\ \text{かつ}\ B\eta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\} \end{cases}$$

なので矛盾．よって条件 1,2 が同時に成立することはない．したがって，条件 1 が成立しない時に条件 2 が必ず成立することを確かめられれば，対偶の条件 2 が成立しない時に条件 1 が必ず

成立することも言えるので，条件 1,2 が同時に成立することが無いことから条件 1,2 のどちらか一方のみが必ず成立することが言える．

$Z := \{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ とする．全ての要素が 1 である n 次の実数ベクトルを $\boldsymbol{1}_n = (1, \cdots, 1)^\top \in \boldsymbol{R}^n_+$ とすれば $\boldsymbol{1}_n^\top B \in Z$ である．ここで条件 1 が成立しないとすると，$-\boldsymbol{1}_n^\top B \notin Z$ である．仮に $-\boldsymbol{1}_n^\top B \in Z$ ならば，ある $c \in \boldsymbol{R}^n_+$ が存在し，$-\boldsymbol{1}_n^\top B = c^\top B$ であるので $(c + \boldsymbol{1}_n)^\top B = 0, c + \boldsymbol{1}_n \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ が成立するため矛盾する．また Z は多面錐なために閉凸集合であり，よって $\inf\{\| -\boldsymbol{1}_n^\top B - z\| \mid z \in Z\} > 0$ である．

したがって分離定理より，ある $\eta \in \boldsymbol{R}^m$ が存在して，任意の $z \in Z$ に対して

$$\eta \cdot z > \eta \cdot (-\boldsymbol{1}_n^\top B)^\top$$

が成立する．また，Z は錐より任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}_+$ について $z \in Z$ ならば $\alpha z \in Z$ が言える．したがって任意の正の実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}_+$ に対し，内積の線形性から任意の $z \in Z$ について，

$$\alpha(\eta \cdot z) > \eta \cdot (-\boldsymbol{1}_n^\top B)^\top$$

が成立する．ここで $\eta \cdot z < 0$ ならば十分大きな $\alpha > 0$ に対して $\alpha(\eta \cdot z) < \eta \cdot (-\boldsymbol{1}_n^\top B)^\top$ なので不適．よって $\eta \cdot z \geq 0$．また B の第 i 行ベクトルを $b_i^\top$ とすると，Z の定義より全ての $i \in \{1, \cdots, n\}$ について $b_i^\top \in Z$ であるので $\eta \cdot b_i \geq 0$ が成立する．すなわち $B\eta \in \boldsymbol{R}^n_+$ である．また $\boldsymbol{1}_n^\top B \in Z$ なので $\eta \cdot (\boldsymbol{1}_n^\top B)^\top > \eta \cdot (-\boldsymbol{1}_n^\top B)^\top$ より，$\eta \cdot (\boldsymbol{1}_n^\top B)^\top = \boldsymbol{1}_n \cdot (B\eta) > 0$ なので $B\eta \neq 0$ である．すなわち $B\eta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ が成立する．このことから η が条件 2 を満たすベクトルであるので題意は示された． ///

この命題 2.2.3 を用いることでファイナンスの基本定理を示すことができる．

定理 2.2.1 の証明 任意の価格ベクトル (p, q) について行列 B を先ほど定義した

$$B = \begin{pmatrix} -q_1 & \cdots & -q_J \\ r_1^1(p^1) & \cdots & r_J^1(p^1) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^S(p^S) & \cdots & r_J^S(p^S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q^\top \\ r^1(p^1)^\top \\ \vdots \\ r^S(p^S)^\top \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(1+S)\times J}$$

とする．この時，ファイナンスの基本定理は

1. $B\eta \in \boldsymbol{R}^{1+S}_+ \setminus \{0\}$ となるような $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ が存在しない．
2. $(1, \lambda^\top)B = 0$ となるような $\lambda \in \boldsymbol{R}^S_{++}$ が存在する．

の 2 条件が同値であることに書き換えられる．ここで裁定取引が存在しない，つまり条件 1 が満たされ $B\eta \in \boldsymbol{R}^{1+S}_+ \setminus \{0\}$ となるような $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ が存在しなければ，命題 2.2.3 より，ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^{1+S}_{++}$ が存在し $\zeta^\top B = 0$ を満たす．この ζ を $\zeta = (\zeta^0, \zeta^1, \cdots, \zeta^S)^\top$ とすれば $\zeta^0 > 0$ より

$$\lambda := \left(\frac{\zeta^1}{\zeta^0}, \cdots, \frac{\zeta^S}{\zeta^0}\right)^\top \in \boldsymbol{R}^S_{++}$$

が定義でき，

$$(1, \lambda^\top)B = 0$$

が成立する．よって λ が状態価格となり，その存在が確かめられた． ///

次の命題が示すように，命題 2.2.3 の条件 1 を弱めることで，命題 2.2.3 の条件 2 に相当する条件をより強くすることができる．

2.2.4 命題 任意の実数行列 $B \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$ について，以下の2条件のうち一方のみが必ず成立する．

1. ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ が存在し $\zeta^\top B = 0$ を満たす．
2. ある $\eta \in \boldsymbol{R}^m$ が存在し $B\eta \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ を満たす．

命題 2.2.4 の証明 条件1,2が同時に成立することはない．仮に条件1,2が同時に成立するとして条件1を満たすベクトルを $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$，条件2を満たすベクトルを $\eta \in \boldsymbol{R}^m$ とすれば

$$\zeta^\top B\eta = \begin{cases} (\zeta^\top B)\eta = 0 \cdot \eta = 0 \\ \zeta^\top (B\eta) = \zeta \cdot (B\eta) > 0, \quad \text{なぜならば}\, \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\} \,\text{かつ}\, B\eta \in \boldsymbol{R}^n_{++} \end{cases}$$

となり矛盾．したがって条件1が成立しなければ，条件2は必ず成立することを示すことができれば題意を示したこととなる．

ここで，B の第 i 行ベクトルを $b_i^\top$ として以下の行列と集合を考える．

$$\begin{aligned} \widetilde{B} &:= \begin{pmatrix} b_1^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ b_n^\top & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} B & \mathbf{1}_n \end{array} \right) \in \boldsymbol{R}^{n\times(m+1)} \\ \widetilde{Z} &:= \{\zeta^\top \widetilde{B} \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\} \end{aligned}$$

$\mathbf{1}_n$ はすべての要素が1である n 次の実数ベクトルである．

まず，条件1が成立することとある $c \in \boldsymbol{R}_{++}$ が存在し $(\mathbf{0}_m^\top, c) \in \widetilde{Z}$ であることが同値であることを示す．$\mathbf{0}_m$ はすべての要素が0である m 次の実数ベクトルである．条件1が成立する時，ある $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)^\top \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ が存在し，$\zeta^\top B = 0$ である．このような ζ に対して

$$\zeta^\top \widetilde{B} = (\zeta^\top B, \zeta \cdot \mathbf{1}_n) = (\mathbf{0}_m^\top, \sum_{i=1}^n \zeta_i)$$

が成立する．ここで $c := \sum_{i=1}^n \zeta_i > 0$ とすれば，ある $c \in \boldsymbol{R}_{++}$ が存在し $(\mathbf{0}_m^\top, c) \in \widetilde{Z}$ であることが示される．逆にある $c \in \boldsymbol{R}_{++}$ が存在し $(\mathbf{0}_m^\top, c) \in \widetilde{Z}$ であれば，ある $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)^\top \in \boldsymbol{R}^n_+$ が存在し，

$$(\mathbf{0}_m^\top, c) = \zeta^\top \widetilde{B} = (\zeta^\top B, \sum_{i=1}^n \zeta_i)$$

であることが言える．つまり $\zeta^\top B = 0$ かつ $\sum_{i=1}^n \zeta_i = c > 0$ である．$\sum_{i=1}^n \zeta_i > 0$ より $\zeta \neq 0$ であるので $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ となり ζ が条件1を満たすベクトルとなる．よって条件1が成立することの同値条件がある $c \in \boldsymbol{R}_{++}$ が存在し $(\mathbf{0}_m^\top, c) \in \widetilde{Z}$ であることが示された．

つまり条件1が成立しないならば，全ての $c \in \boldsymbol{R}_{++}$ について $(\mathbf{0}_m^\top, c) \notin \widetilde{Z}$ であることが分かる．よって条件1が成立しないとして，$1 \in \boldsymbol{R}_{++}$ について $(\mathbf{0}_m^\top, 1) \notin \widetilde{Z}$ である．また，$\widetilde{Z}$ は多面錐であり，閉凸集合であるので，$\inf\{\|(\mathbf{0}_m^\top, c)^\top - z\| \mid z \in \widetilde{Z}\} > 0$ である．そうでなければ，ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+$ について $\zeta^\top B = 0$ かつ $1 - \sum_{i=1}^n \zeta_i = 0$ となる．条件1を満たさないことから $\zeta^\top B = 0$ となるのは $\zeta = 0$ の時に限るが，その時は $1 - \sum_{i=1}^n \zeta_i > 0$ となり矛盾する．

分離定理を適用する条件が揃ったので，分離定理よりある $\widetilde{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_m, \eta_{m+1})^\top \in \boldsymbol{R}^{m+1}$ が存在し，

$$\widetilde{\eta} \cdot \widetilde{z} > (\mathbf{0}_m^\top, 1)^\top \cdot \widetilde{\eta} = \eta_{m+1}, \quad \text{for all } \widetilde{z} \in \widetilde{Z}$$

が示される．

また任意の $l \in \{1, \cdots, n\}$ について第 l 要素のみが 1 でほかの要素がすべて 0 である n 次の実数ベクトルを $\mathbf{1}_{n,l} \in \boldsymbol{R}^n_+$ とすると $\mathbf{1}_{n,l}^\top \widetilde{B} \in \widetilde{Z}$ である．ここで $\mathbf{1}_{n,l}^\top \widetilde{B} = (b_l^\top, 1)$ なので，$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m)^\top \in \boldsymbol{R}^m$ とすれば

$$(\mathbf{1}_{n,l}^\top \widetilde{B})^\top \cdot \widetilde{\eta} = (b_l^\top, 1)^\top \cdot \widetilde{\eta} = b_l \cdot \eta + \eta_{m+1} > \eta_{m+1}$$

となる．よって任意の $l \in \{1, \cdots, n\}$ について $b_l \cdot \eta > 0$ であるので $B\eta \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ となる．この η が条件 2 を満たすベクトルなので題意は示された． ///

命題 2.2.4 は以下のように幾何学的に解釈できる．条件 2 はある $\eta \in \boldsymbol{R}^n$ について $B\eta \in \boldsymbol{R}^m_{++}$ であるので，η と B の全ての行ベクトルの内積が厳密に正であることを主張する．よって条件 2 が成立するならば B の全ての行ベクトルと鋭角を成すベクトル η を見つけることができ，それはすなわち B の全ての行ベクトルにより作られる凸多面錐に含まれる全てのベクトルと鋭角を成す η が存在することに等しい．図 2.2.3 の左側の図が条件 2 が成立する場合の一例である．

条件 1 が成立するということは B の全ての行ベクトルが成す凸多面錐は必ず直線を含むということを示している．より具体的な例で考えよう．$m = 2, n = 3$ として B の行ベクトルをそれぞれ $b_1^\top, b_2^\top, b_3^\top$ とする．そして $Z := \{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ とおく．この時，$b_1 = -b_2$ とすれば図 2.2.3 の右側の図のような図が描ける．図 2.2.3 の右側の図の縦線部分が Z の領域であるが確かに直線を含んでいる．またこの時，$\zeta = (1, 1, 0)^\top \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ とすれば $\zeta^\top B = 0$ であることも分かる．つまり条件 1 が成立している．

図 2.2.3: B の行ベクトルが作る多面錐

よって，条件 1 が成立することと $\{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ が直線を含むことが同値であると予想できる．このことを以下で示す．ただし，B の全ての行ベクトルが 0 ベクトルでないとする．条件 1 が成立するとする．この時，ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ が存在し，$\zeta^\top B = 0$ である．ここで $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ なので ζ のうち 0 でない要素が必ず一つ以上存在する．つまり ζ のうち 0 でない要素の添え字全てからなる集合を $\widehat{\mathcal{N}}$ とすれば $\widehat{\mathcal{N}} \neq \varnothing$ である．また

$$\zeta^\top B = \sum_{i \in \widehat{\mathcal{N}}} \zeta_i b_i^\top = 0$$

が成立する．

ここで $\widehat{\mathcal{N}}$ の要素数を $\mathcal{N}$ とし，$\{b_i \mid i \in \widehat{\mathcal{N}}\}$ に含まれる有限個の行ベクトルを添え字の被りがないように並べることで作られる行列を $\mathcal{B} \in \boldsymbol{R}^{\mathcal{N} \times m}$ とする．このような行列 $\mathcal{B}$ に対し，ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^{\mathcal{N}}_{++}$ が存在して $\zeta^\top \mathcal{B} = 0$ であることは先ほどの議論から分かる．この条件は命題 2.2.3 の条件 1 と一致するので，集合 $\{\zeta^\top \mathcal{B} \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^{\mathcal{N}}_+\}$ は線形部分空間であることも言える．また

$$\{\zeta^\top \mathcal{B} \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^{\mathcal{N}}_+\} \subseteq \{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$$

なので B の行ベクトルから作られる多面錐 $\{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ もまた直線を含む．

逆に $\{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ が直線を含む時，ある $x \in \{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}, x \neq 0$ について，$-x \in \{\zeta^\top B \mid \zeta \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ が成立する．したがって $x = \widehat{\zeta}^\top B, -x = \widetilde{\zeta}^\top B$ である $\widehat{\zeta}, \widetilde{\zeta} \in \boldsymbol{R}^n_+$ が存在し，$0 = x - x = (\widehat{\zeta} + \widetilde{\zeta})^\top B$ である．ここで $\zeta = \widehat{\zeta} + \widetilde{\zeta}$ とする．この時，$\zeta = 0$ ならば $\widehat{\zeta} = -\widetilde{\zeta}$ であるが，$\widehat{\zeta}, \widetilde{\zeta} \in \boldsymbol{R}^n_+$ なので $\widehat{\zeta} = \widetilde{\zeta} = 0$ でなくてはならない．この時，定義より $x = -x = 0$ となり矛盾．したがって $\zeta \neq 0$ であり $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ であるので ζ が条件 1 を満たすベクトルとなる．

以上より命題 2.2.4 の条件 1 と B の行ベクトルから作られる凸多面錐が直線を含むことの同値性が示された．

また，命題 2.2.3 と命題 2.2.4 は以下の命題で表されるような双対関係にあることが分かる．

ここで任意の行列 B について B の全ての列ベクトルによって張られる空間を列空間 $\mathrm{Col}\ B$ とし，ある線形部分空間 X に所属する全てのベクトルと直交するベクトル全てからなる空間を直交補空間 $X^\perp$ として表す．

2.2.5 命題 任意の行列 $B_1 \in \boldsymbol{R}^{n \times m_1}$，$B_2 \in \boldsymbol{R}^{n \times m_2}$ について，$\mathrm{Col}\ B_1$ と $\mathrm{Col}\ B_2$ が互いに直交補空間，つまり $\mathrm{Col}\ B_1 = (\mathrm{Col}\ B_2)^\perp$ かつ $\mathrm{Col}\ B_2 = (\mathrm{Col}\ B_1)^\perp$ であれば次の 2 つが成り立つ．

1. B_1 が命題 2.2.3 の条件 1 を満たすことと B_2 が命題 2.2.4 の条件 2 を満たすことは同値．
2. B_1 が命題 2.2.3 の条件 2 を満たすことと B_2 が命題 2.2.4 の条件 1 を満たすことは同値．

命題 2.2.5 の証明 まず 1 を示す．B_1 が命題 2.2.3 の条件 1 を満たすということは，ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ が存在し，$\zeta^\top B_1 = 0$ であるということである．つまり任意の $\eta \in \boldsymbol{R}^{m_1}$ について，$\zeta^\top B_1 \eta = \zeta \cdot (B_1 \eta) = 0$ を満たす $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ が必ず存在するという事である．よって命題 2.2.3 の条件 1 を満たすことと $\boldsymbol{R}^n_{++} \cap (\mathrm{Col}\ B_1)^\perp \neq \varnothing$ は同値である．$\mathrm{Col}\ B_2 = (\mathrm{Col}\ B_1)^\perp$ なので，この条件は $\boldsymbol{R}^n_{++} \cap \mathrm{Col}\ B_2 \neq \varnothing$ と書き換えられる．$\boldsymbol{R}^n_{++} \cap \mathrm{Col}\ B_2 \neq \varnothing$ であることは，あるベクトル $\eta \in \boldsymbol{R}^{m_2}$ が存在して $B_2 \eta \in \boldsymbol{R}^n_{++}$ であることと同値であり，この条件はまさに命題 2.2.4 の条件 2 なのでこの命題の 1 は示された．

次に 2 を示す．B_2 が命題 2.2.4 の条件 1 を満たすということは，ある $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ が存在し，$\zeta^\top B_2 = 0$ であるということである．つまり任意の $\eta \in \boldsymbol{R}^{m_2}$ について，$\zeta^\top B_2 \eta = \zeta \cdot (B_2 \eta) = 0$ を満たす $\zeta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ が必ず存在するという事である．よって命題 2.2.4 の条件 1 を満たすことと $(\boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{Col}\ B_2)^\perp \neq \varnothing$ は同値である．$\mathrm{Col}\ B_1 = (\mathrm{Col}\ B_2)^\perp$ なので，この条件は $(\boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}) \cap \mathrm{Col}\ B_1 \neq \varnothing$ と書き換えられる．$(\boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}) \cap \mathrm{Col}\ B_1 \neq \varnothing$ であることは，あるベクトル $\eta \in \boldsymbol{R}^{m_1}$ が存在して $B_1 \eta \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$ であることと同値であり，この条件はまさに命題 2.2.3 の条件 2 なのでこの命題の 2 は示された． ///

命題 2.2.3 と命題 2.2.4 を見比べると一方の条件 1 と他方の条件 1，そして一方の条件 2 と他方の条件 2 が対応しているように思われるが，命題 2.2.5 によれば一方の条件 1 と他方の条件 2 が対応していることが分かる．

また $\mathrm{Col}\ B = (\mathrm{Col}\ B_1)^\perp$ となるように行列 B_1 を選べば，命題 2.2.3 と命題 2.2.5 を適用することで，B についての命題 2.2.4 が得られる．逆に $\mathrm{Col}\ B = (\mathrm{Col}\ B_2)^\perp$ となるように行列 B_2 を選べば，命題 2.2.4 と命題 2.2.5 を適用することで，B についての命題 2.2.3 が得られる．

$\boldsymbol{R}^n$ は有限次元なのでこのような行列 B_1, B_2 は必ず存在する．

第3章　完備市場

この章では市場の完備性を定義し，証券市場がこの性質を満たすならば，競争均衡は時点や状態を超えて自由に状態依存財を取引できるモデルの均衡 (Arrow-Debreu 均衡) と一致することを示す．経済学の多くの命題は厚生分析と資産価格のどちらか一方に関する結果であることが多いが，完備市場の分析では両方について意味のある結果が得られることが多い．

3.1　定義

3.1.1 定義 (完備 (complete)) $p \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ を価格ベクトルとする．次の条件が成立する時，市場は p の下で**完備**であると言う．任意の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ の任意の消費 $x_i \in X_i$ に対し，あるポートフォリオ $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ が存在して，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ に対し

$$p^s \cdot x_i^s = p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \tag{3.1}$$

が成立する．

市場が完備であるということは，全ての状態においてどのような消費であっても，証券の取引を通して各状態で得られる購買力を操作することで，その消費に必要な資金 (超過需要の価値額) を過不足なく調達できるということである．完備性の条件は時点 0 での予算制約には依存していないので，(3.1) を満たすポートフォリオを組成するのにどれだけの費用が必要かということについての条件は課されていない．

また，(3.1) は等号で成立していることにも注意したい．実際に第 1 章で述べたような安全資産が存在すれば，任意の消費 x_i を達成するのに必要な資金を全ての状態において供給するポートフォリオを作ることはできる．しかし，その場合では一般には (3.1) は等号では成立せず，厳密な不等号が成立することもある．このような場合では誘因両立性 (incentive compatibility) を満たさない方法で x_i を消費するのに必要な購買力が賄われることを許容しているために[1]，均衡分析を行う上で適切ではない定義となる．

更に，定義 3.1.1 におけるポートフォリオ y_i は負の量の証券を保有することを許容している．つまり空売り制約がかかっていない．実際に空売り制約が無い場合に市場が完備であっても，空売り制約が存在すると市場が完備でなくなる場合もある．同様に取引費用 (transaction cost) や限定的参加 (restricted participation) 等の制約も存在しない理想的な市場を想定している．

ある価格の下で完備性が満たされているならば，任意の資源制約を満たす財配分の時点 1 での任意の状態の超過需要の価値額を過不足なく賄うようなポートフォリオを資源制約を満たすように取ることができる．

3.1.2 補題 配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ が $\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} e_i$ を満たしているとする．この時，価格 p の下で市場が完備ならば，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について (3.1) が成立し $\sum_{i=1}^{I} y_i = 0$ となるようなポートフォリオ $y_i \in \boldsymbol{R}^J, i = 1, \cdots, I$ が存在する．

[1] つまり x_i を消費するために必要な資金より多く購買力を供給するポートフォリオを組成してもよいということ．

補題 3.1.2 の証明 価格 p の下で市場は完備なので，任意の $i \in \{2, \cdots, I\}$ に対し，ポートフォリオ $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ を任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について (3.1) を満たすようにとれる．ここで

$$y_1 := -\sum_{i=2}^{I} y_i$$

とおく．この時，$\sum_{i=1}^{I} y_i = 0$ なので，この y_1 が (3.1) を満たせばよい．任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ が資源制約を満たすことより $x_1^s - e_1^s = -\sum_{i=2}^{I}(x_i^s - e_i^s)$ なので，

$$\begin{aligned} p^s \cdot (x_1^s - e_1^s) &= p^s \cdot \left(-\sum_{i=2}^{I} (x_i^s - e_i^s) \right) = -\sum_{i=2}^{I} p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) \\ &= -\sum_{i=2}^{I} \left(\sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \right) = \sum_{j=1}^{J} \left(-\sum_{i=2}^{I} y_{ij} \right) r_j^s(p^s) \\ &= \sum_{j=1}^{J} y_{1j} r_j^s(p^s) \end{aligned}$$

となり，確かに (3.1) が成立する．　///

以下の行列を定義する．

$$R(p) := \begin{pmatrix} r_1^1(p^1) & \cdots & r_J^1(p^1) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^S(p^S) & \cdots & r_J^S(p^S) \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{S \times J}$$

補題 3.1.2 の証明のように y_1 の選び方を工夫する必要があるのは，$R(p)$ の列ベクトルの中で一次従属な組み合わせがある時である．$R(p)$ の全ての列ベクトルが一次独立であり，$\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} e_i$ を満たす配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ に対し，全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ についてポートフォリオ y_i が (3.1) を満たすならば，

$$\begin{aligned} R(p) \left(\sum_{i=1}^{I} y_i \right) &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{J} r_j^1(p^1) \left(\sum_{i=1}^{I} y_{ij} \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{J} r_j^S(p^S) \left(\sum_{i=1}^{I} y_{ij} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^1(p^1) \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^S(p^S) \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{I} p^1 \cdot (x_i^1 - e_i^1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{I} p^S \cdot (x_i^S - e_i^S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} (x_i^1 - e_i^1) \right) \\ \vdots \\ p^S \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} (x_i^S - e_i^S) \right) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

なので，$\sum_{i=1}^{I} y_i = 0$ でなくてはならない[2]．

$R(p)$ がある性質を満たすならば，市場が完備であることが言える．

3.1.3 命題 rank $R(p) = S$ ならば p の下で市場は完備である．

[2] 全ての状態においてペイオフが他の証券のペイオフの一次結合で表されるような証券のことを redundant な証券という．$R(p)$ の全ての列ベクトルが一次独立ならば redundant な証券は存在しないことが分かる．

命題 3.1.3 の証明 rank $R(p)=S$ より Col $R(p)=\boldsymbol{R}^S$ である．よって任意の $i\in\{1,\cdots,I\}$ に対し，任意の $x_i\in X_i$ について

$$\begin{pmatrix} p^1\cdot(x_i^1-e_i^1) \\ \vdots \\ p^S\cdot(x_i^S-e_i^S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^J y_{ij}r_j^1(p^1) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^J y_{ij}r_j^S(p^S) \end{pmatrix} = R(p)y_i$$

を満たす $y_i\in\boldsymbol{R}^J$ は必ず存在する．したがって任意の $s\in\{1,\cdots,S\}$ について (3.1) が満たされるので市場は p の下で完備である．　///

一般に rank $R(p)\le\min\{S,J\}$ であるので，命題 3.1.3 の条件を満たすには $S\le J$ でなくてはならない．これは少なくとも状態の数と同数の証券が存在するということを意味している．しかしながら状態の数以上の証券が存在したとしても，それは rank $R(p)=S$ である必要条件でしかないので rank $R(p)=S$ であることは保証されない．

一般に命題 3.1.3 の逆は成立しない．例えば，任意の消費者 i についてその消費集合が $X_i=\{e_i\}$ と，自身の初期保有量以外の消費を許容しない場合や，任意の状態 $s\in\{1,\cdots,S\}$ について財価格ベクトルが $p^s=0$ である場合は $R(p)$ のランクに関係なく，市場は完備である．ただし，次のような標準的な仮定の下では逆も成立する．

3.1.4 命題 任意の消費者 $i\in\{1,\cdots,I\}$ について $X_i=\boldsymbol{R}_+^{N(1+S)}$ であり，財価格ベクトルが $p\in\boldsymbol{R}_{++}^{N(1+S)}$ であるとする．この時，価格 p の下で市場が完備ならば rank $R(p)=S$ である．

命題 3.1.4 の証明 任意の状態 $s\in\{1,\cdots,S\}$ について $(1/p_1^s,0,\cdots,0)^\top\in\boldsymbol{R}_+^N$ とおく．$p\in\boldsymbol{R}_{++}^{N(1+S)}$ より $(1/p_1^s,0,\cdots,0)^\top$ は well-defined である．ここで任意の $i\in\{1,\cdots,I\}$ に対し，任意の $s\in\{1,\cdots,S\}$ について以下を定義する．

$$\widehat{x}_i^s:=(1/p_1^s,0,\cdots,0)^\top+e_i^s\in\boldsymbol{R}_+^N$$

この時，価格 p の下での状態 s における $\widehat{x}_i^s$ の超過需要の価値額は $p^s\cdot(\widehat{x}_i^s-e_i^s)=1$ となる．よって任意の $\widehat{s}\in\{1,\cdots,S\}$ について次のような財ベクトル

$$x_i^s(\widehat{s}):=\begin{cases} \widehat{x}_i^s, & \text{if } s=\widehat{s} \\ e_i, & \text{otherwise} \end{cases}$$

を定義し，任意の $x_i^0\in\boldsymbol{R}_+^N$ について $x_i(\widehat{s}):=(x_i^0,x_i^1(\widehat{s}),\cdots,x_i^S(\widehat{s}))^\top$ とすれば，$x_i(\widehat{s})\in X_i=\boldsymbol{R}_+^{N(1+S)}$ である．また

$$\begin{pmatrix} p^1\cdot(x_i^1(\widehat{s})-e_i^1) \\ \vdots \\ p^S\cdot(x_i^S(\widehat{s})-e_i^S) \end{pmatrix} = (0,\cdots,0,\underbrace{1}_{\widehat{s}},0,\cdots,0)^\top =: v_{\widehat{s}}$$

となる．つまり $x_i(\widehat{s})$ の各状態での超過需要の価値額は $\widehat{s}$ 番目の要素のみが 1 で他の要素がすべて 0 である S 次のベクトルで表される．この $v_{\widehat{s}}$ を達成するような $x_i(\widehat{s})$ を全ての $\widehat{s}\in\{1,\cdots,S\}$ で取ることができ，またベクトルの組 $\{v_1,\cdots,v_S\}$ は $\boldsymbol{R}^S$ の標準基底である．更に，p の下での市場の完備性から任意の $\widehat{s}\in\{1,\cdots,S\}$ に対応する配分 $x_i(\widehat{s})$ について，(3.1) を満たすような $y_i\in\boldsymbol{R}^J$ を取ることができるので，$\{v_1,\cdots,v_S\}\subseteq$ Col $R(p)$ である．よって rank $R(p)\ge S$ であるが，一般に rank $R(p)\le S$ なので rank $R(p)=S$ である．　///

命題 3.1.4 の条件を仮定するようなモデルでは，完備性の定義を rank $R(p)=S$ で与えることも多い．

3.2 Arrow-Debreu 均衡

3.2.1 定義 (Arrow-Debreu 均衡 (Arrow-Debreu Equilibrium)) 財価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ と財配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ が次の条件を満たす時，$(p, (x_1^*, \cdots, x_I^*))$ を **Arrow-Debreu 均衡** (以下 ADE) であると言う．

1. 効用最大化
   全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について x_i^* は以下の最大化問題の解である．
$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_i \in X_i} & U_i(x_i) \\ \text{subject to} & p \cdot x_i \leq p \cdot e_i \end{array}$$
2. 需給均衡条件
   $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ は以下を満たす．
$$\sum_{i=1}^I x_i^* = \sum_{i=1}^I e_i$$

ADE では全ての時点，状態の状態依存財の売買が時点 0 において可能であるような経済の均衡として定義される．その意味では非現実的な仮定を置いたモデルであると見なされることもある．しかしながら，最も単純な純粋交換経済と同一のフレームワークを持つために，厚生経済学の基本定理や均衡の存在とその正則性などについては通常の一般均衡理論の結果をそのまま適用できるという利点が存在する．このことから ADE は証券市場の分析におけるベンチマークとして用いられる．

以下の定理 3.2.2 と定理 3.2.3 によって市場の完備性と追加的な仮定の下で ADE と AME は同一視できることが分かる．

3.2.2 定理 ある消費者 i について U_i が強単調であるとし，AME を $(p, q, ((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)))$ とする．価格 p の下で市場が完備ならば，ある $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ が存在して $((p^0, \lambda^1 p^1, \cdots, \lambda^S p^S), (x_1^*, \cdots, x_I^*))$ は ADE である．

定理 3.2.2 の証明 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ が ADE の需給均衡条件を満たすことは AME の需給均衡条件から明らかである．よってある $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ が存在し，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について価格 $(p^0, \lambda^1 p^1, \cdots, \lambda^S p^S)$ の下で x_i^* が ADE の効用最大化問題の解であることを示せばよい．

ある i について U_i が強単調であることより，命題 2.1.2 から裁定取引は存在しない．よってファイナンスの基本定理より状態価格 $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ が存在する．この λ を上記のスポット価格の係数となるベクトルとして用いる．ここで任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について x_i^* が ADE の効用最大化問題の解であることを示すには，以下の 2 条件が成立することを示せば十分である．

1. x_i^* は ADE の予算制約集合に含まれる．
2. ADE の予算制約集合は AME の予算制約集合の部分集合である．

条件 1 が成立するならば，ADE における効用最大化解が達成する効用水準は AME における効用最大化解 x_i^* が達成する効用水準以上であることが言える．条件 2 が成立するならば，ADE における効用最大化解が達成する効用水準は AME における効用最大化解 x_i^* が達成する効用水準以下である．この 2 条件が共に成立するならば AME の効用最大化解と ADE の効用最大化解は一致することが言える．

まず条件 1 について $\widehat{p} := (p^0, \lambda^1 p^1, \cdots, \lambda^S p^S)$ の下で x_i^* が ADE の予算制約を満たすことを確認する．x_i^* が AME の予算制約を満たすことに注意すれば

$$
\begin{aligned}
\widehat{p} \cdot (x_i^* - e_i) &= p^0 \cdot (x_i^{*0} - e_i^0) + \sum_{s=1}^{S} \lambda^s p^s \cdot (x_i^{*s} - e_i^s) \\
&\leq -q \cdot y_i^* + \sum_{s=1}^{S} \lambda^s \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* r_j^s(p^s) = -q \cdot y_i^* + \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* \sum_{s=1}^{S} \lambda^s r_j^s(p^s) \\
&= -q \cdot y_i^* + \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* q_j = 0
\end{aligned}
$$

となるので x_i^* は ADE の予算制約を満たす．よって条件 1 が確かめられた．

次に条件 2 が成立することを示す．任意の ADE の予算制約集合に含まれる x_i について証券市場は価格 p の下で完備であることから，あるポートフォリオ $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し (3.1) を満たす．つまり x_i は時点 1 での AME における予算制約を満たす．次に配分とこのようにして選んだポートフォリオの組 (x_i, y_i) が時点 0 での AME における予算制約を満たすことを示す．x_i は ADE の予算制約を満たすので

$$
\begin{aligned}
p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) &\leq -\sum_{s=1}^{S} \lambda^s p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) = -\sum_{s=1}^{S} \lambda^s \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \quad ((3.1)\text{ より}) \\
&= -\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \sum_{s=1}^{S} \lambda^s r_j^s(p^s) = -\sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_j
\end{aligned}
$$

となるので (x_i, y_i) は時点 0 での AME における予算制約も満たす．したがって ADE の予算制約集合は AME の予算制約集合の部分集合であり，条件 2 が成立することが確かめられた．

以上より x_i^* は価格 $(p^0, \lambda^1 p^1, \cdots, \lambda^S p^S)$ の下での ADE の効用最大化解である．

よって $((p^0, \lambda^1 p^1, \cdots, \lambda^S p^S), (x_1^*, \cdots, x_I^*))$ は ADE であることが示された． ///

定理 3.2.2 から確認できるように，AME における消費財の均衡スポット価格 p に対し，状態価格 λ を掛けると，ADE の均衡状態依存財価格が得られる．注意したいのが任意の状態において，財の物理的な違いに関わらず，均衡スポット価格にその状態に対応した状態価格が掛けられていることである．

3.2.3 定理 $(p, (x_1^*, \cdots, x_I^*))$ を ADE とする．この時，価格 p の下で市場が完備ならば，ある $q \in \boldsymbol{R}^J$ と $(y_1^*, \cdots, y_I^*) \in \boldsymbol{R}^J \times \cdots \times \boldsymbol{R}^J$ が存在し，$(p, q, ((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)))$ は AME である．

定理 3.2.3 の証明 価格 p の下で市場は完備であるので，補題 3.1.2 により，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ についてある $y_i^* \in \boldsymbol{R}^J$ が (3.1) を満たすように存在し，かつ

$$
\sum_{i=1}^{I} y_i^* = 0 \tag{3.2}
$$

を満たす．(3.2) と $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ が ADE における財配分であることから，$((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*))$ は AME における需給均衡条件を満たす．

ここで任意の $j \in \{1, \cdots, J\}$ について

$$q_j := \sum_{s=1}^{S} r_j^s(p^s) \tag{3.3}$$

とする．任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について (x_i^*, y_i^*) が AME の効用最大化問題の解であることを示すには，以下の 2 条件件が成立することを示せば十分である．

1. (x_i^*, y_i^*) が AME の予算制約集合に含まれる．
2. AME の予算制約集合が ADE の予算制約集合の部分集合である．

条件 1 について x_i^* が ADE における財配分であることから

$$\begin{aligned} p^0 \cdot (x_i^{*0} - e_i^0) &\le -\sum_{s=1}^{S} p^s \cdot (x_i^{*s} - e_i^s) = -\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* r_j^s(p^s) \quad ((3.1)\text{ より}) \\ &= -\sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* \sum_{s=1}^{S} r_j^s(p^s) = -\sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* q_j \quad ((3.3)\text{ より}) \end{aligned}$$

となるので時点 0 での AME の予算制約を満たすことが分かる．また式 (3.1) より時点 1 での全ての状態の AME の予算制約もまた満たされるので，(x_i^*, y_i^*) は AME の予算制約を満たす．よって条件 1 が成立することが確かめられた．

条件 2 について任意の AME の予算制約を満たす (x_i, y_i) に対し，

$$\begin{aligned} p \cdot (x_i - e_i) &= p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + \sum_{s=1}^{S} p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) \\ &\le -\sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_j + \sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) = -\sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_j + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} \sum_{s=1}^{S} r_j^s(p^s) \\ &= -\sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_j + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_j = 0 \end{aligned}$$

となるので AME の予算制約集合は ADE の予算制約集合の部分集合である．よって条件 2 が成立することが確かめられた．

以上より任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について (x_i^*, y_i^*) は AME の効用最大化問題の解である．

したがって $(p, q, ((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)))$ は AME である． ///

ある ADE が存在し，その均衡価格の下で市場が完備ならば，定理 3.2.3 により，その ADE の均衡財配分を実現するような AME が存在する．このようにして得られた AME に対して定理 3.2.2 を適用すれば，$\lambda^1 = \cdots = \lambda^S = 1$ が成立する．

定理 3.2.3 について，任意の $j \in \{1, \cdots, J\}, s \in \{1, \cdots, S\}$ について証券ペイオフ $r_j^s(p^s)$ が財価格 p^s について 1 次同次ならば，以下のような一般化した結論を得ることができる．

任意の正のベクトルを $\lambda := (\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ とする．また任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $\widehat{p}^s := (\lambda^s)^{-1} p^s$ と置く．まとめて $\widehat{p} := (p^0, \widehat{p}^1, \cdots, \widehat{p}^S)$ とする．任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，市場の完備性より価格 p について (3.1) を満たすポートフォリオ $y_i^* \in \boldsymbol{R}^J$ が存在する．補題 3.1.2 より $\sum_{i=1}^{I} y_i^* = 0$ としてよい．ここで任意の $j \in \{1, \cdots, J\}$ について以下のように証券価格を定義する．

$$q_j := \sum_{s=1}^{S} \lambda^s r_j^s(\widehat{p}^s)$$

任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について (3.1) とペイオフの 1 次同次性より

$$\lambda^s(\widehat{p}^s \cdot (x_i^{*s} - e_i^s)) = p^s \cdot (x_i^{*s} - e_i^s) = \sum_{j=1}^J y_{ij}^* r_j^s(p^s) = \sum_{j=1}^J y_{ij}^* r_j^s(\lambda^s \widehat{p}^s) = \lambda^s \sum_{j=1}^J y_{ij}^* r_j^s(\widehat{p}^s)$$

が任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について得られる[3]．λ^s で両辺を割れば，(x_i^*, y_i^*) は価格 $(\widehat{p}, q)$ の下での時点 1 での AME の予算制約を満たすことが分かる．また

$$\begin{aligned} p^0 \cdot (x_i^{*0} - e_i^0) &\leq -\sum_{s=1}^S p^s \cdot (x_i^{*s} - e_i^s) = -\sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^J y_{ij}^* r_j^s(p^s) \quad \text{((3.1) より)} \\ &= -\sum_{j=1}^J y_{ij}^* \sum_{s=1}^S r_j^s(\lambda^s \widehat{p}^s) = -\sum_{j=1}^J y_{ij}^* \sum_{s=1}^S \lambda^s r_j^s(\widehat{p}^s) \quad \text{(1 次同次性より)} \\ &= -\sum_{j=1}^J y_{ij}^* q_j \end{aligned}$$

となるので価格 $(\widehat{p}, q)$ の下での時点 0 での予算制約もまた満たす．つまり (x_i^*, y_i^*) は価格 $(\widehat{p}, q)$ の下での AME の予算制約集合に含まれることが言える．

価格 $(\widehat{p}, q)$ の下での AME の予算制約集合に含まれる任意の (x_i, y_i) について，

$$\begin{aligned} p \cdot (x_i - e_i) &= p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + \sum_{s=1}^S p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) = p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + \sum_{s=1}^S \lambda^s \widehat{p}^s \cdot (x_i^s - e_i^s) \\ &\leq \sum_{j=1}^J y_{ij} q_j + \sum_{s=1}^S \lambda^s \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(\widehat{p}^s) = \sum_{j=1}^J y_{ij} q_j + \sum_{j=1}^J y_{ij} \sum_{s=1}^S \lambda^s r_j^s(\widehat{p}^s) = 0 \end{aligned}$$

が得られるので価格 $(\widehat{p}, q)$ の下での AME の予算制約集合は ADE の下での予算制約集合の部分集合である．需給均衡条件については自明なので，$(\widehat{p}, q, ((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)))$ は AME となる．

このAMEから元のADEを得るには，定理3.2.2より，ADEの均衡価格を $(p^0, \lambda^1 \widehat{p}^1, \cdots, \lambda^S \widehat{p}^S)$ とすればよい．つまり $(\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top$ がこの AME における状態価格ベクトルとなる．

[3] この議論は (3.1) を満たす任意の $(x_i, y_i) \in X_i \times \boldsymbol{R}^J$ について行える．よって p の下で市場が完備ならば，$\widehat{p}$ の下でも市場は完備である．

第4章　制約条件つき効率性と実質的完備性

この章では制約条件つき効率性と実質的完備性を定義し，AME における配分がパレート効率的であるための十分条件について調べる．

4.1　制約条件つき効率性

まず，完備市場における AME の配分のパレート効率性について述べる．全ての消費者の効用関数が局所非飽和[1]で，少なくとも 1 人の消費者の効用関数が強単調である時，AME の均衡価格の下で市場が完備ならば定理 3.2.2 より，AME の配分を達成するような ADE が存在する．ADE は標準的な純粋交換経済と同一視できるので，全ての消費者の効用関数が局所非飽和であることから，厚生経済学の第 1 基本定理よりその配分はパレート効率的である[2]．

実は，消費者についての仮定を緩めて全ての消費者の効用関数が局所非飽和であるとした場合にも，その配分はパレート効率的であることが言える．このことを示す前に，以下の補題を示す．

4.1.1 補題 U_i が局所非飽和であり，価格ベクトル (p,q) の下で効用最大化解 (x_i^*, y_i^*) が存在し，rank $R(p)=S$ であるとする．この時，$U_i(x_i) \geq U_i(x_i^*)$ であるような任意の $x_i \in X_i$ について，ポートフォリオベクトル $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ に対し，(x_i, y_i) が時点 1 での予算制約を全て満たすならば，(x_i, y_i) は時点 0 の予算制約について，

$$p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i \geq p^0 \cdot e_i^0 \tag{4.1}$$

を満たす．特に $U_i(x_i) > U_i(x_i^*)$ ならば (4.1) の不等号は必ず厳密な不等号で成立する．

補題 4.1.1 の証明 まず，$U_i(x_i) = U_i(x_i^*)$ のケースを考える．背理法を用いる．補題の条件を満たすようなある (x_i, y_i) が時点 0 での予算制約について

$$p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i < p^0 \cdot e_i^0 \tag{4.2}$$

であるとする．この時，rank $R(p)=S$ より以下を満たすポートフォリオ $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ が必ず存在する．

$$R(p)\eta = \mathbf{1}_S \in \boldsymbol{R}^S$$

ここで $\mathbf{1}_S$ は全ての要素が 1 である S 次の実数ベクトルである．(4.2) と内積の線形性より，ある $\epsilon \in \boldsymbol{R}_{++}$ を

$$q \cdot (\epsilon\eta) < p^0 \cdot e_i^0 - (p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i)$$

[1]全ての $x \in X_i$ について，x を中心とした任意の半径の開球 B を取った時，B と X_i の共通部分に $U_i(\hat{x}) > U_i(x)$ を満たす点 $\hat{x}$ が必ず存在することを言う．強単調ならば局所非飽和であるが，逆は一般に成り立たない．

[2]Mas-Colell, et al.[1995](以後 MWG) の Chapter 16, Proposition 16.C.1 を参照せよ．

であるように取ることができる．すなわち

$$p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot (y_i + \epsilon\eta) < p^0 \cdot e_i^0 \tag{4.3}$$

である．この時，任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，ポートフォリオ $y_i + \epsilon\eta$ のもたらすペイオフは

$$\sum_{j=1}^{J}(y_{ij} + \epsilon\eta_j) r_j^s(p^s) = \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) + \epsilon \sum_{j=1}^{J} \eta_j r_j^s(p^s) = \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) + \epsilon > \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s)$$

である．よって (x_i, y_i) が時点 1 での予算制約を満たすことから

$$p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) < \sum_{j=1}^{J}(y_{ij} + \epsilon\eta_j) r_j^s(p^s) \tag{4.4}$$

が言える．ここで上記の η, ϵ と y_i を固定して以下の集合 C を考える．

$$C := \left\{ \widehat{x}_i \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)} \;\middle|\; \begin{array}{c} p^0 \cdot \widehat{x}_i^0 + q \cdot (y_i + \epsilon\eta) < p^0 \cdot e_i^0, \\ \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } p^s \cdot \widehat{x}_i^s < p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J}(y_{ij} + \epsilon\eta_j) r_j^s(p^s) \end{array} \right\}$$

(4.3) と (4.4) より x_i は C の内点である．つまり x_i を中心とした十分小さい半径の開球 B を $B \subseteq C$ であるように取れる．局所非飽和の仮定より，$\widehat{x}_i \in B \subseteq C, U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i)$ であるような $\widehat{x}_i \in X_i$ を取ることができる．$\widehat{x}_i$ は C に含まれることから予算制約を満たし，かつ $U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i) = U_i(x_i^*)$ をも満たす．これは効用最大化に矛盾する．よって $p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i \geq p^0 \cdot e_i^0$ である．

次に $U_i(x_i) > U_i(x_i^*)$ ならば (x_i^*, y_i^*) が効用最大化解であることから，もし (x_i, y_i) が時点 1 での予算制約を全て満たすならば

$$p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i > p^0 \cdot e_i^0$$

が必ず成立しなければならない．そうでなければ，(x_i, y_i) は全ての予算制約を満たしつつ，かつ x_i^* より厳密に高い効用水準を達成するので (x_i^*, y_i^*) が効用最大化解であることと矛盾する．よって題意は示された．　///

市場の完備性を仮定すれば，時点 1 での予算制約を満たすようなポートフォリオは必ず組める．しかし，補題 4.1.1 により，そのようにして組まれたポートフォリオは時点 0 においては予算制約上の問題があることが言える．特に $U_i(x_i) > U_i(x_i^*)$ であるようなケースは補題 4.1.1 の対偶を考えることで，どのようにポートフォリオを組んだとしても時点 0 の予算制約と時点 1 の予算制約のいずれかが必ず成立しないことが言える．

補題 4.1.1 を用いることで，以下の命題が示される．

4.1.2 命題 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について U_i が局所非飽和であるとする．
また $(p, q, ((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)))$ を AME とする．この時，$\mathrm{rank}\, R(p) = S$ ならば，$(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ はパレート効率的である．

命題 4.1.2 の証明 資源制約を満たす配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ が $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ をパレート改善すると仮定する．価格 p の下での市場の完備性と補題 3.1.2 から，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ についてある $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ を，任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，(3.1) を満たし，かつ

$$\sum_{i=1}^{I} y_i = 0 \tag{4.5}$$

であるように取れる．

$(x_1, \cdots, x_I)$ は効用最大化解である $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ をパレート改善し，かつ任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ と $s \in \{1, \cdots, S\}$ について (3.1) が満たされるので，U_i の局所非飽和性と価格 p の下での市場の完備性により，補題 4.1.1 から，

$$p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_j \geq 0 \tag{4.6}$$

が任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について成立し，少なくとも一つの $i \in \{1, \cdots, I\}$ について (4.6) は厳密な不等号で成立する．全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ にわたって (4.6) を足しあげると，

$$\begin{aligned} 0 \;&<\; \sum_{i=1}^{I} \left(p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_j \right) = p^0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} (x_i^0 - e_i^0) \right) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_j \\ &=\; p^0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} (x_i^0 - e_i^0) \right) + \sum_{j=1}^{J} q_j \sum_{i=1}^{I} y_{ij} = 0 \quad \text{((4.5) と配分 } (x_1, \cdots, x_I) \text{ の資源制約より)} \end{aligned}$$

となり矛盾．よって $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ はパレート効率的である．　///

命題 4.1.2 の証明は厚生経済学の第一基本定理の証明とほとんど同じである．つまり，均衡配分をパレート改善するような配分を選ぶと，その配分が決して実行可能ではないという論法を使っている．異なるのは時点 0 の予算制約を使ったところである．標準的な純粋交換経済の場合は，各消費者の予算制約が一つの式で表現されるので，それらを足し合わせればただちに矛盾を導くことができる．しかしながら，証券市場分析におけるモデルでは予算制約が $1 + S$ 本の式で表現されることから，矛盾を導く制約を適切に選ぶ必要がある．補題 3.1.2 を使えばポートフォリオを資源制約を満たすように ($\sum_{i=1}^{I} y_i = 0$) 選ぶことができるので時点 0 において全ての消費者について予算制約式を足しあげて矛盾を導くことができる．

しかしながら，よりスマートな方法で命題 4.1.2 を示すことも可能である．局所非飽和の仮定下においても修正を行えば，命題 2.1.2 とファイナンスの基本定理と類似した命題が成立し，AME の均衡価格の下で状態価格が存在することが示せる[3]．そうすれば定理 3.2.2 の結果を使うことができるので，標準的な純粋交換経済の一般均衡モデルにおけるパレート効率性の議論が使える．詳細は付録 A.1.2 を見てほしい．

これまでの議論では市場の完備性を前提としていたが，ここからは市場が完備でない場合の議論の準備を始める．まず，制約条件つき効率性を定義するために任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ と $p \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ に対し以下のような集合を定める．

$$V_i(p) := \left\{ x \in X_i \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{ある } y_i \in \boldsymbol{R}^J \text{が存在し，任意の } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) = \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \text{ が成立する} \end{array} \right\} \tag{4.7}$$

$V_i(p)$ は財価格ベクトル p の下で消費者 i が証券の取引を通じて実現可能な状態依存財の消費ベクトル全体の集合である．したがって，財価格ベクトル p の下で市場が完備であることと，全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $V_i(p) = X_i$ が成立することは同値である．次に以下のような直積集合を定義する．

$$V(p) := V_1(p) \times \cdots \times V_I(p) = \prod_{i=1}^{I} V_i(p) \tag{4.8}$$

[3]ただし市場の完備性の仮定が必要になる．

$V(p)$ は財価格ベクトル p の下で全ての消費者の，証券の取引を通じて実現可能な状態依存財の消費ベクトルの組全てからなる集合である．ここで資源制約を満たし，$V(p)$ に属する配分が**制約条件つき効率性** (constrained efficiency) を満たすとは，その配分が $V(p)$ に属する資源制約を満足したいかなる配分によってもパレート改善されない時を言う．補題 3.1.2 の方法を用いれば，$V(p)$ に所属する配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ が資源制約さえ満足すれば，全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) = \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s)$ と $\sum_{i=1}^I y_i = 0$ を満たすようなポートフォリオベクトル $(y_1, \cdots, y_I)$ の存在が確認できる．一般に，完備性の仮定がなければ AME はパレート効率的であるとは限らないが，次の命題が示すように比較する配分を $V(p)$ 上に限定すれば，必ずパレート効率的である．

4.1.3 命題 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $V(p)$ 上で U_i が時点 0 の消費について局所非飽和ならば，AME における財配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ は制約条件つき効率性を満たす．

命題 4.1.3 の証明 付録の命題 A.1.6 を用いれば，命題 4.1.2 の証明で用いた論法により証明できるので略．　///

$V(p)$ は財価格 p に依存するので，ある配分が制約条件つき効率的か否かも p に依存する．しかし，資源が効率的に分配されているかどうかは，財価格がいくらであるかに関わらず評価されるべき性質なので，価格に依存せず $V(p)$ が定まる方が望ましい．次で示されるように $N = 1$ かつ証券のペイオフが p について 1 次同次ならば $V(p)$ は p に依存しない．

4.1.4 例 (1 財の場合) $N = 1$ とし，任意の証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ は任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ で，財価格ベクトル p^s について 1 次同次なペイオフを与えるとするものとする．この時，$x_i \in V_i(p)$ に対し，ある $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ が存在して，全ての $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$p^s(x_i^s - e_i^s) = \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s) = p^s \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(1)$$

となるので $p^s = 1$ としても一般性は失われず，上の等式は $x_i^s - e_i^s = \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(1)$ と同値である．つまり $V_i(p)$ は p に依存せず，結果 $V(p)$ も p に依存しない．したがってこの場合には制約条件付き効率性を満たす配分は内生変数 p によらずに決まる．

4.2　実質的に完備な市場の例 (期待効用関数の場合)

任意のパレート効率的でない配分について，その配分をパレート改善するパレート効率的な配分が必ず存在すれば，命題 4.1.2 の条件は，全てのパレート効率的な配分に対し，条件式 (3.1) が成立するという条件に置き換えてもよい．したがって以下のような定義が有用になる．

4.2.1 定義 (実質的に完備 (effectively complete)) 任意の財価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ に対し，任意のパレート効率的な配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ について $(x_1, \cdots, x_I) \in V(p)$ が成立するならば，市場は価格 p の下で**実質的に完備**[4]であるという．

[4] Stephen LeRoy and Jan Werner. (2000) “Priciple of Financial Economics” Chapter 16, Section 3 を参照せよ．

4.2.2 注意 標準的な仮定を課せば，完備性の仮定の下で AME の均衡財配分と ADE の均衡財配分は同一であった．この完備性の仮定を実質的完備性に置き換えた場合，もはや両者が一致するとは一般には言えなくなる．そのような例が LeRoy and Werner[2000] の Example16.4.4 にある．

以降のこの節では次の仮定を置く．

4.2.3 仮定

1. 全ての消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ の効用関数は，関数 $u_i^0 : \boldsymbol{R}_+^N \to \boldsymbol{R}$ と強凹関数 $u_i : \boldsymbol{R}_+^N \to \boldsymbol{R}$ を用いて
$$U_i(x_i) = u_i^0(x_i^0) + \delta_i \sum_{s=1}^{S} \pi_i^s u_i(x_i^s)$$
と表せるとする．ただし $\delta_i > 0$ であり，$\pi_i := (\pi_i^1, \cdots, \pi_i^S)^\top \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ は $\sum_{s=1}^S \pi_i^s = 1$ を満たす．
2. 全ての消費者は同質的な主観的確率的信念を持つとする．つまり $\pi_1 = \cdots = \pi_I$ であるとする．
3. 全ての証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ は実物資産である．つまり任意の証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ を考えた時，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，ある財ベクトル $a_j^s \in \boldsymbol{R}^N$ が存在し，任意のスポット価格 $p^s \in \boldsymbol{R}^N$ に対して $r_j^s(p^s) = p^s \cdot a_j^s$ が成立する．

この仮定の下で次の補題から総初期保有量にリスクがない，つまり時点 1 における全ての状態で総初期保有量が共通であるならば，配分がパレート効率的であるか否かは配分のリスクの有無という問題に帰着できることが分かる．

4.2.4 補題 $\sum_{i=1}^I e_i^1 = \cdots = \sum_{i=1}^I e_i^S$(no aggregate risk) ならば任意のパレート効率的配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ において，全ての消費者の消費量は決定的 (deterministic) である．すなわち，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について
$$x_i^{*1} = \cdots = x_i^{*S}$$
が成立する．

補題 4.2.4 の証明 パレート効率的配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ が少なくとも一人以上の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ について deterministic でないと仮定する．deterministic でない配分を持つ消費者の添え字の集合を ND，deterministic な配分を持つ消費者の添え字の集合を D とする．ここで任意の $i \in ND$ について，$x_i^{*0} = x_i^0, x_i^{*1} = \cdots = x_i^{*S} = \sum_{i=1}^S \pi_i^s x_i^s =: \overline{x}_i$ とし，任意の $i \in D$ について $x_i^* := x_i$ とした配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ を考える．この時，任意の $i \in ND$ について x_i は deterministic ではないので u_i の強凹性から Jensen の不等式より
$$\sum_{s=1}^{S} \pi_i^s u_i(x_i^s) < u_i\left(\sum_{s=1}^{S} \pi_i^s x_i^s\right) = u_i(\overline{x}_i)$$
が成立する．よって任意の $i \in ND$ について x_i^* は x_i より厳密に大きい効用水準を達成することが言える．さらに no aggregate risk の仮定より $e := \sum_{i=1}^I e_i^1 = \cdots = \sum_{i=1}^I e_i^S$ とおける．ま

た任意の $\hat{s} \in \{1, \cdots, S\}$ に対し，主観的確率的信念の同質性を考えれば $\pi := \pi_1 = \cdots = \pi_I$ であるので

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{I} x_i^{*\hat{s}} &= \sum_{i \in D} x_i^{\hat{s}} + \sum_{i \in ND} \sum_{s=1}^{S} \pi_i^s x_i^s = \sum_{i \in D} x_i^{\hat{s}} + \sum_{i \in ND} \sum_{s=1}^{S} \pi^s x_i^s = \sum_{s=1}^{S} \pi^s \sum_{i \in D} x_i^s + \sum_{s=1}^{S} \pi^s \sum_{i \in ND} x_i^s \\ &= \sum_{s=1}^{S} \pi^s \sum_{i=1}^{I} x_i^s = \sum_{s=1}^{S} \pi^s \sum_{i=1}^{I} e_i^s = \sum_{s=1}^{S} \pi^s e = e = \sum_{i=1}^{I} e_i^{\hat{s}}\end{aligned}$$

となり，資源制約を満たす．$(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ は $(x_1, \cdots, x_I)$ をパレート改善し，全ての消費者について deterministic な配分であるので，$(x_1, \cdots, x_I)$ のパレート効率性と矛盾する．したがって全てのパレート効率的配分は任意の消費者について deterministic な配分でなくてはならない．
///

以下の分析において次の行列を考えることが有用である．任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$A^s := (a_1^s, \cdots, a_J^s) \in \boldsymbol{R}^{N \times J}$$

とする．この行列 A^s を用いれば，証券ポートフォリオが $y \in \boldsymbol{R}^J$ であった時，時点1の状態 s においてこのポートフォリオから得られる資金の総額は

$$\sum_{j=1}^{J} y_j r_j^s(p^s) = \sum_{j=1}^{J} y_j (p^s \cdot a_j^s) = p^s \cdot \left(\sum_{j=1}^{J} y_j a_j^s \right) = p^s \cdot (A^s y)$$

と表すことができる．

no aggregate risk の場合に，deterministic な配分，つまりパレート効率的な配分を達成するには少なくともどれだけの証券が必要かは次の定理によって示される．

4.2.5 定理 $\sum_{i=1}^{I} e_i^1 = \cdots = \sum_{i=1}^{I} e_i^S$(no aggregate risk) であるとする．ここで任意の $n \in \{1, \cdots, N\}$ について，ある $z_n := (z_{n1}, \cdots, z_{nJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^{J} z_{nj} a_j^s = \mathbf{1}_{N,n} := (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \cdots, 0)^\top$$

であるとする．$\mathbf{1}_{N,n}$ は n 行目の要素が1でほかの要素がすべて0であるような N 次の実数ベクトルである．また，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，ある $w_i := (w_{i1}, \cdots, w_{iJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^{J} w_{ij} a_j^s = e_i^s$$

であるとする．この時，AME の財配分はパレート効率的である．

定理 4.2.5 の証明 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，以下のような集合を考える．

$$\begin{aligned}K_i &:= \left\{ x \in X_i \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{ある } y_i \in \boldsymbol{R}^J \text{が存在し，任意の } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ x_i^s - e_i^s = \sum_{j=1}^{J} y_{ij} a_j^s \text{が成立する} \end{array} \right\} \\ K &:= K_1 \times \cdots \times K_I = \prod_{i=1}^{I} K_i\end{aligned}$$

この時，任意の財価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ に対し，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $K_i \subseteq V_i(p)$, $K \subseteq V(p)$ であることは明らかである．

更に次のような行列を考える．

$$Z := (z_1, \cdots, z_N) \in \boldsymbol{R}^{J \times N}$$

この行列 Z に対し，任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，仮定より $A^s Z = (A^s z_1, \cdots, A^s z_N) = (\mathbf{1}_{N,1}, \cdots, \mathbf{1}_{N,N}) = \mathbf{I}_N \in \boldsymbol{R}^{N \times N}$ である．$\mathbf{I}_N$ は N 次の単位行列である．また任意の $s \in \{1, \cdots, S\}, i \in \{1, \cdots, I\}$ について，仮定より $A^s w_i = e_i^s$ である．

ここで任意のパレート効率的配分を $(x_1, \cdots, x_I)$ とする．no aggregate risk の仮定により配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ は補題 4.2.4 から deterministic である．ここで任意の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ についてポートフォリオを

$$y_i := Z x_i^1 - w_i$$

とおく．すると任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，

$$\sum_{j=1}^{J} y_{ij} a_j^s = A^s y_i = A^s (Z x_i^1 - w_i) = \mathbf{I}_N x_i^1 - e_i^s = x_i^s - e_i^s$$

となる．最後の等式は配分が deterministic であることによる．よって任意の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $x_i \in K_i$ である．つまり，任意のパレート効率的配分全体からなる集合は，集合 K に含まれるので，任意の価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ に対し，任意のパレート効率的配分は，$V(p)$ にも含まれる．つまり市場は実質的に完備である．よって，命題 4.1.3 から AME の財配分はパレート効率的である． ///

定理 4.2.5 における z_n, w_i がどのような意味を持つかを考えよう．z_n は任意の状態で第 n 財を必ず 1 単位提供することを約束するポートフォリオである．つまりポートフォリオ組成にかかる費用を無視すれば，消費者は任意の財を全ての状態において望むだけの共通の量で得ることが可能になる．そのような意味では商品先物取引 (future contract) のような証券であると言える．

また，w_i について，$\sum_{i=1}^{I} \theta_i = 1$ であるようなベクトル $\theta := (\theta_1, \cdots, \theta_I) \in \boldsymbol{R}^I$ を考えた時に，全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について

$$\widehat{w}_i := \theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} w_h \right) - w_i$$

と新しいポートフォリオを考えると，このポートフォリオが状態 s で提供する財の量は

$$A^s \widehat{w}_i = A^s \left(\theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} w_h \right) - w_i \right) = \theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} A^s w_h \right) - A^s w_i = \theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} e_h^s \right) - e_i^s$$

となる．すなわち，このポートフォリオを用いれば自らの初期保有量を差し出す代わりに，総初期保有量を θ_i の割合で得られる．このようにして各消費者の直面しているリスクを社会全体で平均化している．つまり投資信託 (mutual fund) のような証券を作ることができる．ポートフォリオ $w_i, i = 1, \cdots, I$ は，和を取ることで，総初期保有量を複製できることが重要なポイントになる．そして $-w_i$ というポートフォリオを組成すれば，時点 1 での価格の不確実性から起因する初期保有量から受ける価格変動リスクを完全にヘッジ，つまり帳消しにすることができる．また

$$\sum_{i=1}^{I} \widehat{w}_i = 0$$

であるので，ポートフォリオ $\widehat{w}_i$ は資源制約を満たすことが分かる．

定理 4.2.5 の結果から no aggregate risk であれば，$N+I<S$ であろうとも，$N+I$ 個の証券でパレート効率的な AME を達成することがありうることが分かる．さらに no aggregate risk で $N=1$ の場合は $1+I$ ではなく I 個の証券でパレート効率的な AME を達成できることもあることが次の系により示される．

4.2.6 系 $N=1$ で $\sum_{i=1}^I e_i^1 = \cdots = \sum_{i=1}^I e_i^S$(no aggregate risk) であるとする．この時，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，ある $w_i := (w_{i1}, \cdots, w_{iJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^J w_{ij} a_j^s = e_i^s$$

かつ $\sum_{i=1}^I e_i^s \neq 0$ であるならば，AME の財配分はパレート効率的である．

系 4.2.6 の証明

$$\widetilde{z} := (\widetilde{z}_1, \cdots, \widetilde{z}_J)^\top = \sum_{i=1}^I w_i \in \boldsymbol{R}^J$$

とする．この時，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^J \widetilde{z}_j a_j^s = A^s \widetilde{z} = A^s \left(\sum_{i=1}^I w_i \right) = \sum_{i=1}^I A^s w_i = \sum_{i=1}^I e_i^s$$

となる．no aggregate risk かつ $N=1$ であることより

$$z := (z_1, \cdots, z_J)^\top = \frac{1}{\sum_{i=1}^I e_i^1} \widetilde{z}$$

とすれば $\sum_{j=1}^J z_j a_j^s = 1$ である．よって定理 4.2.5 の条件が満たされたので，AME の財配分はパレート効率的である． ///

系 4.2.6 より $N=1$ ならば I 種類の証券があれば実質的に完備でありうることが分かる．更に，系 4.2.6 の結果は以下の形で複数財 $(N>1)$ の場合に拡張できる．

4.2.7 系 $N>1$ で $\sum_{i=1}^I e_i^1 = \cdots = \sum_{i=1}^I e_i^S$(no aggregate risk) であるとする．ここで，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，ある $w_i := (w_{i1}, \cdots, w_{iJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^J w_{ij} a_j^s = e_i^s$$

を満たすとする．また，あるただ一つの物理的財 $m \in \{1, \cdots, N\}$ を除いた，全ての物理的財 $n \in \{1, \cdots, N\} \setminus \{m\}$ に対し，ある $z_n := (z_{n1}, \cdots, z_{nJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^J z_{nj} a_j^s = \mathbf{1}_{N,n} := (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \cdots, 0)^\top$$

を満たすとする．この時，$\sum_{i=1}^I e_{im}^s \neq 0$ であるならば，AME の財配分はパレート効率的である．

系 4.2.7 の証明 行列 Z_{-m} とベクトル e_{-m} を以下のように定める．

$$\begin{aligned} Z_{-m} &:= (z_1, \cdots, z_{m-1}, z_{m+1}, \cdots, z_N) \in \boldsymbol{R}^{J\times(N-1)} \\ e_{-m} &:= \left(\sum_{i=1}^{I} e_{i1}^1, \cdots, \sum_{i=1}^{I} e_{i,m-1}^1, \sum_{i=1}^{I} e_{i,m+1}^1, \cdots, \sum_{i=1}^{I} e_{iN}^1 \right)^\top \in \boldsymbol{R}^{N-1} \end{aligned}$$

すると任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\begin{aligned} A^s Z_{-m} e_{-m} &= (A^s z_1, \cdots, A^s z_{m-1}, A^s z_{m+1}, \cdots, A^s z_N) e_{-m} \\ &= (\mathbf{1}_{N,1}, \cdots, \mathbf{1}_{N,m-1}, \mathbf{1}_{N,m+1}, \cdots \mathbf{1}_{N,N}) e_{-m} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{I} e_{i1}^1 \right) \mathbf{1}_{N,1} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{I} e_{i,m-1}^1 \right) \mathbf{1}_{N,m-1} \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{I} e_{i,m+1}^1 \right) \mathbf{1}_{N,m+1} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{I} e_{iN}^1 \right) \mathbf{1}_{N,N} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{I} e_{i1}^1, \cdots, \sum_{i=1}^{I} e_{i,m-1}^1, 0, \sum_{i=1}^{I} e_{i,m+1}^1, \cdots, \sum_{i=1}^{I} e_{iN}^1 \right)^\top \in \boldsymbol{R}^N \end{aligned}$$

である．よって，

$$\widetilde{z}_m := (\widetilde{z}_{m1}, \cdots, \widetilde{z}_{mJ})^\top = \sum_{i=1}^{I} w_i - Z_{-m} e_{-m} \in \boldsymbol{R}^J$$

として，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，no aggregate risk であることに注意すれば，

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{J} \widetilde{z}_{mj} a_j^s &= A^s \left(\sum_{i=1}^{I} w_i \right) - A^s Z_{-m} e_{-m} = \sum_{i=1}^{I} A^s w_i - A^s Z_{-m} e_{-m} \\ &= \sum_{i=1}^{I} e_i^s - A^s Z_{-m} e_{-m} = \sum_{i=1}^{I} e_i^1 - A^s Z_{-m} e_{-m} \\ &= (0, \cdots, 0, \sum_{i=1}^{I} e_{im}^1, 0, \cdots, 0)^\top \in \boldsymbol{R}^N \end{aligned}$$

である．したがって，

$$z_m := (z_{m1}, \cdots, z_{mJ})^\top = \frac{1}{\sum_{i=1}^{I} e_{im}^1} \widetilde{z}_m$$

とすれば $\sum_{j=1}^{J} z_{mj} a_j^s = \mathbf{1}_{N,m}$ である．よって定理 4.2.5 の条件が満たされたので，AME の財配分はパレート効率的である． ///

練習問題 4.2.1 $N > 1$ で $\sum_{i=1}^{I} e_i^1 = \cdots = \sum_{i=1}^{I} e_i^S$(no aggregate risk) であるとする．ここで，あるただ 1 人の消費者 $h \in \{1, \cdots, I\}$ を除いた，任意の $i \in \{1, \cdots, I\} \setminus \{h\}$ について，ある $w_i := (w_{i1}, \cdots, w_{iJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^{J} w_{ij} a_j^s = e_i^s$$

を満たすとする．また，任意の $n \in \{1, \cdots, N\}$ に対し，ある $z_n := (z_{n1}, \cdots, z_{nJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^{J} z_{nj} a_j^s = \mathbf{1}_{N,n} := (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \cdots, 0)^\top$$

を満たすとする．この時，AME の財配分はパレート効率的であることを示せ．

4.2.8 系 (サンスポット (sunspot)) 任意の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $e_i^1 = \cdots = e_i^S$ であり，任意の $n \in \{1, \cdots, N\}$ について，ある $z_n := (z_{n1}, \cdots, z_{nJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^{J} z_{nj} a_j^s = \mathbf{1}_{N,n} := (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \cdots, 0)^\top$$

であるならば，AME の財配分はパレート効率的である[5]．

系 4.2.8 の証明 $Z := (z_1, \cdots, z_N) \in \boldsymbol{R}^{J \times N}$ とおき，全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $w_i := Ze_i^1$ とすると，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，

$$\sum_{j=1}^{J} w_{ij} a_j^s = A^s w_i = A^s Z e_i^1 = e_i^1 = e_i^s$$

となる．仮定より，当然 no aggregate risk であるので，定理 4.2.5 より，AME の財配分はパレート効率的である． ///

この結果から，すべての消費者の各状態における初期保有量が同じであれば，先物取引だけで価格変動のリスクをヘッジできることがわかる．

一般に，全ての状態での総初期保有量が同じで，かつ消費者の同質的な主観的確率も全ての状態で等しいような場合でも，各状態で消費量が異なるような均衡がありうる．このような均衡を sunspot 均衡といい，どのような条件の下で sunspot 均衡を排除できるかということが問題になる．系 4.2.8 で得られる均衡はパレート効率的なので，補題 4.2.4 より全ての状態の消費は必ず等しい．このような均衡のことを sunspot-free な均衡という．

これまでの結果は総初期保有量にリスクがない，つまり任意の状態間で総初期保有量が等しいという仮定の下得られたものだったが，状態間で総初期保有量が異なっている場合でも，すべての消費者 i の効用関数がある仮定を満たせば，証券市場均衡における消費者 i の総初期保有量に対するシェア θ_i は一定であることがわかる．

4.2.9 補題 $N = 1$ とする．任意の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ について u_i^0 が擬凹関数[6](quasi-concave function) であり，u_i が相対的リスク回避度一定型 (CRRA) 関数であるとする．つまり相対的リスク回避度を表す定数 $\gamma_i \in \boldsymbol{R}_{++}$ について，

$$u_i(z) = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\gamma_i} - 1}{1 - \gamma_i}, & \text{if } \gamma_i \neq 1 \\ \log z, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.9}$$

[5]サンスポット均衡に関しては Cass,D and Shell,K[1983]，Kajii,A and Gotardi,P[1999]，Mas-Colell,A[1992] を参照せよ．

[6]または準凹関数とも呼ばれる．

であるとする．ここで相対的リスク回避度が全ての消費者で共通，つまり $\gamma_1 = \cdots = \gamma_I$ であるならば，$(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ をパレート効率的な財配分とした時，ある $\sum_{i=1}^I \theta_i = 1$ を満たす $\theta_i \in \boldsymbol{R}_+$ が存在し，任意の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ のパレート効率的配分 x_i^* は任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ において

$$x_i^{*s} = \theta_i \left(\sum_{h=1}^I e_h^s \right)$$

を満たす.

補題 4.2.9 の証明 全ての消費者について効用関数が擬凹関数なので，任意のパレート効率的配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ は対応するある $(\mu_1, \cdots, \mu_I) \in \boldsymbol{R}_+^I$ で定義される次の最大化問題の解として特徴づけられる[7].

$$\begin{aligned} \max_{(x_1,\cdots,x_I)\in X_1\times\cdots\times X_I} \quad & \sum_{i=1}^I \mu_i U_i(x_i) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^I x_i = \sum_{i=1}^I e_i \end{aligned} \tag{4.10}$$

全ての消費者が同質的な主観的確率的信念を持つこと，つまり $\pi_1 = \cdots = \pi_I =: \pi$ であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \mu_i U_i(x_i) &= \sum_{i=1}^I \mu_i \left(u_i^0(x_i^0) + \delta_i \sum_{s=1}^S \pi_i^s u_i(x_i^s) \right) = \sum_{i=1}^I \mu_i u_i^0(x_i^0) + \sum_{i=1}^I \mu_i \delta_i \sum_{s=1}^S \pi_i^s u_i(x_i^s) \\ &= \sum_{i=1}^I \mu_i u_i^0(x_i^0) + \sum_{i=1}^I \mu_i \delta_i \sum_{s=1}^S \pi^s u_i(x_i^s) = \sum_{i=1}^I \mu_i u_i^0(x_i^0) + \sum_{s=1}^S \pi^s \sum_{i=1}^I \mu_i \delta_i u_i(x_i^s) \end{aligned}$$

とできるので最適化問題 (4.10) は以下の 2 つの問題に分割して考えることができる．

$$\max_{(x_1^0,\cdots,x_I^0)\in\boldsymbol{R}_+^N\times\cdots\times\boldsymbol{R}_+^N} \sum_{i=1}^I \mu_i u_i^0(x_i^0) \quad \text{subject to} \ \sum_{i=1}^I x_i^0 = \sum_{i=1}^I e_i^0 \tag{4.11}$$

$$\max_{(z_1,\cdots,z_I)\in\boldsymbol{R}_{++}^N\times\cdots\times\boldsymbol{R}_{++}^N} \sum_{i=1}^I \mu_i \delta_i u_i(z_i) \quad \text{subject to} \ \sum_{i=1}^I z_i = z \tag{4.12}$$

ここで z は任意の正の実数である．問題 (4.11) の解は $(x_1^{*0}, \cdots, x_I^{*0})$ であり，問題 (4.12) の解を関数 f_i を用いて $(f_1(z), \cdots, f_I(z))$ と表すこととする．この時，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $(x_i^{*0}, f_i(\sum_{h=1}^I e_h^1), \cdots, f_i(\sum_{h=1}^I e_h^S))$ とすれば x_i^* と一致する．問題 (4.12) は操作変数が取る領域を凸集合とした線形不等式制約を持つ凹単調増加関数の最適化問題なので 1 階条件が最適解の必要十分条件となる．1 階条件は

$$\mu_i \delta_i u_i'(z_i) - \lambda = 0, \ i \in \{1, \cdots, I\} \tag{4.13}$$

$$\sum_{i=1}^I z_i = z \tag{4.14}$$

[7] MWG の Chapter 16, Proposition 16.E.2 を参照せよ．分離定理を用いるので，効用可能性集合の凸性を保つために，効用関数の擬凹性が必要になる．

である．$\lambda \in \boldsymbol{R}_{++}$ はラグランジュ乗数である．ここで相対的リスク回避度の同質性から $\gamma_1 = \cdots = \gamma_I =: \gamma$ と置ける．(4.13) を z_i について解けば，各 $i \in \{1, \cdots, I\}$ について

$$z_i = \left(\frac{\lambda}{\mu_i \delta_i}\right)^{-1/\gamma_i} = \left(\frac{\lambda}{\mu_i \delta_i}\right)^{-1/\gamma} = (\mu_i \delta_i)^{1/\gamma} \lambda^{-1/\gamma} \tag{4.15}$$

が得られる．(4.15) を (4.14) に代入して $\lambda^{-1/\gamma}$ について解くと $\lambda^{-1/\gamma} = z/(\sum_{i=1}^{I} (\mu_i \delta_i)^{1/\gamma})$ が得られる．さらにこの $\lambda^{-1/\gamma}$ を (4.15) に代入すると，各 $i \in \{1, \cdots, I\}$ について

$$z_i = (\mu_i \delta_i)^{1/\gamma} \frac{z}{\sum_{i=1}^{I} (\mu_i \delta_i)^{1/\gamma}} = \left(\frac{(\mu_i \delta_i)^{1/\gamma}}{\sum_{h=1}^{I} (\mu_h \delta_h)^{1/\gamma}}\right) z$$

となる．よって全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について

$$\theta_i := \frac{(\mu_i \delta_i)^{1/\gamma}}{\sum_{h=1}^{I} (\mu_h \delta_h)^{1/\gamma}} \in \boldsymbol{R}_+$$

とおけば

$$f_i(z) = \theta_i z$$

となり，かつ $\sum_{i=1}^{I} \theta_i = 1$ なので題意は示された． ///

この結果のように，異なる 2 つの状態間で総初期保有量が等しければ，任意のパレート効率的配分もその 2 つの状態間で等しくなることを mutuality principle と呼ぶ．

4.2.10 定理 (Mutual Fund Theorem) $N = 1$ とし，任意の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ について u_i^0 が擬凹関数であり u_i が (4.9) のように定義されているとする．また全ての消費者の相対的リスク回避度は同質的であるとする．つまり (4.9) における γ_i が

$$\gamma := \gamma_1 = \cdots = \gamma_I$$

であるとする．この時，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ に対し，全ての状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ において，

$$\sum_{j=1}^{J} w_{ij} a_j^s = e_i^s$$

を満たすような $w_i := (w_{i1}, \cdots, w_{iJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在するのならば，AME の財配分はパレート効率的である．

定理 4.2.10 の証明 任意のパレート効率的配分を $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ とする．補題 4.2.9 より，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，$\sum_{i=1}^{I} \theta_i = 1$ を満たすある $\theta_i \in \boldsymbol{R}_+$ が存在し，全ての状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ において，

$$x_i^{*s} = \theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} e_h^s\right)$$

が成立する．ここで，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，

$$y_i^* := \theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} w_h\right) - w_i \in \boldsymbol{R}^J$$

と置くと，任意の価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}^{1+S}$ に対し，任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J} y_{ij}^{*} r_j^s(p^s) &= p^s \cdot (A^s y_i^*) = p^s \cdot \left(A^s \left(\theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} w_h \right) - w_i \right) \right) \\ &= p^s \cdot \left(\theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} A^s w_h \right) - A^s w_i \right) = p^s \cdot \left(\theta_i \left(\sum_{h=1}^{I} e_h^s \right) - e_i^s \right) \\ &= p^s \cdot (x_i^{*s} - e_i^s)\end{aligned}$$

である．つまり $x_i^* \in V_i(p)$ なので市場は任意の価格ベクトルの下で実質的に完備である．よって，命題 4.1.3 より AME の財配分はパレート効率的である． ///

定理 4.2.10 における y_i^* は先ほど述べた投資信託である．各個人が持つ初期保有量を一度集めて，それを θ_i というウェイトで再分配している．つまりリスクの再分配が行われている．このようなポートフォリオ w_i が存在すれば AME はパレート効率的となることを定理 4.2.10 は述べているが，I 個の証券だけで実質的な完備性が備われ得ることを示している．つまり証券の数が状態数より少なくとも効率性が保たれることがある．

4.3 実質的に完備な市場の例 (平均・分散型効用関数の場合)

この節では以下の仮定をおく．

4.3.1 仮定

1. 物理的な財の数は 1 つ，つまり $N = 1$ である．

2. 任意の消費者 i の効用関数は時点 0 の消費量と時点 1 の消費の平均と分散にのみ依存する．つまり，任意の消費者 i の効用関数に対して，ある関数 $u_i : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ が存在して
$$U_i(x_i) = u_i(x_i^0, E(x_i), V(x_i))$$
が成立する．ここで，$E(x_i) := \sum_{s=1}^{S} \pi_i^s x_i^s, V(x_i) := \sum_{s=1}^{S} \pi_i^s (x_i^s - E(x_i))^2$ である[8]．任意の i について u_i は時点 0 の消費と時点 1 の消費の平均 $E(x_i)$ に関して厳密に増加するが，時点 1 の消費の分散 $V(x_i)$ に関して厳密に減少する．さらに関数 u_i は時点 0 での消費 x_i^0 と時点 1 での消費の平均については強擬凹関数であるとする．また，$\pi_i := (\pi_i^1, \ldots, \pi_i^S) \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ は $\sum_{s=1}^{S} \pi_i^s = 1$ を満たす．

3. 全ての消費者は同質的な主観的確率信念を持つ，つまり $\pi := \pi_1 = \cdots = \pi_I$ である．

4. 全ての証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ は実物資産である．つまり任意の証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ を考えた時，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，ある財ベクトル $a_j^s \in \boldsymbol{R}^N$ が存在し，任意のスポット価格 $p^s \in \boldsymbol{R}^N$ に対して $r_j^s(p^s) = p^s \cdot a_j^s$ が成立する．

[8]全ての時点での消費を表すベクトル x_i に，期待値や分散オペレーターを適用するような書き方 $(E(x_i), V(x_i))$ をしているが，期待値や分散オペレーターの引数となるのは 1 時点での消費のみで，0 時点での消費は無関係である．混同するおそれはほとんどないと思われるので，今後もこの記法を行う．

このような仮定を置いた時，任意の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ の効用関数 U_i は財ベクトル $x_i \in \boldsymbol{R}^{1+S}$ について強擬凹関数である．ここで標準偏差を $SD(x_i) := \sqrt{V(x_i)}$ として定義すると，$V(x_i) = (SD(x_i))^2$ である．関数 $f(x) = x^2$ は $\boldsymbol{R}_+$ の範囲で狭義単調増加関数であるので，任意の $x, y \in \boldsymbol{R}^S$，$t \in [0,1]$ について，標準偏差 SD が強凸関数であることに注意すれば，

$$V(tx + (1-t)y) = (SD(tx + (1-t)y))^2 \leq (tSD(x) + (1-t)SD(y))^2$$

が得られる．関数 u_i は分散について狭義単調減少関数で，かつ関数 $f(x) = x^2$ は強凸であることから，u_i は標準偏差 SD に対して強擬凹関数である[9]．よって，任意の $x, y \in \boldsymbol{R}^{1+S}, t \in [0,1]$ について，

$$\begin{aligned}
U_i(tx + (1-t)y) &= u_i(tx^0 + (1-t)y^0, E(tx + (1-t)y), V(tx + (1-t)y)) \\
&= u_i(tx^0 + (1-t)y^0, tE(x) + (1-t)E(y), (SD(tx + (1-t)y))^2) \\
&\geq u_i(tx^0 + (1-t)y^0, tE(x) + (1-t)E(y), (tSD(x) + (1-t)SD(y))^2) \\
&\geq \min\{U_i(x), U_i(y)\}
\end{aligned}$$

となる．つまり，任意のパレート効率的配分はパレート問題の解として解釈することができる．

次の補題から，効用関数が消費の平均と分散にしか依存しない場合には，パレート効率的な配分は総初期保有量に対するアフィン変換として表せることが分かる．

4.3.2 補題 任意のパレート効率的配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ において，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ に対し，$\sum_{i=1}^I \kappa_i = 0, \sum_{i=1}^I \theta_i = 1$ を満たす $\kappa_i \in \boldsymbol{R}, \theta_i \in \boldsymbol{R}$ が存在して，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$x_i^{*s} = \kappa_i + \theta_i \left(\sum_{h=1}^I e_h^s \right)$$

が成立する．

補題 4.3.2 の証明 実数空間 $\boldsymbol{R}^S$ において次の内積を定義する．

$$x, y \in \boldsymbol{R}^S,\ \langle x, y \rangle := \sum_{s=1}^S \pi^s x^s y^s = E(xy)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ が内積の定義を満たすことは明らかで，この内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ によって特徴づけられた実数空間 $\boldsymbol{R}^S$ を通常の内積を備えた実数空間 $\boldsymbol{R}^S$ と区別するために $(\boldsymbol{R}^S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ と書くことにする．この内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から誘導されるノルム $\|x\|_\pi := \sqrt{\sum_{s=1}^S \pi^s (x^s)^2}, x \in \boldsymbol{R}^S$ について $(\boldsymbol{R}^S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は完備である，つまり $(\boldsymbol{R}^S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ はヒルベルト空間である．

ここで任意のパレート効率的配分を $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ とする．任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $e^s := \sum_{i=1}^I e_i^s$ とし，$\mathbf{1}_S := (1, \cdots, 1)^\top \in \boldsymbol{R}^S, e := (e^1, \cdots, e^S)^\top \in \boldsymbol{R}^S$ とおく．すると $\mathbf{1}_S$ と

[9] 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_+$ が強凸関数であり，関数 $g : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ が狭義単調減少関数ならば，その合成関数 $g \circ f$ は強擬凹関数である．任意の $x, y \in \boldsymbol{R}, t \in (0,1)$ について，$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}
g \circ f(tx + (1-t)y) &= g(f(tx + (1-t)y)) \\
&\geq g(tf(x) + (1-t)f(y)) \\
&\geq g(\max\{f(x), f(y)\}) \\
&= \min\{g \circ f(x), g \circ f(y)\}
\end{aligned}$$

f が強凸関数，g が狭義単調減少関数であることから，等号成立は $x = y$ に限る．

e によって張られる空間 $\mathrm{span}\{\mathbf{1}_S, e\}$ は高々有限個のベクトルで張られる線形部分空間なのでヒルベルト空間 $(\boldsymbol{R}^S, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上の閉部分空間である．したがって $\mathrm{span}\{\mathbf{1}_S, e\}$ への直交射影を定義でき，$\mathrm{span}\{\mathbf{1}_S, e\}$ への直交射影を与える写像を $P : (\boldsymbol{R}^S, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to \mathrm{span}\{\mathbf{1}_S, e\}$ とする．この時，直交射影の線形性から

$$\sum_{i=1}^{I} P(x_i^*) = P\left(\sum_{i=1}^{I} x_i^*\right) = P(e) = e$$

が言えるので[10]，$((x_1^{*0}, P(x_1^*)), \cdots, (x_I^{*0}, P(x_I^*)))$ は資源制約を満たす．ここで直交射影の一般的性質から任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ に対し，$\langle \mathbf{1}_S, x_i^* - P(x_i^*)\rangle = 0$ と $\langle P(x_i^*), x_i^* - P(x_i^*)\rangle = 0$ が言える．すなわち $P(x_i^*)$ の第 s 要素を $[P(x_i^*)]^s$ と表すこととして

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{1}_S, x_i^* - P(x_i^*)\rangle &= \sum_{s=1}^{S} \pi^s (x_i^{*s} - [P(x_i^*)]^s) = E(x^* - P(x_i^*)) = 0 \\
\langle P(x_i^*), x_i^* - P(x_i^*)\rangle &= \sum_{s=1}^{S} \pi^s [P(x_i^*)]^s (x_i^{*s} - [P(x_i^*)]^s) = E(P(x_i^*)(x^* - P(x_i^*))) = 0
\end{aligned}$$

である．よって $P(x_i^*)$ と $x_i^* - P(x_i^*)$ の共分散は

$$COV(P(x_i^*), x_i^* - P(x_i^*)) = E(P(x_i^*)(x_i^* - P(x_i^*))) - E(P(x_i^*))E(x_i^* - P(x_i^*)) = 0$$

となる．つまり

$$\begin{aligned}
V(x_i^*) &= V(P(x_i^*) + x_i^* - P(x_i^*)) \\
&= V(P(x_i^*)) + 2COV(P(x_i^*), x_i^* - P(x_i^*)) + V(x_i^* - P(x_i^*)) \\
&= V(P(x_i^*)) + V(x_i^* - P(x_i^*))
\end{aligned}$$

となる．ここで $V(x_i^* - P(x_i^*)) > 0$ ならば $V(x_i^*) > V(P(x_i^*))$ となり，かつ $E(x^* - P(x_i^*)) = 0$ より $E(x_i^*) = E(P(x_i^*))$ なので $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ のパレート効率性に反する．したがって $V(x_i^* - P(x_i^*)) = 0$ でなくてはならない．$V(x_i^* - P(x_i^*)) = 0$ であるのはある実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}$ を用いて，全ての状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $x_i^{*s} - [P(x_i^*)]^s = \alpha$ と表せる時だが，$\langle \mathbf{1}_S, x_i^* - P(x_i^*)\rangle = 0$ であるので，

$$0 = \langle \mathbf{1}_S, x_i^* - P(x_i^*)\rangle = \langle \mathbf{1}_S, \alpha \mathbf{1}_S\rangle = \alpha \langle \mathbf{1}_S, \mathbf{1}_S\rangle = \alpha \|\mathbf{1}_S\|_\pi^2 = \alpha$$

となる．したがって，全ての状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $x_i^{*s} - [P(x_i^*)]^s = 0$ であり，結果 $x_i^{*s} = [P(x_i^*)]^s$ であることが言える．

任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $(x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})^\top = P(x_i^*) \in \mathrm{span}\{\mathbf{1}_S, e\}$ より，$\mathbf{1}_S, e$ が線形独立ならば適当な $\kappa_i \in \boldsymbol{R}, \theta_i \in \boldsymbol{R}$ を用いて

$$(x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})^\top = \kappa_i \mathbf{1}_S + \theta_i e$$

と表せる．$\sum_{i=1}^I x_i^* = e$ なので

$$\left(\sum_{i=1}^{I} \kappa_i\right) \mathbf{1}_S + \left(\sum_{i=1}^{I} \theta_i\right) e = \sum_{i=1}^{I} (\kappa_i \mathbf{1}_S + \theta_i e) = \sum_{i=1}^{I} (x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})^\top = e$$

である．よって $\sum_{i=1}^I \kappa_i = 0, \sum_{i=1}^I \theta_i = 1$ が言える．

[10] この場合も期待値や分散のオペレーターと同様に全ての時点の消費に対して射影写像を適用するような書き方をしているが，実際の引数となるのは時点 1 での消費だけである．この証明における以下の内積の演算やその他の演算についても同様に解釈する．

$\mathbf{1}_S, e$ が線形従属ならばある実数 $(\alpha,\beta) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ を用いて $\alpha e = \beta \mathbf{1}_S$ と表せる．この時，$e \neq 0$ ならば，$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ なので $\mathbf{1}_S = (\beta/\alpha)e$ と表せることから，$\kappa_i = 0$ と置いて θ_i に適当な実数を定めて $(x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})^\top = \kappa_i \mathbf{1}_S + \theta_i e$ と表せる．この時，$\left(\sum_{i=1}^I \theta_i\right) e = e$ なので $\sum_{i=1}^I \theta_i = 1$ も言える．$e = 0$ ならば，$\beta = 0$ なので，$\sum_{i=1}^I \kappa_i = 0, \sum_{i=1}^I \theta_i = 1$ であるような κ_i, θ_i に対し，$(x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})^\top = \kappa_i \mathbf{1}_S + \theta_i e$ と表せる． ///

効用関数が平均と分散のみに依存する場合に市場が実質的に完備となるためには少なくともどれだけの証券が必要であるかは，次の定理によって特徴づけられる．

4.3.3 定理 ある $z := (z_1, \cdots, z_J)^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^J z_j a_j^s = 1$$

であるとする (安全資産)．また，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，ある $w_i := (w_{i1}, \cdots, w_{iJ})^\top \in \boldsymbol{R}^J$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\sum_{j=1}^J w_{ij} a_j^s = e_i^s$$

であるとする．この時，AME の財配分はパレート効率的である．

証明の前に，z は任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について $\sum_{s=1}^S z_j a_j^s = 1$ であることから安全資産と解釈できることに注意したい．なぜ安全資産と解釈できるのかと言うと，全ての状態において 1 単位のペイオフを支払うようなポートフォリオであるので，変動リスクが存在しないからである[11]．

定理 4.3.3 の証明 任意のパレート効率的配分を $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ とする．この時，補題 4.3.2 により，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ に対し，ある $\kappa_i \in \boldsymbol{R}, \theta_i \in \boldsymbol{R}$ が存在し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$x_i^{*s} = \kappa_i + \theta_i \left(\sum_{h=1}^I e_h^s \right)$$

が成立する．ここで任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，

$$y_i^* := \kappa_i z + \theta_i \left(\sum_{h=1}^I w_h \right) - w_i \in \boldsymbol{R}^J$$

とおけば，任意の価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}^{1+S}$ に対し，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^J y_{ij}^* r_j^s(p^s) &= p^s \cdot (A^s y_i^*) = p^s \cdot \left(A^s \left(\kappa_i z + \theta_i \left(\sum_{h=1}^I w_h \right) - w_i \right) \right) \\
&= p^s \cdot \left(\kappa_i A^s z + \theta_i \left(\sum_{h=1}^I A^s w_h \right) - A^s w_i \right) = p^s \cdot \left(\kappa_i + \theta_i \left(\sum_{h=1}^I e_h^s \right) - e_i^s \right) \\
&= p^s \cdot (x_i^{*s} - e_i^s)
\end{aligned}$$

[11] いわゆる物価連動債 (inflation-linked bond) に相当するような資産となる．

なので $x_i^* \in V_i(p)$ であり，市場は任意の価格ベクトルの下で実質的に完備である．よって，命題 4.1.3 より AME の財配分はパレート効率的である．　///

定理 4.3.3 から消費者の効用が平均と分散のみに依存する場合は，$1 + I$ 種類の証券で市場が実質的に完備であり得ることが分かる．

第5章　制約条件つき効率性の別の定式化

5.1　定義

前章で定義した制約条件つき効率性を満たす配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ は，ポートフォリオの再配分によって実行される任意の配分によってもパレート改善されない配分として定義された．しかし，ポートフォリオの再配分を行った後に，時点1で消費者 i は消費計画 x_i を実際に消費するとは限らない．すなわち，ポートフォリオを再配分すると，時点1での各消費者の可処分所得が変わるため，状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ で消費者 i が最も好む財ベクトルは制約条件つき効率性を満たす x_i^s と異なる可能性がある．各消費者が最も好む財ベクトルを選ぶとすると，財市場の需給均衡条件が崩れ p^s はもはや均衡財価格ベクトルではなくなる．そこで，ポートフォリオの再配分が財価格に及ぼす影響を考慮した効率性概念が必要になる．それは次のように定式化される．

5.1.1 定義 (制約条件つき実行可能 (constrained feasible)) 資源制約 $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} e_i$ を満たす配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ が**制約条件つき実行可能**であるとは，次の2条件を満たすポートフォリオ配分 $(y_1, \cdots, y_I) \in \boldsymbol{R}^J \times \cdots \times \boldsymbol{R}^J$ と財価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ が存在する時を言う．

1. $\sum_{i=1}^{I} y_i = 0$
2. 全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，x_i^* は以下の問題の解となる．

$$\begin{aligned} \max_{x_i \in X_i} \quad & U_i(x_i) \\ \text{subject to} \quad & p^0 \cdot x_i^0 \leq p^0 \cdot x_i^{*0}, \\ & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ & p^s \cdot x_i^s \leq p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \end{aligned}$$

時点0での財 x_i^{*0} が移転されると考えれば，$p^0 \cdot x_i^{*0} - p^0 \cdot e_i^0$ は任意の値を取れるので，上の定義においては自由に所得とポートフォリオの再配分が行われると解釈できる[1]．全ての証券が実物証券ならば，証券 $j \in \{1, \cdots, J\}$ を通して状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ で得られる財ベクトルを a_j^s とした時に，時点1における予算制約の右辺は $p^s \cdot (e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} a_j^s)$ と書くことができる．よって，所得とポートフォリオの再配分を行った後の消費者 $i \in \{1, \cdots, I\}$ の可処分所得は，初期保有量を $(x_i^{*0}, e_i^1 + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} a_j^1, \cdots, e_i^S + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} a_j^S)$ と見なした場合の可処分所得と等しいので，$(x_i^{*0}, e_i^1 + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} a_j^1, \cdots, e_i^S + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} a_j^S)$ を virtual endowment と呼ぶことがある[2]．

5.1.2 注意 任意の AME の均衡財配分は定義より，均衡財価格 p と均衡ポートフォリオ配分 $(y_1, \cdots, y_I)$ によって制約条件つき実行可能である．

[1]所得移転を行った後の効用最大化問題を考えているので，Debreu[1959] による equilibrium relative to the price や MWG の price equilibrium with transfers に似た定式化になっている．ただし，MWG の概念とは異なり，ここでは移転額は明示されていない．

[2]所得移転も操作変数とした定式化は Magill and Shafer[1991] にある．

5.1.3 注意 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について U_i が時点に対し加法分離的，つまり

$$U_i(x_i) = u_i^0(x_i^0) + \widehat{U}_i(x_i^1, \cdots, x_i^S)$$

ならば制約条件つき実行可能性の定義における条件2は以下の2条件と同値である．

1. 全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，x_i^{*0} は以下の問題の解となる．

$$\begin{aligned} \max_{x_i^0} \quad & u_i^0(x_i) \\ \text{subject to} \quad & p^0 \cdot x_i^0 \leq p^0 \cdot x_i^{*0} \end{aligned}$$

2. 全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，$(x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})$ は以下の問題の解となる．

$$\begin{aligned} \max_{(x_i^1, \cdots, x_i^S)} \quad & \widehat{U}_i(x_i^1, \cdots, x_i^S) \\ \text{subject to} \quad & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ & p^s \cdot x_i^s \leq p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s) \end{aligned}$$

時点についての加法分離性に加え，状態についても加法分離的，つまり $\widehat{U}_i(x_i^1, \cdots, x_i^S) = \sum_{s=1}^S u_i^s(x_i^s)$ ならば，上の条件2は下の条件2′と同値となる．

2′. 全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ に対し，任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，x_i^{*s} は以下の問題の解となる．

$$\begin{aligned} \max_{x_i^s} \quad & u_i^s(x_i^s) \\ \text{subject to} \quad & p^s \cdot x_i^s \leq p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s) \end{aligned}$$

制約条件つき実行可能性を定義5.1.1のように定義した上で，対応する制約条件つき効率性を新しく以下のように定義する．

5.1.4 定義 (制約条件つき効率性 (constrained efficiency)) 制約条件つき実行可能な配分が**制約条件つき効率的**であるとは，その配分をパレート改善するような制約条件つき実行可能な配分が存在しない時をいう．

制約条件つき実行可能性より弱い実行可能性の概念を以下のように定義する．

5.1.5 定義 (弱い意味で制約条件つき実行可能 (weakly constrained feasible : w.c.f.)) 資源制約 $\sum_{i=1}^I x_i^* = \sum_{i=1}^I e_i$ を満たす配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ が**弱い意味で制約条件つき実行可能**であるとは，次の2条件を満たすポートフォリオ配分 $(y_1, \cdots, y_I) \in \boldsymbol{R}^J \times \cdots \times \boldsymbol{R}^J$ と財価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}^{NS}$ が存在する時を言う．

1. $\sum_{i=1}^I y_i = 0$

2. 全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，$(x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})$ は以下の問題の解となる．

$$\begin{aligned} \max_{(x_i^1, \cdots, x_i^S)} \quad & U_i(x_i^{*0}, x_i^1, \cdots, x_i^S) \\ \text{subject to} \quad & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ & p^s \cdot x_i^s \leq p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \end{aligned}$$

定義 5.1.5 の条件 2 は，$(x_i^{*1}, \cdots, x_i^{*S})$ が時点 1 における効用最大化と整合的であることのみを要請するので，時点 0 での消費 x_i^{*0} に課せられた条件は資源制約のみとなる．言い換えれば，x_i^{*0} は消費者と異なる主体，つまりプランナーに選ばれていると考えてもよい．

5.1.6 注意 任意の制約条件つき実行可能な配分は弱い意味で制約条件つき実行可能な配分でもある．仮にそうでないとすれば，制約条件つき実行可能な配分を $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ とし，それに対応する価格とポートフォリオを $(p, (y_1^*, \cdots, y_I^*))$ とした時に，ある i について，x_i^{*0} と $(p, (y_1^*, \cdots, y_I^*))$ を固定した上で，$U_i(x_i^{*0}, x_i^1, \cdots, x_i^S) > U_i(x_i^*)$ であり，かつ時点 1 の予算制約をすべて満たすような消費計画 $x_i := (x_i^{*0}, x_i^1, \cdots, x_i^S)$ が存在する．この x_i は制約条件つき実行可能性の定義における条件 2 の最大化問題の制約をすべて満たすので矛盾する．よって $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ は弱い意味でも制約条件つき実行可能である．

弱い意味での制約条件つき実行可能性に対応した効率性概念を以下のように定義する．

5.1.7 定義 (強い意味での制約条件つき効率性 (strongly constrained efficiency : s.c.e.)) 弱い意味で制約条件つき実行可能な配分が**強い意味で制約条件つき効率的**であるとは，その配分をパレート改善するような弱い意味で制約条件つき実行可能な配分が存在しない時をいう．

強い意味で制約条件つき効率的な配分を求めるための問題は次のように定式化される．

$$\begin{aligned} \max_{((x_1, y_1), \cdots, (x_I, y_I))} \quad & (U_i(x_i))_{i=1}^I \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} e_i, \quad \sum_{i=1}^{I} y_i = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

ただし，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ に対して，$(x_i^1, \cdots, x_i^S)$ は以下の問題の解である．

$$\begin{aligned} \max_{(\widehat{x}_i^1, \cdots, \widehat{x}_i^S)} \quad & U_i(x_i^0, \widehat{x}_i^1, \cdots, \widehat{x}_i^S) \\ \text{subject to} \quad & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ & p^s \cdot \widehat{x}_i^s \leq p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \end{aligned}$$

5.1.8 注意 制約条件つき実行可能な財配分が強い意味で制約条件つき効率的ならば，制約条件つき効率的である．注意 5.1.6 より，制約条件つき実行可能ならば弱い意味で制約条件つき実行可能なので，ある制約条件つき実行可能な配分が任意の弱い意味で制約条件つき実行可能な配分からパレート改善されないのであれば，任意の制約条件つき実行可能な配分からもパレート改善されることはない．よって，制約条件つき効率的である．

標準的な仮定の下では注意 5.1.8 の逆も成立することが，次の命題により分かる．

5.1.9 命題 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $X_i = \boldsymbol{R}_+^{N(1+S)}$ であり，ある強単調かつ準凹な連続関数 $u_i^0 : \boldsymbol{R}_+^N \to \boldsymbol{R}$ と関数 $\widehat{U}_i : \boldsymbol{R}_+^{NS} \to \boldsymbol{R}$ が存在し，任意の $x_i \in X_i$ について，

$$U_i(x_i) = u_i^0(x_i^0) + \widehat{U}_i(x_i^1, \cdots, x_i^S)$$

が成立するとする．この時，任意の制約条件つき効率的な財配分は強い意味で制約条件つき効率的である．

命題 5.1.9 の証明 対偶を示す．任意の強い意味で制約条件つき効率的でない，弱い意味で制約条件つき実行可能な配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ を考える．この配分は強い意味で制約条件つき効率的でないので，この配分をパレート改善するような弱い意味で制約条件つき実行可能な配分が存在する．また，全ての $i \in \{1, \cdots, I\}$ について u_i^0 が連続なことから，時点 0 の効用についての効用可能性集合は閉集合となる[3]．よって効用可能性集合の境界点に時点 0 についてパレート効率的な配分が必ず存在する．弱い意味で制約条件つき実行可能な配分について，時点 0 の消費が満たすべき条件は資源制約のみなので，$(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ をパレート改善するような，時点 0 の消費についてパレート効率的であり，かつ弱い意味で制約条件つき実行可能である配分 $(\widehat{x}_1, \cdots, \widehat{x}_I)$ が存在する．

効用関数に関する仮定より，厚生経済学の第 2 基本定理から，配分 $(\widehat{x}_1^0, \cdots, \widehat{x}_I^0)$ を時点 0 において価格均衡として達成するような時点 0 の価格ベクトル $\widehat{p}^0 \in \boldsymbol{R}^N$ が存在する[4]．よって注意 5.1.3 の条件 1 が成立する．弱い意味で制約条件つき実行可能であることから，配分 $(\widehat{x}_1, \cdots, \widehat{x}_I)$ に対応したスポット価格 $(\widehat{p}^1, \cdots, \widehat{p}^S)$ とポートフォリオ配分 $(\widehat{y}_1, \cdots, \widehat{y}_I)$ が存在し，注意 5.1.3 の条件 2 と定義 5.1.1 の条件 1，資源制約を満たすので，$(\widehat{x}_1, \cdots, \widehat{x}_I)$ は制約条件つき実行可能である．よって $(\widehat{x}_1, \cdots, \widehat{x}_I)$ は制約条件つき実行可能であり，かつ $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ をパレート改善するので題意は示された． ///

命題 5.1.9 より，効用関数の時点に関する加法分離性，時点 0 の効用関数についての強単調性，連続性，準凹性の仮定があれば，強い意味での制約条件つき効率性と制約条件つき効率性は同値である．

[3]MWG の Chapter 16, Appendix A を参照せよ．
[4]MWG の Chapter 16, Section 16.D を参照せよ．

5.2 Generic Inefficiency

第 4 章で定義した制約条件つき効率性と違い,「大抵」の場合は，AME は前節で定義した制約条件つき効率性を満たさないという結果が知られている．まず，この結果を形式的に述べるために以下の用語法を使う．I 人の消費者の効用関数と初期保有量のペア $((U_1, e_1), \cdots, (U_I, e_I))$ を**経済**と呼ぶ．とりわけ，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について任意の時点，任意の状態，任意の消費財に対し稲田条件を満たし，さらに時点について加法分離的で，定義域上の任意の点で gradient の全ての要素が正かつ hessian が負値定符号な $U_i \in C^\infty(\boldsymbol{R}^{N(1+S)}_{++})$ と[5]初期保有量 $e_i \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}_{++}$ からなる全ての経済の集合を $\mathscr{E}$ と書く[6]．$C^\infty(\boldsymbol{R}^{N(1+S)}_{++})$ の位相としてコンパクト – 開位相[7]を考えると，$\mathscr{E}$ は $C^\infty(\boldsymbol{R}^{N(1+S)}_{++}) \times \boldsymbol{R}^{N(1+S)}_{++}$ の相対位相により，位相空間である．

J 種類の証券のペイオフ $(r_1, \cdots, r_J)$ を**証券構造**と呼ぶ．とりわけ，全ての証券が実物資産である場合は証券構造として，$(r_1, \cdots, r_J)$ の代わりに，時点 1 で受け取る財ベクトルが作る行列 $(a_1, \cdots, a_J)$ を証券構造と呼ぶ．有限次元の実数行列に対する議論なので $(a_1, \cdots, a_J)$ は $\boldsymbol{R}^{SNJ}$ の点と同一視できる．

$\mathscr{E}$ に対して，次の結果が成立する．

5.2.1 定理 (Generic Inefficiency) [8]$J < S, N \geq 2, I > S(N-1)$ とする．更に証券は全て実物資産であるとする．この時，$\mathscr{E} \times \boldsymbol{R}^{SNJ}_{++}$ についてある稠密[9]な開部分集合が存在し，その集合に含まれる任意の経済と証券構造から得られるいかなる AME の財配分も制約条件つき効率的ではない[10]．

定理 5.2.1 の結果について簡単に見ておく．$J < S$ は (任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について $X_i = \boldsymbol{R}^{N(1+S)}_{+}$ であり，かつ $p \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)}_{++}$ ならば) 市場が完備ではないことを意味する．仮定に反して市場が完備ならば，AME はパレート効率的である．よって，この定理は市場の不完備性がパレート効率性に関して極めてネガティブに働くことを意味している．$N \geq 2$ は文字通り 1 財の場合を除外することを意味している．後で見るように，1 財の場合はこの定理は成立しない．

定理 5.2.1 の証明は，均衡配分は制約条件つき効率性を特徴づける 1 階条件を「大抵」の場合満たしていないことを用いれば得られる．以下ではこの結果を直接証明することはしないで，定

---

[5]任意の正の整数 $k, m \in \boldsymbol{N}$ に対し，開集合 $A \subseteq \boldsymbol{R}^m$ について，$C^k(A)$ という集合は，定義域を A とする k 回連続微分可能な全ての実数値関数からなる集合を指す．特に $C^\infty(A)$ と書けば，定義域を A とする無限回連続微分可能な全ての実数値関数からなる集合を指す．$C(A)$ と書けば，定義域を A とする全ての実数値連続関数からなる集合を指す．$C^\infty(A) \subseteq \cdots \subseteq C^2(A) \subseteq C^1(A) \subseteq C(A)$ の包含関係が成立する．

[6]これらの仮定は命題 5.1.9 の条件を全て満たしているので，本節の議論では制約条件つき効率性と強い意味での制約条件つき効率性は区別されない．

[7]無限回微分可能な実数値関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 全てからなる集合を C^∞ とする．更に，$B \in \boldsymbol{R}$ を任意のコンパクト集合とする．この時 $\|f\|_B := \sup_{k \in \boldsymbol{N}} \sup_{x \in B} |d^k f(x)/dx^k|$ を定義する．この $\|f\|_B$ によって導入される位相をコンパクト – 開位相と呼ぶ．この概念は偏微分や適切なノルムを導入することで無限回微分可能な $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ についても拡張できる．

[8]典型的な性質であるということを指して generic と言う．generic であることの形式な定義は，経済の部分集合を適当なパラメーター化により，ユークリッド空間の部分集合と同一視して，稠密な開集合であるだけでなく補集合がルベーグ測度ゼロであることも含めることが多い．ルベーグ測度ゼロとは，実数空間上の (ルベーグ可測な) 集合について，その集合のルベーグ測度が 0 であるような場合を指す．例えば，有理数全体からなる集合は 1 次元ルベーグ測度ゼロである．孤立した点からなる集合 ($\{1\}, \{1, \sqrt{2}, 3\}$ など) と，高々可算個のそれらの集合によって作られる和集合，積集合は全て 1 次元ルベーグ測度ゼロである．また任意の正の整数 n について，(ルベーグ可測な) 部分集合 $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$ に含まれる線形独立なベクトルの最大個数が $n-1$ 以下ならば，A は n 次元ルベーグ測度ゼロである．

[9]距離空間 (X, d) 上の集合 B について，その部分集合 $A \subseteq B$ が稠密であるとは，全ての $b \in B$ について A 上にある点列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ が存在し，$d(a_n, b) \to 0$ を満たす時を言う．例えば，有理数全体の集合は実数全体の集合について稠密である．また，任意の閉区間 $[a, b] \subset \boldsymbol{R}$ に対し，$C[a, b]$ は，$[a, b]$ 上で (ルベーグ積分の意味で) 可積分な関数全体からなる集合 ($L^1[a, b]$ と書く) について稠密である．稠密であるという性質は，極限を取ることによって結果を拡張できる場合に，稠密集合上で議論が展開できることから特に有用な性質である (例えば，1 次関数の十分条件を証明する時に，有理数全体の集合が実数全体の集合について稠密であることを用いる)．

[10]消費集合が $X_i = \boldsymbol{R}^{N(1+S)}_{+}$ の場合の結果が Magill and Shafer[1991] にある．

理 5.2.1 の証明の論法の一部を用いて[11]，AME が強い意味で制約条件つき効率的になるための必要条件を導く．

まず，制約条件つき効率性のためのパレート問題を定式化するために，関数 $V_i : \boldsymbol{R}^N \times (\boldsymbol{R}^N_{++} \times \boldsymbol{R}_+)^S \to \boldsymbol{R}$ を次のように定義する．次の最大化問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{(x_i^1, \cdots, x_i^S)} & U_i(x_i^0, x_i^1, \cdots, x_i^S) \\ \text{subject to} & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ & p^s \cdot x_i^s \leq w_i^s \end{array}$$

この最大化問題の解が達成する効用水準の最大値を，時点 0 での消費，価格と初期富の関数 $V_i(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))$ とみなす．関数 V_i は時点 0 についての (直接) 効用関数，時点 1 についての間接効用関数だと解釈できる．V_i は以下で述べる性質を持つ．

5.2.2 例 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，ある関数 $u_i^0 : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$ と $\widehat{U}_i : \boldsymbol{R}^{NS} \to \boldsymbol{R}$ が存在して，任意の $x_i \in X_i$ に対し，$U_i(x_i) = u_i^0(x_i^0) + \widehat{U}_i(x_i^1, \cdots, x_i^S)$ と書けるならば，任意の $(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))$ に対し，

$$V_i(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S)) = u_i^0(x_i^0) + \widehat{V}_i((p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))$$

が成立する．ただし，関数 $\widehat{V}_i : (\boldsymbol{R}^N_{++} \times \boldsymbol{R}_+)^S \to \boldsymbol{R}$ は以下の最大化問題の解が達成する効用水準の最大値として定義される．

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{(x_i^1, \cdots, x_i^S)} & \widehat{U}_i(x_i^1, \cdots, x_i^S) \\ \text{subject to} & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ & p^s \cdot x_i^s \leq w_i^s \end{array}$$

5.2.3 例 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ において，任意の状態 $s \in \{0, 1, \cdots, S\}$ に対し，ある関数 $u_i^s : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$ が存在して，任意の $x_i \in X_i$ に対し，$U_i(x_i) = \sum_{s=0}^S u_i^s(x_i^s)$ と書けるならば，任意の $(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))$ に対し，

$$V_i(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S)) = u_i^0(x_i^0) + \sum_{s=1}^S v_i^s(p^s, w_i^s)$$

が成立する．ただし，任意の $s \in \{1, \ldots, S\}$ について，関数 $v_i^s : \boldsymbol{R}^N_{++} \times \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ は以下の最大化問題の解が達成する効用水準の最大値として定義される．

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_i^s} & u_i^s(x_i^s) \\ \text{subject to} & p^s \cdot x_i^s \leq w_i^s \end{array}$$

ここで定義した V_i について，次のような Roy の恒等式の一般化が成立する．

5.2.4 命題 (一般化された Roy の恒等式) 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ と任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，$(x_i^0, ((p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S)))$ に対し，

$$-\left(\frac{\partial V_i(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))}{\partial w_i^s}\right)^{-1} \frac{\partial V_i(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))}{\partial p^s} = x_i^s(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))$$

[11] どちらの証明も 1 階条件を用いる．

が成り立つ．ただし $(x_i^s(x_i^0,(p^1,w_i^1),\cdots,(p^S,w_i^S)))_{s=1}^S$ は以下の問題の解である．

$$\max_{(x_i^1,\cdots,x_i^S)} U_i(x_i^0,x_i^1,\cdots,x_i^S) \tag{5.2}$$
$$\text{subject to}\quad \text{全ての } s\in\{1,\cdots,S\} \text{ について } p^s\cdot x_i^s \leq w_i^s$$

命題 5.2.4 の証明 任意の $i\in\{1,\cdots,I\}$ について任意の x_i^0 を固定する．効用関数の強単調性から最大化問題 (5.2) は以下の等式制約付き最大化問題と同値である．

$$\max_{(x_i^1,\cdots,x_i^S)} U_i(x_i^0,x_i^1,\cdots,x_i^S)$$
$$\text{subject to}\quad \text{全ての } s\in\{1,\cdots,S\} \text{ について } p^s\cdot x_i^s = w_i^s$$

ここで $p=(p^1,\cdots,p^S)$，$w_i=(w_i^1,\cdots,w_i^S)^\top$ と表すことにする．表記の簡略化のため x_i^0 は省略する．任意の $s\in\{1,\cdots,S\}$ に対し，最適解 $x_i^s(p,w_i)$ におけるラグランジュ乗数を $\lambda^s(p,w_i)$ とすると，全ての p,w_i について

$$V_i(p,w_i)=U_i(x_i^1(p,w_i),\cdots,x_i^S(p,w_i))+\sum_{s=1}^S\lambda^s(p,w_i)(w_i^s-p^s\cdot x_i^s(p,w_i))$$

が成立する．よって，任意の $s\in\{1,\cdots,S\}$ について

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_i(p,w_i)}{\partial p^s} &= \frac{\partial U_i(x_i^1(p,w_i),\cdots,x_i^S(p,w_i))}{\partial p^s}+\sum_{\widehat{s}=1}^S\lambda^{\widehat{s}}(p,w_i)\frac{\partial(w_i^{\widehat{s}}-p^{\widehat{s}}\cdot x_i^{\widehat{s}}(p,w_i))}{\partial p^s}\\
&\quad+\sum_{\widehat{s}=1}^S\frac{\partial\lambda^{\widehat{s}}(p,w_i)}{\partial p^s}(w_i^{\widehat{s}}-p^{\widehat{s}}\cdot x_i^{\widehat{s}}(p,w_i))\\
&= \sum_{\widehat{s}=1}^S\sum_{n=1}^N\frac{\partial U_i}{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}\frac{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}{\partial p^s}+\sum_{\widehat{s}=1}^S\lambda^{\widehat{s}}(p,w_i)\sum_{n=1}^N\frac{\partial(w_i^{\widehat{s}}-p^{\widehat{s}}\cdot x_i^{\widehat{s}}(p,w_i))}{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}\frac{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}{\partial p^s}\\
&\quad-\lambda^s(p,w_i)x_i^s(p,w_i)\\
&= \sum_{\widehat{s}=1}^S\sum_{n=1}^N\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}+\lambda^{\widehat{s}}(p,w_i)\frac{\partial(w_i^{\widehat{s}}-p^{\widehat{s}}\cdot x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i))}{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}\right)\frac{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}{\partial p^s}\\
&\quad-\lambda^s(p,w_i)x_i^s(p,w_i)\\
&= -\lambda^s(p,w_i)x_i^s(p,w_i)\\
\frac{\partial V_i(p,w_i)}{\partial w_i^s} &= \frac{\partial U_i(x_i^1(p,w_i),\cdots,x_i^S(p,w_i))}{\partial w_i^s}+\sum_{\widehat{s}=1}^S\lambda^{\widehat{s}}(p,w_i)\frac{\partial(w_i^{\widehat{s}}-p^{\widehat{s}}\cdot x_i^{\widehat{s}}(p,w_i))}{\partial w_i^s}\\
&\quad+\sum_{\widehat{s}=1}^S\frac{\partial\lambda^{\widehat{s}}(p,w_i)}{\partial w_i^s}(w_i^{\widehat{s}}-p^{\widehat{s}}\cdot x_i^{\widehat{s}}(p,w_i))\\
&= \sum_{\widehat{s}=1}^S\sum_{n=1}^N\frac{\partial U_i}{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}\frac{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}{\partial w_i^s}+\sum_{\widehat{s}=1}^S\lambda^{\widehat{s}}(p,w_i)\sum_{n=1}^N\frac{\partial(w_i^{\widehat{s}}-p^{\widehat{s}}\cdot x_i^{\widehat{s}}(p,w_i))}{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}\frac{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}{\partial w_i^s}\\
&\quad+\lambda^s(p,w_i)\\
&= \sum_{\widehat{s}=1}^S\sum_{n=1}^N\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}+\lambda^{\widehat{s}}(p,w_i)\frac{\partial(w_i^{\widehat{s}}-p^{\widehat{s}}\cdot x_i^{\widehat{s}}(p,w_i))}{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}\right)\frac{\partial x_{in}^{\widehat{s}}(p,w_i)}{\partial w_i^s}\\
&\quad+\lambda^s(p,w_i)\\
&= \lambda^s(p,w_i)
\end{aligned}$$

である．したがって

$$\frac{\partial V_i(p, w_i)}{\partial p^s} = -\frac{\partial V_i(p, w_i)}{\partial w_i^s} x_i^s(p, w_i)$$

であるので題意は示された． ///

命題 5.2.4 の証明方法自体は，標準的な消費者理論における Roy の恒等式の証明とさほど変わらず，最大化の必要条件から包絡線定理 (envelope theorem) が成立することを示す形になる．異なるのは，状態ごとの所得の限界効用 $\partial V_i/\partial w_i^s$ が登場する点である．またほかの証明法として双対問題を用いたものもある．

命題 5.2.4 の別の証明任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について任意の x_i^0 を固定する．表記の簡略化のため x_i^0 は省略する．また，$p = (p^1, \cdots, p^S)$，$w_i = (w_i^1, \cdots, w_i^S)^\top$ と表すことにする．この時，最大化問題 (5.2) の双対問題として以下の問題を考える．

$$\begin{aligned} \min_{(p,w_i)} \quad & V_i(p, w_i) \\ \text{subject to} \quad & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ & p^s \cdot x_i^{*s} \leq w_i^s \end{aligned} \tag{5.3}$$

ただし，$x_i^{*s}, s = 1, \cdots, S$ は最大化問題 (5.2) の解である．ラグランジュ関数は

$$L_i(p, w_i) = V_i(p, w_i) + \sum_{s=1}^{S} \mu_i^s (w_i^s - p^s \cdot x_i^{*s})$$

なので，問題 (5.3) の最適解が問題 (5.2) における p, w に一致するならば，1 階条件から命題 5.2.4 が成立することが分かる．この時，$V_i(p, w_i)$ は任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について (p_i^s, w_i^s) に関して凸であることが示せる．よって問題 (5.3) の最適解は一意であり，ここで効用関数は凹性を保持するので，問題 (5.3) についてその最適解 p^*, w^* は双対定理から問題 (5.2) における p, w に一致する．よって題意は示された． ///

次の命題が示すように，(U_i を用いた) 効用最大化問題は V_i を用いることで幾分簡単化することができる．

5.2.5 命題 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，次の 2 つの問題

$$\begin{aligned} \max_{(x_i, y_i) \in X_i \times \boldsymbol{R}^J} \quad & U_i(x_i) \\ \text{subject to} \quad & p^0 \cdot x_i^0 + \sum_{j=1}^{J} q_j y_{ij} \leq p^0 \cdot e_i^0 \\ & \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について} \\ & p^s \cdot x_i^s \leq p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \end{aligned} \tag{5.4}$$

および,

$$\begin{aligned} \max_{(x_i^0, y_i) \in \boldsymbol{R}^N \times \boldsymbol{R}^J} \quad & V_i\left(x_i^0, \left(p^s, p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s)\right)_{s=1}^{S}\right) \\ \text{subject to} \quad & p^0 \cdot x_i^0 + \sum_{j=1}^{J} q_j y_{ij} \leq p^0 \cdot e_i^0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

に対し，次の 2 つが成立する．

1. (x_i, y_i) が問題 (5.4) の解ならば，(x_i^0, y_i) は問題 (5.5) の解である．
2. (x_i^0, y_i) が問題 (5.5) の解ならば，ある $(x_i^1, \cdots, x_i^S)$ が存在して，$(x_i^0, x_i^1, \cdots, x_i^S, y_i)$ は問題 (5.4) の解である．

命題 5.2.5 の証明 まず 1. についての証明を行う．問題 (5.4) の解 (x_i, y_i) について，(x_i^0, y_i) が問題 (5.5) の解ではないと仮定する．この時，ある $(\widehat{x}_i^0, \widehat{y}_i)$ が存在し，問題 (5.5) の制約を満たし，かつ

$$V_i\left(\widehat{x}_i^0, (p^s, p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J \widehat{y}_{ij} r_j^s(p^s))_{s=1}^S\right) > V_i\left(x_i^0, (p^s, p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s))_{s=1}^S\right) \geq U_i(x_i)$$

である．ここで，$V_i\left(\widehat{x}_i^0, (p^s, p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J \widehat{y}_{ij} r_j^s(p^s))_{s=1}^S\right)$ を達成し，かつ $(\widehat{x}_i^0, \widehat{y}_i)$ を固定した下で時点 1 での予算制約を満たすような $(\widehat{x}_i^1, \cdots, \widehat{x}_i^S)$ を取ることが，関数 V_i の定義より必ずできる．したがって $\widehat{x}_i := (\widehat{x}_i^0, \widehat{x}_i^1, \cdots, \widehat{x}_i^S)$ とすれば，定義より $(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i)$ は問題 (5.4) の制約を満たし，かつ

$$U_i(\widehat{x}_i) = V_i\left(\widehat{x}_i^0, (p^s, p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J \widehat{y}_{ij} r_j^s(p^s))_{s=1}^S\right)$$

である．よって

$$U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i)$$

となり，(x_i, y_i) が問題 (5.4) の効用最大化解であることと矛盾する．よって (x_i^0, y_i) は問題 (5.5) の解である．

次に 2. についての証明を行う．対偶を証明することにする．問題 (5.5) の制約を満たすようなある (x_i^0, y_i) について，(x_i^0, y_i) を固定した上で問題 (5.4) の制約を満たすように取った任意の $(x_i^1, \cdots, x_i^S)$ に対し，$(x_i^0, x_i^1, \cdots, x_i^S, y_i)$ は問題 (5.4) の解とはならないとする．この時，ある $(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i)$ が問題 (5.4) の制約を満たすように存在し，

$$U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i)$$

である．この場合，$(\widehat{x}_i^0, \widehat{y}_i)$ は問題 (5.5) の制約を満たす．この $\widehat{x}_i^0$ と $\widehat{y}_i$ を固定した時，

$$V_i\left(\widehat{x}_i^0, (p^s, p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J \widehat{y}_{ij} r_j^s(p^s))_{s=1}^S\right) \geq U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i^0, x_i^1, \cdots, x_i^S)$$

が成立する．(x_i^0, y_i) を固定した上で，$(x_i^1, \cdots, x_i^S)$ は問題 (5.4) の制約を満たす範囲で任意に選べるので時点 1 の予算制約を必ず満たすために，

$$V_i\left(\widehat{x}_i^0, (p^s, p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J \widehat{y}_{ij} r_j^s(p^s))_{s=1}^S\right) > V_i\left(x_i^0, (p^s, p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s))_{s=1}^S\right)$$

が得られる．したがって，(x_i^0, y_i) は問題 (5.5) の解ではない． ///

二つの問題，(5.4) と (5.5) は実質的に同じだが，最大化問題 (5.5) は制約式が 1 本のみなので，最大化問題 (5.4) の代わりに (5.5) を用いたほうが一階条件が簡単になる．

先に定義した V_i を用いれば，問題 (5.1) は次の最大化問題として書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
\max_{\substack{(x_1,\cdots,x_I)\in X_1\times\cdots\times X_I,\\ (p^1,\cdots,p^S)\in \boldsymbol{R}^{NS},\\ (y_1,\cdots,y_I)\in \boldsymbol{R}^J\times\cdots\times\boldsymbol{R}^J}} \quad & \left(V_i\left(x_i^0,\left(p^s,p^s\cdot e_i^s+\sum_{j=1}^J y_{ij}r_j^s(p^s)\right)_{s=1}^S\right)\right)_{i=1}^I \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^I x_i=\sum_{i=1}^I e_i, \\
& \sum_{i=1}^I y_i = 0
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

ただし，任意の $i\in\{1,\cdots,I\}$ について，以下の最大化問題

$$
\begin{aligned}
\max_{(\widehat{x}_i^1,\cdots,\widehat{x}_i^S)} \quad & U_i(x_i^0,\widehat{x}_i^1,\cdots,\widehat{x}_i^S) \\
\text{subject to} \quad & \text{全ての } s\in\{1,\cdots,S\} \text{ について} \\
& p^s\cdot\widehat{x}_i^s\le p^s\cdot e_i^s+\sum_{j=1}^J y_{ij}r_j^s(p^s)
\end{aligned}
$$

の解が $(x_i^1,\cdots,x_i^S)$ であり，その最大値が $V_i(x_i^0,(p^1,w_i^1),\cdots,(p^S,w_i^S))$ である．

さらに，このパレート問題 (5.6) について，次の仮定をおけば，$(x_1,\cdots,x_I)$ と $(y_1,\cdots,y_I)$ だけを操作変数とする最大化問題に書き換えることができる．

5.2.6 仮定 ポートフォリオベクトルの配分についての集合 Y を以下のように定義する．

$$
Y:=\left\{y=(y_1,\cdots,y_I)\in\boldsymbol{R}^J\times\cdots\times\boldsymbol{R}^J \;\middle|\; \sum_{i=1}^I y_i=0\right\}
$$

つまり，集合 Y に含まれるポートフォリオベクトルの配分は必ず資源制約を満たす．

任意の AME におけるポートフォリオ配分 $(y_1^*,\cdots,y_I^*)\in Y$ と時点 1 のスポット価格ベクトル $(p^{*1},\cdots,p^{*S})$ に対し，十分小さな $\epsilon>0$ を取れば，以下の条件を満たす，$(y_1^*,\cdots,y_I^*)$ の $\epsilon-$ 近傍と Y の共通部分を定義域に含む，$(p^{*1},\cdots,p^{*S})$ の $\epsilon-$ 近傍への方向微分可能な関数 G が存在する．G の定義域の任意の $y:=(y_1,\cdots,y_I)$ に対し，以下の条件を満たす $(p^s,(x_1^s,\cdots,x_I^s))_{s=1}^S$ が存在する．$(p^1,\cdots,p^S)=(G^1(y),\cdots,G^S(y))$ であり，

1. 任意の $s\in\{1,\cdots,S\}$ に対し，$p_1^s=1$ である．
2. 任意の $i\in\{1,\cdots,I\}$ と x_i に対し，$(x_i^1,\cdots,x_i^S)$ は次の問題の解である．

$$
\begin{aligned}
\max_{(\widehat{x}_i^1,\cdots,\widehat{x}_i^S)} \quad & \widehat{U}_i(\widehat{x}_i^1,\cdots,\widehat{x}_i^S) \\
\text{subject to} \quad & \text{全ての } s\in\{1,\cdots,S\} \text{ について} \\
& p^s\cdot\widehat{x}_i^s\le p^s\cdot e_i^s+\sum_{j=1}^J y_{ij}r_j^s(p^s)
\end{aligned}
$$

$\widehat{U}_i$ は時点 1 での効用関数を表す (例 5.2.2 における $U_i=u_i^0+\widehat{U}_i$).

3. 任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ に対し，
$$\sum_{i=1}^{I} x_i^s = \sum_{i=1}^{I} e_i^s$$
が成り立つ．

方向微分については後に述べる．仮定 5.2.6 は単に技術的な要請なのではなく，任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，AME の均衡スポット価格ベクトル p^s が regular であることを要請している[12]．また，仮定 5.2.6 は，陰関数定理 (implicit function theorem) との関係から考えることができる．効用関数の時点についての加法分離性に加えて，状態についての加法分離性も仮定できる時に，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ において，価格 p^s に対する状態 s の財の総超過需要関数のヤコビ行列 (Jacobian matrix) の階数が $N-1$ であるならば，陰関数定理から仮定 5.2.6 が成立することが分かる．このヤコビ行列の階数についての条件こそまさに価格 p^s についての regularity に他ならない．

仮定 5.2.6 により，ポートフォリオ配分 $(y_1, \cdots, y_I)$ を固定すれば，時点 1 の AME の均衡スポット価格ベクトルは $(y_1, \cdots, y_I)$ の連続微分可能な関数を用いて表せる．したがって，最大化問題 (5.6) により強い意味で制約条件つき効率的であることを調べる場合は以下の最大化問題を考えれば十分である．

$$\begin{aligned} \max_{(x_1^0, \cdots, x_I^0), (y_1, \cdots, y_I)} \quad & \left(V_i \left(x_i^0, \left(G^s(y), G^s(y) \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s (G^s(y)) \right)_{s=1}^{S} \right) \right)_{i=1}^{I} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{I} x_i^0 = \sum_{i=1}^{I} e_i^0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2.7 注意 問題 (5.7) の制約を満たす $(x_1^0, \cdots, x_I^0), (y_1, \cdots, y_I)$ に対応して得られる $(x_1, \cdots, x_I)$ は弱い意味で制約条件つき実行可能であるが，G の定義域は AME におけるポートフォリオ配分の近傍なので，任意の弱い意味で制約条件つき実行可能である配分が問題 (5.7) の制約を満たすとは限らない．

AME の配分 $((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*))$ が問題 (5.7) の解でないことを確認すれば，AME の財配分 $(x_1, \cdots, x_I)$ がこの章の意味での制約条件つき効率性を満たさないことが言える．以下では，問題 (5.7) を用いて制約条件つき効率性を満たすための条件を導く．その前に，方向微分を導入する．部分集合 $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$ について連続関数 $F : A \to \boldsymbol{R}^m$ に対し，$t \in \boldsymbol{R}_{++}, y, z, y + tz \in A$ である時，
$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{F(y+tz) - F(y)}{t} - \nabla F(y; z) \right\| = 0$$
を満たすような $\nabla F(y; z)$ が存在するならば，$\nabla F(y; z)$ を関数 F の点 y における z 方向への方向微分と呼ぶ．仮に $F(y)$ の全ての要素が点 $y \in A$ で全ての引数について偏微分可能で，かつその偏微分が点 y において連続ならば，F の点 y におけるヤコビ行列を $J_F(y)$ とした時に，
$$\nabla F(y; z) = J_F(y) z$$
となる．以下で簡単な証明を与える．F の第 i 要素 F_i について平均値の定理を n 回繰り返し適用することで，
$$\frac{F_i(y+tz) - F_i(y)}{t} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i(y)}{\partial y_j} + \epsilon_{ij}(z, t) \right) z_j$$

[12] regularity の定義については Magill-Shafer[1991] 1541.p を参照せよ．

と書ける．ここで

$$\epsilon_{ij}(z,t)=\frac{\partial F_i(y_1,\cdots,y_{j-1},y_j+\theta_{ij}z_j,y_{j+1}+tz_{j+1},\cdots,y_n+tz_n)}{\partial y_j}-\frac{\partial F_i(y)}{\partial y_j}$$

である．ただし $\theta_{ij}\in[0,t]$ である．$t\to 0$ とすれば F の偏微分についての連続性から $\epsilon_{ij}(z,t)\to 0$ なので，目的の等式を得る．なぜ方向微分を導入するのかと言えば，仮定 5.2.6 における関数 G について，ポートフォリオについての資源制約を常に満たすように定義域を限定した場合に，通常の意味での偏微分ができない場合もあるからである．

ここで仮定 5.2.6 における関数 G について，その微分可能性をより詳しく見ていこう．Y は線形部分空間であることが容易に確認できるので，AME のポートフォリオ配分を $y^*\in Y$ とし，その $\epsilon-$ 近傍を $U_\epsilon(y^*)$ と置けば，$y,z\in U_\epsilon(y^*)\cap Y$ について，十分小さい $t>0$ を取れば，$y+tz\in U_\epsilon(y^*)\cap Y$ であることが言える．よって z 方向への y における方向微分を定義でき，$\nabla G(y;z)$ と表すことができる．

5.2.8 命題 仮定 5.2.6 が成立するとする．また資源制約を満たす任意のポートフォリオ配分を $z=(z_1,\cdots,z_I)$ とする．この時，$\mathrm{AME}(p,q,(x_1^*,y_1^*),\cdots,(x_I^*,y_I^*))$ の財配分 $(x_1,\cdots,x_I)$ が制約条件つき効率的ならば，

$$\sum_{h=1}^{I}\sum_{s=1}^{S}\lambda_h^s(x_h^{*0},(p^s,p^s\cdot e_h^s+\sum_{k=1}^{J}y_{hk}^*r_k^s(p^s))_{s=1}^S)\nabla G^s(y^*;z)\cdot\left(x_h^{*s}-\left(e_h^s-\sum_{k=1}^{J}y_{hk}^*\frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s}\right)\right)=0$$

が成立する．ただし，任意の $i\in\{1,\cdots,I\},s\in\{1,\cdots,S\}$ について

$$\lambda_i^s(x_i^0,(p^1,w_i^1),\cdots,(p^S,w_i^S)):=\frac{\dfrac{\partial V_i}{\partial w_i^s}(x_i^0,(p^1,w_i^1),\cdots,(p^S,w_i^S))}{\dfrac{\partial V_i}{\partial x_{i1}^0}(x_i^0,(p^1,w_i^1),\cdots,(p^S,w_i^S))}$$

である．

命題 5.2.8 の証明 $\mathrm{AME}(p,q,(x_1^*,y_1^*),\cdots,(x_I^*,y_I^*))$ の財配分 $(x_1,\cdots,x_I)$ が制約条件つき効率的であると仮定する．仮定 5.2.6 が成立するので，仮定 5.2.6 を満たすような，ポートフォリオ配分から時点 1 のスポット価格への連続関数 G が存在する．

まず AME の一階条件を求める．命題 5.2.5 より，任意の $i\in\{1,\cdots,I\}$ について，効用最大化問題を最大化問題 (5.5) で代理してもよい．最大化問題 (5.5) の一階条件はラグランジュ乗数 $\alpha_i>0$ について以下のように書き表される．

1. (時点 0 の財ベクトルについての 1 階条件) 任意の $n\in\{1,\cdots,N\}$ について，

$$\frac{\partial V_i(x_i^{*0},(G^s(y^*),G^s(y^*)\cdot e_i^s+\sum_{k=1}^{J}y_{ik}^*r_k^s(G^s(y^*)))_{s=1}^S)}{\partial x_{in}^0}-\alpha_i p_n^0=0$$

である．以下では，表記の簡略化のために V_i の独立変数を省略して書く．

2. (ポートフォリオベクトルについての 1 階条件) 任意の $j\in\{1,\cdots,J\}$ について，チェーンルールより

$$\sum_{s=1}^{S}\frac{\partial V_i(\cdot)}{\partial w_i^s}r_j^s(G^s(y^*))-\alpha_i q_j=0$$

である．

この一階条件からラグランジュ乗数 α_i を消去すると，

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\partial V_i(\cdot)}{\partial w_i^s} r_j^s(G^s(y^*)) - \frac{\dfrac{\partial V_i(\cdot)}{\partial x_{i1}^0}}{p_1^0} q_j = 0 \tag{5.8}$$

が得られる．よって，

$$\lambda_i^s(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S)) := \frac{\dfrac{\partial V_i}{\partial w_i^s}(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))}{\dfrac{\partial V_i}{\partial x_{i1}^0}(x_i^0, (p^1, w_i^1), \cdots, (p^S, w_i^S))}$$

とすれば，

$$\sum_{s=1}^{S} \lambda_i^s \left(x_i^{*0}, (G^s(y^*), G^s(y^*) \cdot e_i^s + \sum_{k=1}^{J} y_{ik}^* r_j^s(G^s(y^*)))_{s=1}^S \right) r_j^s(G^s(y^*)) \quad = \quad \frac{q_j}{p_1^0} \tag{5.9}$$

が成立する．以下では，表記の簡略化のために λ_i^s の独立変数を省略して書く．

次に，制約条件つき効率性のための必要条件を求める．この節における効用関数に対しての仮定から，もし AME が制約条件つき効率性を満たすならば，ある $(\mu_1, \cdots, \mu_I) \in \boldsymbol{R}_{++}^I$ とラグランジュ乗数 $(\kappa_1, \cdots, \kappa_N) \in \boldsymbol{R}^N$, が存在し，次の一階条件が成立する．

1. (時点 0 の財ベクトルについての 1 階条件) 任意の $i \in \{1, \cdots, I\}, n \in \{1, \cdots, N\}$ について，

$$\mu_i \frac{\partial V_i(\cdot)}{\partial x_{in}^0} - \kappa_n = 0$$

である．

2. (ポートフォリオ配分の 1 階条件) 任意の $z \in Y$，つまり全ての $j \in \{1, \cdots, J\}$ について $\sum_{i=1}^{I} z_{ij} = 0$ であるような任意の $z \in (\boldsymbol{R}^J)^I$ に対し

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^{I} \mu_h \sum_{s=1}^{S} \frac{\partial V_h(\cdot)}{\partial w_h^s} \sum_{k=1}^{J} r_k^s(G^s(y^*)) z_{hk} \\ + \quad & \sum_{h=1}^{I} \mu_h \sum_{s=1}^{S} \frac{\partial V_h(\cdot)}{\partial p^s} \cdot \nabla G^s(y^*; z) \\ + \quad & \sum_{h=1}^{I} \mu_h \sum_{s=1}^{S} \frac{\partial V_h(\cdot)}{\partial w_h^s} \left(\nabla G^s(y^*; z) \cdot e_h^s + \sum_{k=1}^{J} y_{hk}^* \frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s} \cdot \nabla G^s(y^*; z) \right) \\ = \quad & 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

である[13]．

ここで命題 5.2.4 より，任意の $h \in \{1, \cdots, I\}, s \in \{1, \cdots, S\}$ について，
$-(\partial V_h(\cdot)/\partial w_h^s)^{-1}(\partial V_h(\cdot)/\partial p^s) = x_h^{*s}$ が成立するので，(5.10) の左辺第 2 項目と第 3 項目は

$$\sum_{h=1}^{I} \sum_{s=1}^{S} \mu_h \frac{\partial V_h(\cdot)}{\partial w_h^s} \nabla G^s(y^*; z) \cdot \left(-x_h^{*s} + e_h^s + \sum_{k=1}^{J} y_{hk}^* \frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s} \right)$$

[13] 価格もポートフォリオの操作によって影響を受けるので第 2 項目と第 3 項目が必要になる．

と書き換えられる．よって，

$$\sum_{h=1}^{I}\sum_{s=1}^{S}\mu_h\frac{\partial V_h(\cdot)}{\partial w_h^s}\left(\sum_{k=1}^{J}r_k^s(G^s(y^*))z_{hk}+\nabla G^s(y^*;z)\cdot\left(-x_h^{*s}+e_h^s+\sum_{k=1}^{J}y_{hk}^*\frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s}\right)\right)=0$$

となる．また，任意の $h\in\{1,\cdots,I\}$ について，$\kappa_1=\mu_h\partial V_h(\cdot)/\partial x_{h1}^0$ なので，上の式を κ_1 で割ると，

$$\sum_{h=1}^{I}\sum_{s=1}^{S}\lambda_h^s(\cdot)\left(\sum_{k=1}^{J}r_k^s(G^s(y^*))z_{hk}-\nabla G^s(y^*;z)\cdot\left(x_h^{*s}-\left(e_h^s+\sum_{k=1}^{J}y_{hk}^*\frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s}\right)\right)\right)=0 \quad (5.11)$$

が得られる．(5.11) に (5.9) を代入して整理すると，

$$\sum_{h=1}^{I}\sum_{s=1}^{S}\lambda_h^s(\cdot)\nabla G^s(y^*;z)\cdot\left(x_h^{*s}-\left(e_h^s+\sum_{k=1}^{J}y_{hk}^*\frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s}\right)\right)=\sum_{h=1}^{I}\sum_{k=1}^{J}\frac{q_k}{p_1^0}z_{hk}=0 \quad (5.12)$$

となる．(5.12) の左辺が題意の式なので，AME が制約条件つき効率性を満たすならば，題意の式は 0 に等しい．///

AME の財配分で評価された (5.12) の左辺が 0 に等しければ，AME は制約条件つき効率性の必要条件を満たさないことになるので，AME の財配分は制約条件つき効率的ではない．一般には (5.12) の左辺は 0 にはならない．

次に，(5.12) の左辺が 0 になる例をいくつか挙げる．

5.2.9 例 (1 財の場合) $N=1$ ならば，$G^s=1$ であるので，命題 5.2.8 は自明に成立する．実際，$N=1$ ならば，AME の財配分は制約条件つき効率的である．このことを命題 5.2.8 によらずに示すことができる．

AME ならば当然，弱い意味で制約条件つき実行可能である．また，定義 5.1.5 の条件 2 の最大化問題における不等式制約について，効用関数の強単調性を考えれば，等式制約に変えてもよい．よって，この場合は定義 5.1.5 の条件 2 の操作変数の取る領域は $V_i(p)$ と一致する．さらに，全ての資産が実物資産であるとすれば，1 財の場合は例 4.1.4 より，$V_i(p)$ は p によらずに決定する．すなわち，価格ベクトルによらずに弱い意味で制約条件つき実行可能であるかどうかが決定する．したがって，この場合において，第 4 章とこの章で定義した制約条件つき効率性は同値であると言える．よって命題 4.1.3 より，1 財の場合においては AME の財配分はこの章の意味で制約条件つき効率的である．

次に $N\geq 2$ である場合に，(5.12) の左辺が 0 になるための条件を調べる．任意の $i\in\{1,\cdots,I\}$ について，効用関数 U_i は加法分離性 $U_i(x_i)=\sum_{s=0}^{S}u_i^s(x_i^s)$ を満たすとする．また全ての証券は実物資産であると仮定する．さらに，任意の状態 $s\in\{0,1,\cdots,S\}$ について，AME の均衡スポット価格 p^s は regular であると仮定する．任意の $s\in\{0,1,\cdots,S\}$ について次の問題

$$\max_{x_i^s} u_i^s(x_i^s)$$
$$\text{subject to } p^s\cdot x_i^s\leq w_i^s$$

の解 $f_i^s(p^s,w_i^s)\in\boldsymbol{R}^N$ の第 2 成分から第 N 成分までを $\widehat{f}_i^s(p^s,w_i^s)\in\boldsymbol{R}^{N-1}$ と書くことにする．$\widehat{f}$ は微分可能であると仮定する．ここで，任意の $s\in\{1,\cdots,S\}$ について，関数 $F^s:(\{1\}\times\boldsymbol{R}_{++}^{N-1})\times(\boldsymbol{R}^J)^I\to\boldsymbol{R}^{N-1}$ を

$$F^s(p^s,y):=\sum_{i=1}^{I}\widehat{f}_i^s(p^s,p^s\cdot\left(e_i^s+\sum_{j=1}^{J}y_{ij}a_j^s\right))-\left(\widehat{e}_i^s+\sum_{j=1}^{J}y_{ij}\widehat{a}_j^s\right)$$

と定義する．ただし，$\widehat{e}_i^s = (e_{i2}^s, \cdots, e_{iN}^s), \widehat{a}_j^s = (a_{j2}^s, \cdots, a_{jN}^s)$ である．すなわち，F^s は状態 s における第 2 財から第 N 財までの超過需要関数である．$F^s(p^s, y) = 0$ はポートフォリオ配分が y である時に，AME の均衡スポット価格が p^s であることと同値なので，p^s の regularity から，陰関数定理より，先に定義した C^1 級関数 G が y^* の $\epsilon-$ 近傍で定義可能である．よって，G の方向微分 $\nabla G(y; z)$ は偏微分を使った形式で表現することができ，

$$\nabla G^s(y; z) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\partial G^s(y)}{\partial y_{ij}} z_{ij}$$

である．仮に，$\partial G^s(y)/\partial y_{ij}$ が i に依存しない関数 $A_j^s(y)$ で書けるのであれば，

$$\nabla G^s(y; z) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} A_j^s(y) z_{ij} = \sum_{j=1}^{J} A_j^s(y) \sum_{i=1}^{I} z_{ij} = 0$$

となる．つまり，この場合においては，命題 5.2.8 の仮定を満たす十分条件の一つとして，$\partial G^s(y)/\partial y_{ij}$ が i に依存しないことが挙げられる．

$F^s(G^s(y), y) = 0$ の両辺を y_{ij} で微分すると，

$$\frac{\partial F^s(G^s(y), y)}{\partial \widehat{G}^s(y)} \frac{\partial \widehat{G}^s(y)}{\partial y_{ij}} + \frac{\partial \widehat{f}_i^s(\cdot)}{\partial w_i^s}(p^s \cdot a_j^s) - \widehat{a}_j^s = 0$$

が得られる．ただし，$\widehat{G}^s(y) = (\widehat{G}_2^s(y), \cdots, \widehat{G}_N^s(y))^\top$．したがって，$p^s$ の regularity からヤコビ行列 $\partial F^s(\cdot)/\partial \widehat{G}^s(y)$ の逆行列が存在して，

$$\frac{\partial \widehat{G}^s(y)}{\partial y_{ij}} = -\left(\frac{\partial F^s(G^s(y), y)}{\partial \widehat{G}^s(y)}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \widehat{f}_i^s(G^s(y), G^s(y) \cdot \left(e_i^s + \sum_{j=1}^J y_{ij} a_j^s\right))}{\partial w_i^s}(p^s \cdot a_j^s) - \widehat{a}_j^s\right)$$

が成立する．よって

$$\frac{\partial f_1^s(G^s(y), G^s(y) \cdot \left(e_1^s + \sum_{j=1}^J y_{1j} a_j^s\right))}{\partial w_1^s} = \cdots = \frac{\partial f_I^s(G^s(y), G^s(y) \cdot \left(e_I^s + \sum_{j=1}^J y_{Ij} a_j^s\right))}{\partial w_I^s}$$

が命題 5.2.8 の仮定を満たす十分条件の一つとなる．上の式が成立するためには，例えば，全ての消費者の間接効用関数が Gorman form であればよい[14]．したがって，選好がホモセティックである場合や，CES 効用関数，準線形効用関数の場合に成り立つ．

Gorman form ならば，u_i^s に対する間接効用関数 $v_i^s : \boldsymbol{R}^N \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が以下の w_i^s についてのアフィン形で書ける．

$$v_i^s(p^s, w_i^s) = \alpha_i^s(p^s) + \beta^s(p^s) w_i^s$$

よって一般化された Roy の恒等式から，

$$\begin{aligned} f_i^s(p^s, w_i^s) &= -\left(\frac{\partial v_i^s(p^s, w_i^s)}{\partial w_i^s}\right)^{-1} \frac{\partial v_i^s(p^s, w_i^s)}{\partial p^s} \\ &= -\left(\beta^s(p^s)\right)^{-1} \left(\frac{\partial \alpha_i^s(p^s)}{\partial p^s} + \frac{\partial \beta^s(p^s)}{\partial p^s} w_i^s\right) \end{aligned}$$

が成立する．すなわち

$$\frac{\partial f_i^s(p^s, w_i^s)}{\partial w_i^s} = -\left(\beta^s(p^s)\right)^{-1} \frac{\partial \beta^s(p^s)}{\partial p^s} = -\frac{\partial \log \beta^s(p^s)}{\partial p^s}$$

[14] Gorman form については MWG, Chapter 4 を参照せよ．

となり，i に依存しない形となる．

G に対する条件づけではない，(5.12) の左辺が 0 に等しくなるような条件の 1 例が次の例になる．

5.2.10 例 任意の $h \in \{1, \cdots, I\}$ と $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，

$$x_h^{*s} - \left(e_h^s + \sum_{k=1}^{J} y_{hk}^* \frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s} \right) = 0$$

が成り立つ時，(5.12) の左辺は 0 に等しくなる．この時は，全ての証券が実物資産ならば，

$$x_h^{*s} - \left(e_h^s + \sum_{k=1}^{J} y_{hk}^* a_k^s \right) = 0$$

であるので，初期保有量と証券取引により受け取る消費財をそのまま消費するのが最適になり，スポット市場で追加的な取引は行われない．したがって，すべての消費者の均衡における財配分は virtual endowment であり，(5.12) の左辺は 0 に等しくなる．特に sunspot-free な均衡 (系 4.2.8) は上の式を満たす．

完備市場下では必ず制約条件つき効率性が満たされることが次の命題により分かる．

5.2.11 命題 AME の均衡スポット価格 p について，

$$\text{rank } R(p) = S$$

ならば，(5.12) の左辺は 0 に等しくなる．

命題 5.2.11 の証明 (5.8) を q_j/p_1^0 について解けば，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ について，

$$\frac{q_j}{p_1^0} = \sum_{s=1}^{S} \frac{\partial V_i(\cdot)/\partial w_i^s}{\partial V_i(\cdot)/\partial x_{i1}^0} r_j^s(p^s) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_i^s(\cdot) r_j^s(p^s)$$

が任意の $j \in \{1, \cdots, J\}$ について得られる．また，$p_1^0 = 1$ と標準化しても一般性は失われない．よって，ベクトル $\lambda_i(\cdot) := (\lambda_i^1(\cdot), \cdots, \lambda_i^S(\cdot))^\top \in \boldsymbol{R}_{++}^S$ は状態価格ベクトルになる．さらに，rank $R(p) = S$ より状態価格ベクトルは一意なので，$\lambda(\cdot) := \lambda_1(\cdot) = \cdots = \lambda_I(\cdot)$ であり，i には依存しない．よって，任意の状態 $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=1}^{I} \sum_{s=1}^{S} \lambda^s(\cdot) \nabla G(y^*; z) \cdot \left(x_h^{*s} - \left(e_h^s + \sum_{k=1}^{J} y_{hk}^* \frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s} \right) \right) \\
= \ & \sum_{s=1}^{S} \lambda^s(\cdot) \nabla G(y^*; z) \cdot \left(\sum_{h=1}^{I} (x_h^{*s} - e_h^s) - \sum_{k=1}^{J} \left(\sum_{h=1}^{I} y_{hk}^* \right) \frac{\partial r_k^s(G^s(y^*))}{\partial p^s} \right) \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

となる．最後の等号は需給均衡条件による．よって，(5.12) の左辺は 0 に等しくなる．　///

命題 5.2.11 の証明において，命題 5.2.8 で定義された λ_i^s は状態価格であることが分かる[15]．命題 5.2.8 における λ_i^s の定義式は，消費者 i が状態 s において，追加的に 1 単位の所得 (購買力)

[15] この命題 5.2.11 で見たように rank $R(p) = S$ ならば，状態価格ベクトルは一意となる．また，その逆も成立することを示すことができる．そして，標準的な仮定の下では，市場の完備性と rank $R(p) = S$ は同値である (命題 3.1.3，命題 3.1.4)．このように標準的な仮定の下では，市場の完備性と状態価格の一意性が同値であることが言える．このことをアセットプライシングの第 2 基本定理と呼ぶ．この場合もファイナンスの基本定理と同様に，必ずしも (p, q) が AME の均衡価格である必要はない．

を得るために，時点 0 で犠牲にしてもよい ($p_1^0 = 1$ であるような価値基準財の) 価値額を与えているので，確かに状態価格と見なすことができる．

命題 3.1.3 より，命題 5.2.11 の条件 rank $R(p) = S$ は価格 p の下で市場が完備であることを意味する．命題 4.1.2 より，AME の均衡スポット価格ベクトルの下で市場が完備ならば，AME の財配分はパレート効率的であり，これは命題 5.2.11 と整合的な結果である．

第 6 章　証券市場均衡の存在

6.1　証券市場均衡の存在証明

伝統的な一般均衡理論における競争均衡の存在の証明は次の命題による．

6.1.1 命題 $\Delta := \{p \in \boldsymbol{R}^L_{++} \mid \sum_{l=1}^L = 1\}$ とおく．関数 $f : \Delta \to \boldsymbol{R}^L$ が以下の性質を満たすとする．

1. **連続性** f は連続関数である．

2. **ワルラス法則** 任意の $p \in \Delta$ に対し，$p \cdot f(p) = 0$ が成り立つ．

3. **下への有界性** ある $b \in \boldsymbol{R}^L$ が存在して，$f(p) > b$ が任意の $p \in \Delta$ について成り立つ．

4. **境界挙動条件** Δ 上の任意の点列 $(p_m)_{m \in \boldsymbol{N}}$ に対し，ある $p \in \boldsymbol{R}^L_+ \setminus (\boldsymbol{R}^L_{++} \cup \{0\})$ が存在して，$p_m \to p$ ならば，$\|f(p_m)\| \to \infty$ である．

この時，ある $p \in \Delta$ が存在して，$f(p) = 0$ が成り立つ．

競争均衡の存在証明においては f を財の超過需要関数，p を価格ベクトルと見なす．具体的な証明は MWG の Chapter 17, Section 17.C, Proposition 17.C.1, pp. 585 – 587 を参照されたい．

6.1.2 注意 命題 6.1.1 では関数 f の 0 次同次性は仮定されていない．しかし，定義域を Δ 内に限定するために，f は元々は，$\boldsymbol{R}^L_{++}$ 上で定義された 0 次同次関数であると解釈できる．また，たとえ f が $\boldsymbol{R}^L_{++}$ 上で定義されていて，0 次同次でない場合でも，命題 6.1.1 は Δ 上で少なくとも一つの均衡が存在することを示している．

AME の存在を示すには，効用最大化問題を伝統的な一般均衡モデルの効用最大化問題に近い形に書き直す必要がある．そのために，まず，次の AME における効用最大化問題

$$
\begin{aligned}
\max_{(x_i, y_i)} \quad & U_i(x_i) \\
\text{subject to} \quad & p^0 \cdot x_i^0 \leq p^0 \cdot e_i^0 - q \cdot y_i \\
& \text{任意の } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ に対し } p^s \cdot x_i^s \leq p^s \cdot e_i^s + \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s)
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

をポートフォリオベクトル y_i とペイオフ関数 r_j^s に依存しない形に書き換える．ただし，任意の $j \in \{1, \cdots, J\}, s \in \{1, \cdots, S\}$ に対し，r_j^s は 1 次同次であり，効用関数 U_i は強単調であると仮定する．効用関数の強単調性から予算制約は等号で成立するとしてよい．まず $s \in \{1, \cdots, S\}$ の予算制約は，

$$
\begin{pmatrix} p^1 \cdot (x_i^1 - e_i^1) \\ \vdots \\ p^S \cdot (x_i^S - e_i^S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^1(p^1) & \cdots & r_J^1(p^1) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^S(p^S) & \cdots & r_J^S(p^S) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{iJ} \end{pmatrix} = R(p) y_i
$$

と書ける．ただし，$R(p)$ は時点 1 でのスポット価格 p で評価したペイオフ行列である．この条件は

$$\begin{pmatrix} p^1 \cdot (x_i^1 - e_i^1) \\ \vdots \\ p^S \cdot (x_i^S - e_i^S) \end{pmatrix} \in \mathrm{Col}\ R(p) \tag{6.2}$$

と同値である．次に効用関数の強単調性から均衡において裁定取引は存在しない (命題 2.1.2) ので，ファイナンスの基本定理 (定理 2.2.1) により，状態価格ベクトル $(\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top \in \boldsymbol{R}^S_{++}$ が存在する．したがって，予算制約が等号成立することに注意すれば，

$$\sum_{s=1}^S \lambda^s p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) = \sum_{s=1}^S \lambda^s \left(\sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s) \right) = \sum_{j=1}^J y_{ij} \sum_{s=1}^S \lambda^s r_j^s(p^s) = \sum_{j=1}^J y_{ij} q_j = -p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0)$$

が成立する．ここで $\lambda^0 = 1$ とすれば，時点 0 での予算制約は

$$\sum_{s=0}^S \lambda^s p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) = 0$$

である．上の式と (6.2) が作る予算集合は元の問題 (6.1) の予算集合と同じなので，実物資産の仮定から，操作変数を $z_i := x_i - e_i$ として，効用最大化問題を

$$\begin{aligned} \max_{z_i} \quad & U_i(z_i + e_i) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{s=0}^S \lambda^s p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) \leq 0 \\ & \begin{pmatrix} \lambda^1 p^1 \cdot (x_i^1 - e_i^1) \\ \vdots \\ \lambda^S p^S \cdot (x_i^S - e_i^S) \end{pmatrix} \in \mathrm{Col}\ R(\lambda^1 p^1, \cdots, \lambda^S p^S) \end{aligned} \tag{6.3}$$

と書き換えられる．この問題 (6.3) の解を f_i とする．第 3 章における ADE について思い出してほしいが，AME における均衡配分を ADE において達成する時に，その ADE の均衡価格は元の AME のスポット均衡価格に対し，各状態に対応した状態価格を掛けたものであった (定理 3.2.2)．つまり，証券市場の経済におけるスポット価格を Arrow-Debreu 的な経済で状態依存財の価格として用いるためには，状態価格をかける必要がある．この問題 (6.3) においても同じ議論ができて，AME における時点 0 のスポット価格と時点 1 におけるスポット価格を 1 つの予算制約で表現するためには，つまり AME における消費者の効用最大化問題を Arrow-Debreu 的な経済における効用最大化問題として表現するには，時点 1 のスポット価格に状態価格をかける必要がある．実際に問題 (6.3) における 2 つ目の部分空間についての制約を無視できるならば，問題 (6.3) は ADE における効用最大化問題と同一の形になる．この部分空間についての制約が無視できる場合の一つの例がペイオフ行列 $R(p)$ の階数が任意の p について状態数 S であることである (市場の完備性の十分条件 (命題 3.1.3))．

この問題 (6.3) の解は $f_i(\lambda^0 p^0, \lambda^1 p^1, \cdots, \lambda^S p^S)$ と書くべきであるが，p は任意の値を取りうるので前述の議論から Arrow-Debreu 的な経済の効用最大化問題として見なせば，状態依存財の価格を p と見なして $f_i(p^0, p^1, \cdots, p^S)$ と書いてもよい．つまり，$\lambda^0 = \lambda^1 = \cdots = \lambda^S = 1$ と仮定できる．このことは定理 3.2.3 の証明における考え方と同じである．よって，Arrow-Debreu 的な経済において超過需要関数を 0 にするような価格 p は，同じ財配分を達成する AME

における均衡スポット価格と見なせる．また，効用関数や消費集合等に対する標準的な仮定が満たされるとすれば，問題 (6.3) の解は一意に決定されるので f_i は p の関数である．等式 $\sum_{i=1}^{I} f_i(p)=0$ が成り立つならば，ある $q\in \boldsymbol{R}^J$ と $(y_1,\cdots,y_I)\in \boldsymbol{R}^J\times\cdots\times\boldsymbol{R}^J$ が存在して，$(p,q,((f_1(p)+e_1,y_1),\cdots,(f_I(p)+e_I,y_I)))$ は AME である[1]．すなわち，AME が存在することは $f:=\sum_{i=1}^{I} f_i$ に対し，$f(p)=0$ を満たす p が存在することと等しい．このような p の存在を言うためには f が命題 6.1.1 の 4 つの条件を満たすことを確認すればよい．ワルラス法則を満たすことと下に有界であることは明らかなので，境界挙動条件と連続性について調べる．

次の例では，境界挙動条件が満たされない．

6.1.3 例 $N=1, S=2, J=1$ とする．消費者 $i\in\{1,\cdots,I\}$ の効用関数を

$$U_i(x_i):=u_i(x_i^0)+\frac{1}{2}u_i(x_i^1)+\frac{1}{2}u_i(x_i^2)$$

と定める．ただし，u_i は稲田条件を満たすとする．消費者 i の初期保有量は $e_i=(3,1,1)$ とする．ペイオフ行列は

$$R(p)=\begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{pmatrix}$$

と定める．つまり，必ず財 1 単位を受け取る実物資産 (安全資産) だけが証券市場で取引される．問題 (6.3) の部分空間についての制約が成立することは，ある $\eta\in\boldsymbol{R}$ が存在し，

$$\begin{pmatrix} p_1^1 z_{i1}^1 \\ p_1^2 z_{i1}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{pmatrix}\eta$$

を満たすという事なので $(p_1^1 z_{i1}^1, p_2^2 z_{i1}^2)^\top$ が $(p_1^1,p_1^2)^\top$ のスカラー倍になるということである．つまり $z_{i1}^1=z_{i1}^2$ である，ということである．したがって，$z:=z_{i1}^1=z_{i1}^2$ とおいてよい．ここで任意の正の整数 m について $p_m:=(1/2,1/2-1/m,1/m)$ として，Δ 上の点列 $(p_m)_{m\in\boldsymbol{N}}$ を考える．この時，$p_m\to(1/2,1/2,0)\notin\Delta$ なので，問題 (6.3) の第 1 の制約が成立するということは，

$$\sum_{s=0}^{2} p_m^s z_{i1}^s=\frac{z_{i1}^0}{2}+\frac{z}{2}=0$$

が成立する，ということである．よって，$z_{i1}^0=-z$ とおいてよい．したがって効用最大化問題は以下の制約なしの最大化問題として書き換えることができる．

$$\max_z u_i(3-z)+\frac{1}{2}u_i(1+z)+\frac{1}{2}u_i(1+z)$$

この場合，u_i についての仮定から任意の $m\in\boldsymbol{N}$ についてその解は $z=1$ である．よって境界挙動条件 $\|f_i(p_m)\|\to\infty$ は満たされない．なぜ効用最大化解が任意の $m\in\boldsymbol{N}$ について定数になるかということについて経済学的な考察を行う．この場合の証券価格は，状態価格が任意の状態で 1 に等しいと仮定できることに注意して，

$$p_{m1}^1+p_{m1}^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$$

となり，m に依存せずに証券価格が決まる．つまり，時点 0 での予算制約は m に依存しない．また時点 1 での予算制約については $N=1$ かつ証券がすべて実物資産であるという仮定から，時点 1 での予算制約を満たすか否かはスポット価格によらず決定する．つまり，時点 1 での予算制約もまた m に依存しない．これらのことから，この消費者が直面する予算制約は m に依存しないので，その効用最大解もまた m に依存せずに決定する定数となる．

[1] 状態価格は仮定より $\lambda^1=\cdots=\lambda^S=1$ とできる．

例 6.1.3 のように境界挙動条件が一般には満たされないので，AME の存在証明には次のような論法を使う．まず，消費者 1 について問題 (6.3) における部分空間の制約を除外した効用最大化問題を考える．この問題の解 $\hat{f}_1$ は通常の純粋交換経済における効用最大化問題の解と同一視できるので，境界挙動条件を満たす．また $\sum_{i=2}^{I} f_i$ は下に有界であるので，任意の点列について $-\infty$ に発散することもなく，結果として $\hat{f}_1 + \sum_{i=2}^{I} f_i$ は境界挙動条件を満たす．ある価格 p について $\hat{f}_1(p) + \sum_{i=2}^{I} f_i(p) = 0$ が成り立つならば，Col $R(p)$ は線形部分空間であるので，$\hat{f}_1(p) = -\sum_{i=2}^{I} f_i(p) \in \text{Col } R(p)$ も成り立つ．よって，$\hat{f}_1(p)$ は部分空間の制約を加えた効用最大化問題，つまり問題 (6.3) の解でもある．したがって，p は AME の均衡価格となる．このように，まずある消費者について部分空間の制約を外して均衡を求め，次に，この均衡において部分空間の制約が満たされているということを確認するという論法は Cass trick と呼ばれる．

連続性についてはペイオフ行列

$$R(p) = \begin{pmatrix} r_1^1(p^1) & \cdots & r_J^1(p^1) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^S(p^S) & \cdots & r_J^S(p^S) \end{pmatrix}$$

の階数は常に整数の値を取るので，$R(p)$ の階数が p に依存する場合は p の連続関数ではない．よって，Col $R(p)$ は p の連続対応ではない．したがって，一般には f_i は p について連続とは言えない．すなわち，AME が存在しないということがありうる[2]．

しかし，次の例のように Δ 上のほとんど至るところで Col $R(p)$ が p の連続対応である場合もある．

6.1.4 例 $N = 2, S = 2, J = 2$ とする．ペイオフ行列を以下のように定める．

$$R(p) = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_1^2 \end{pmatrix}$$

この時，$\det R(p) = p_1^2(p_1^1 - p_2^1)$ なので，p の取る範囲を Δ 上に限定すれば，

$$\text{rank } R(p) = \begin{cases} 1, & \text{if } p_1^1 = p_2^1 \\ 2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる．$\{p = (p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2)^\top \in \boldsymbol{R}^4 \mid p_1^1 = p_2^1\}$ の次元は 3 であるので，$\boldsymbol{R}^4$ 上ではルベーグ測度ゼロとなる．つまり，rank $R(p)$ は Δ 上において，ほとんど至るところで rank $R(p) = 2 = S$ となる．

例 6.1.4 は Δ 上において，ほとんど至るところで $R(p)$ の階数が一定である例であったが，価格 p の変化に対してペイオフ行列の階数が変化しなければ，連続性は満たされる．具体的には次の場合が考えられる．

1. 全ての証券が名目資産である場合
   問題 (6.3) における部分空間の制約の表現を可能にするための仮定として，全ての証券が実物資産であるという仮定があった．しかしながら，全ての証券が名目資産である場合は，問題 (6.3) における部分空間の制約はそのまま適用できない．全ての証券が名目資産である時に，Werner[1985] は AME における元々の効用最大化問題 (6.1) をそのまま用いることで，AME の存在証明を行っている．

[2] 点列 $(p_m)_{m \in \boldsymbol{N}}$ が $p_m \to p$ である時，任意の正の整数 M について，ある正の整数 $m' > M$ が存在し，rank $R(p_{m'}) \geq$ rank $R(p)$ を満たす．これはペイオフ行列の階数が極限においていきなり大きくなることはありえないということである (逆に小さくなることはありうる)．$R(p)$ の 1 次独立な列ベクトルの最大個数がどのような時に変化するかを考えれば明らかである．

2. 全ての証券が real numeraire asset の場合
   全ての証券を実物資産とする．ここで任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，ある $n_s \in \{1, \cdots, N\}$ が存在し，任意の $j \in \{1, \cdots, J\}$ と全ての $m \in \{1, \cdots, N\} \setminus \{n_s\}$ に対して

$$a^s_{jm} = 0$$

   が成立するとする．この時,

$$R(p) = \begin{pmatrix} p^1_{n_1} a^1_{1n_1} & \cdots & p^1_{n_1} a^1_{Jn_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^S_{n_1} a^S_{1n_S} & \cdots & p^S_{n_S} a^1_{Jn_S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^2_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^S_{n_S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_{1n_1} & a^1_{2n_1} & \cdots & a^1_{Jn_1} \\ a^2_{1n_2} & a^2_{2n_2} & \cdots & a^2_{Jn_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^S_{1n_S} & a^S_{2n_S} & \cdots & a^S_{Jn_S} \end{pmatrix}$$

   となるので，Δ 上では $R(p)$ の階数は p には依存しない．

AME が存在しないような例が次の例になる．

6.1.5 例 $N = 2, S = 2, J = 2, I = 2$ とする．また時点 0 で消費は行われないものとする．さらに，時点 1 において状態 1 では財 1 のみが取引され，状態 2 では財 1 と財 2 の両方が取引されるものとする．ペイオフ行列を以下のように定める．

$$R(p) = \begin{pmatrix} p^1_1 & p^1_1 \\ p^2_1 & p^2_2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\text{rank } R(p) = \begin{cases} 1, & \text{if } p^2_1 = p^2_2 \\ 2, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.4}$$

である．ここで $0 < \alpha < \beta$ とし，消費者 1 について，その効用関数と初期保有量を

$$\begin{aligned} U_1(x_1) &:= x^1_{11} + \alpha \log x^2_{11} + \beta \log x^2_{12} \\ e_1 &= (e^1_{11}, (e^2_{11}, e^2_{12}))^\top \end{aligned}$$

と定め，消費者 2 について,

$$\begin{aligned} U_2(x_2) &:= x^1_{21} + \beta \log x^2_{21} + \alpha \log x^2_{22} \\ e_2 &= (e^1_{21}, (e^2_{21}, e^2_{22}))^\top \end{aligned}$$

と定めるものとする．ただし，時点 0 での初期保有量は 0 とする．よって消費者の効用は準線形効用関数で表される．さらに仮定として,

$$\gamma := e^2_{11} + e^2_{21} = e^2_{12} + e^2_{22}$$
$$e^2_{11} + e^2_{12} \neq e^2_{21} + e^2_{22}$$

とする．第 1 の仮定は財 1 と財 2 の状態 2 における総初期保有量が等しいことを示していて，第 2 の仮定はもし状態 2 におけるスポット価格が 2 つの財で等しいならば，両消費者の可処分所得が異なるということを示している．

これらの設定の下でこの経済の AME は存在しない．このことを以下で証明していく．証明の方法として市場が完備ないしは不完備な場合に AME が存在するとして矛盾を導く．

仮に市場が完備であるような AME が存在するならば，その配分は ADE と一致する (定理 3.2.2)．よって，ADE の効用最大化問題を考える．準線形効用関数を持つので，ラグランジュ関数の最大化条件においてラグランジュ乗数は 1 に等しくなる．消費者 1,2 の効用最大化条件と資源制約から，状態 2 における財 1 の配分について

$$\alpha\frac{1}{x_{11}^2} = \beta\frac{1}{x_{21}^2}$$
$$x_{11}^2 + x_{21}^2 = \gamma$$

が成立する．これを解くと

$$x_{11}^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\gamma, \quad x_{21}^2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\gamma$$

である．同様に，状態 2 における財 2 の配分について

$$x_{12}^2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\gamma, \quad x_{22}^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\gamma$$

である．よって，均衡における状態 2 での消費者 1 の効用関数の勾配ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \alpha/x_{11}^2 \\ \beta/x_{12}^2 \end{pmatrix} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．これはすなわち $p_1^2 = p_2^2$ であることに等しいので，市場の完備性と矛盾．したがって，市場が完備であるような AME は存在しない．

市場が完備でないような AME が存在するとする．この時，スポット均衡価格について $p_1^2 = p_2^2$ である．この時，2 つの証券は区別されず，この AME においては証券の取引は行われないと仮定してよい (無裁定価格付けの原理からまったく区別されない証券の価格は等しい．加えて，時点 0 での初期保有量が 0 かつ，時点 0 で消費を行わないので，時点 0 における証券に対するネットの投資額が 0 でなくてはならない)．また，状態について加法分離的な効用関数なので，消費者 1 については

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{(x_{11}^2, x_{12}^2)} & \alpha\log x_{11}^2 + \beta\log x_{12}^2 \\ \text{subject to} & x_{11}^2 + x_{12}^2 \leq e_{11}^2 + e_{12}^2 \end{array}$$

の最適解が時点 1 の状態 2 における効用最大化解と等しくなる．この問題を解くと

$$x_{11}^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(e_{11}^2 + e_{12}^2), \quad x_{12}^2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(e_{11}^2 + e_{12}^2)$$

である．同様に消費者 2 について

$$x_{21}^2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(e_{21}^2 + e_{22}^2), \quad x_{22}^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(e_{21}^2 + e_{22}^2)$$

である．したがって資源制約から

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\omega_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\omega_2 &= \gamma \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta}\omega_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\omega_2 &= \gamma \end{aligned}$$

である．ただし，$\omega_i = e_{i1}^2 + e_{i2}^2, i = 1, 2$ である．$\omega_i, i = 1, 2$ について解けば，

$$\omega_1 = \omega_2 = \gamma$$

である．しかし，仮定より $\omega_1 \neq \omega_2$ なので矛盾．したがって，市場が完備でないような AME が存在しない．

以上より，このような経済においては AME は存在しないことが分かる．

標準的な純粋交換経済と証券市場を含む経済の大きな違いは，価格が財の相対的な価値を決定するだけではなく，将来の予算制約に対する部分空間の制約にも影響を与えることである．このことが均衡の存在やその効率性などについて標準的な純粋交換経済とは異なる議論を展開しなくてはならない要因になっている．実際に市場が完備であれば，部分空間の制約を無視することができるので，この講義を通して見たように標準的な純粋交換経済と変わらない結果を得ることができる．

付 録 A　付録

A.1　局所非飽和性

局所非飽和は強単調性より弱い仮定である．本文の多くの議論では強単調性を要件としたが，局所非飽和に置き換えるだけで，また違った結論となる場合もある．

A.1.1　局所非飽和性と効用最大化

A.1.1 命題 U_i が局所非飽和であるとする．価格 (p,q) についてある $x_i^* \in X_i, y_i^* \in \boldsymbol{R}^J$ が証券市場における消費者の効用最大化問題の解ならば，(x_i^*, y_i^*) は予算制約の少なくとも一つを等号で満たす.

命題 A.1.1 の証明 (x_i^*, y_i^*) が全ての予算制約を等号で満たさないとする．つまり

$$\begin{aligned}
&p^0 \cdot x_i^{*0} + q \cdot y_i^* < p^0 \cdot e_i^0 \\
&\text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } p^s \cdot x_i^{*s} - \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* r_j^s(p^s) < p^s \cdot e_i^s
\end{aligned}$$

であるとする．この時，y_i^* を固定して以下の集合 C を考える．

$$C := \left\{ \widehat{x}_i \in X_i \;\middle|\; \begin{array}{c} p^0 \cdot \widehat{x}_i^0 + q \cdot y_i^* < p^0 \cdot e_i^0, \\ \text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } p^s \cdot \widehat{x}_i^s - \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^* r_j^s(p^s) < p^s \cdot e_i^s \end{array} \right\}$$

点 x_i^* は集合 C の内点なので，十分小さい半径の x_i^* を中心とした $\boldsymbol{R}^{N(1+S)}$ 上の開球 B を取れば，局所非飽和の仮定より $\widehat{x}_i \in B \subseteq C, U(\widehat{x}_i) > U(x_i^*)$ の存在が言える．これは明らかに (x_i^*, y_i^*) の効用最大化に矛盾する．よって題意は示された．　///

効用関数が強単調ならば，全ての予算制約を等号で成立させることが可能であった．その理由は強単調ならば，任意の状態において，その状態での消費のみを増やすだけで，必ず効用水準を厳密に向上させることができるので，効用最大化を行う上で各状態での超過供給額を使い切ろうというインセンティブが生じるからである．しかしながら局所非飽和の仮定の下では，ある状態の消費のみを増やしたとしても，それが効用水準を厳密に向上させるとは言い切れないので，命題 A.1.1 のような結論に至る．

A.1.2　局所非飽和性とファイナンスの基本定理

命題 2.1.2 は局所非飽和性の下で以下のように書き換えられる．

A.1.2 命題 ある $i \in \{1, \cdots, I\}$ について U_i が局所非飽和であるとする．(p, q) が AME における均衡価格ならば，

$$q \cdot \eta < 0 \tag{A.1}$$

$$\text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } \eta \cdot r^s(p^s) = \sum_{j=1}^{J} \eta_j r_j^s(p^s) > 0 \tag{A.2}$$

を両方とも満たすようなポートフォリオ $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ は存在しない．

命題 A.1.2 の証明 対偶を示す．ある価格ベクトル (p, q) の下で (A.1) と (A.2) を両方とも満たすようなポートフォリオ $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ が存在すると仮定する．この時，任意の $i \in \{1, \cdots, I\}$ に対し，予算制約を満たすような任意の $(x_i, y_i) \in X_i \times \boldsymbol{R}^J$ について，(A.1) と (A.2) より，任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ において，

$$p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i + q \cdot \eta < p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i \leq p^0 \cdot e_i^0 \tag{A.3}$$

$$p^s \cdot x_i^s - \left(\sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) + \sum_{j=1}^{J} \eta_j r_j^s(p^s) \right) < p^s \cdot x_i^s - \sum_{j=1}^{J} y_{ij} r_j^s(p^s) \leq p^s \cdot e_i^s \tag{A.4}$$

が成立する．よって η を固定して以下の集合 C を考える．

$$C := \{\widehat{x} \in \boldsymbol{R}^{N(1+S)} \mid \widehat{x} \text{ は (A.3) と (A.4) を満たす.}\}$$

この時，(A.3) と (A.4) より，x_i は C の内点なので，x_i を中心とする十分小さい半径の開球 B を取れば $B \subseteq C$ とできる．これは任意の i について成立することなので，特に局所非飽和な効用関数を持つ i について，$\widehat{x}_i \in B \subseteq C, U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i)$ を満たす $\widehat{x}_i \in X_i$ が取れる．更に，$(\widehat{x}_i, y_i + \eta)$ もまた予算制約を満たすことから，同じ議論を繰り返し適用できる．したがって局所非飽和な i については，その効用水準を (p, q) の下で予算制約を満たしながらいくらでも大きくできるので，(p, q) の下で効用最大化解は存在しない．///

　また市場の完備性と命題 2.2.4 を用いれば，以下のファイナンスの基本定理の変形が成立することが示せる．

A.1.3 命題 ある価格ベクトル (p, q) について，$q \neq 0$ かつ $\operatorname{rank} R(p) = S$ とした時，以下の 2 条件は同値である．

1. $$q \cdot \eta < 0$$ $$\text{全ての } s \in \{1, \cdots, S\} \text{ について } \eta \cdot r^s(p^s) = \sum_{j=1}^{J} \eta_j r_j^s(p^s) > 0$$ を両方とも満たすようなポートフォリオ $\eta \in \boldsymbol{R}^J$ は存在しない．
2. 全ての $j \in \{1, \cdots, J\}$ について $$q_j = \sum_{s=1}^{S} \lambda^s r_j^s(p^s)$$ を満たすようなベクトル $\lambda := (\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top \in \boldsymbol{R}_+^S \setminus \{0\}$ が存在する．

命題 A.1.3 の証明

$$B := \begin{pmatrix} -q_1 & \cdots & -q_J \\ r_1^1(p^1) & \cdots & r_J^1(p^1) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^S(p^S) & \cdots & r_J^S(p^S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q^\top \\ \hline R(p) \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(1+S)\times J}$$

という行列を定義する．もし，$B\eta \in \boldsymbol{R}_{++}^{1+S}$ であるベクトル η が存在しなければ，命題 2.2.4 より，全ての $j \in \{1, \cdots, J\}$ について

$$q_j \widehat{\lambda}^0 = \sum_{s=1}^{S} \widehat{\lambda}^s r_j^s(p^s)$$

であるようなベクトル $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}^0, \widehat{\lambda}^1, \cdots, \widehat{\lambda}^S)^\top \in \boldsymbol{R}_{+}^{1+S} \setminus \{0\}$ が存在する．ここで $\widehat{\lambda}^0 = 0$ ならば，$(\widehat{\lambda}^1, \cdots, \widehat{\lambda}^S)^\top \in \boldsymbol{R}_{+}^{S} \setminus \{0\}$ は $R(p)$ の全ての列ベクトルと直交するベクトルとなる．しかし，rank $R(p) = S$ よりそのようなベクトルは 0 しかありえず，その場合は $\widehat{\lambda} = 0$ となるので不適．よって $\widehat{\lambda}^0 > 0$ である．このことから，全ての $j \in \{1, \cdots, J\}$ について以下のような書き換えが可能となる．

$$q_j = \sum_{s=1}^{S} \frac{\widehat{\lambda}^s}{\widehat{\lambda}^0} r_j^s(p^s) = \sum_{s=1}^{S} \lambda^s r_j^s(p^s)$$

よって $\lambda := (\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top = (\widehat{\lambda}^1/\widehat{\lambda}^0, \cdots, \widehat{\lambda}^S/\widehat{\lambda}^0)^\top \in \boldsymbol{R}_{+}^{S} \setminus \{0\}$ が条件 2 を満たすベクトルとなることが分かる．　///

命題 A.1.3 における λ は状態価格ベクトルとして考えることができる．効用関数における仮定を強単調性から局所非飽和性まで緩めた時に，AME における状態価格の存在を保証したければ，市場の完備性の仮定を導入する必要があることが分かる．

命題 A.1.2 と命題 A.1.3 を命題 2.1.2 とファイナンスの基本定理の代わりに用いれば，定理 3.2.2 に対応した次の命題も真であることが言える．

A.1.4 命題　ある消費者 i について U_i が局所非飽和であるとする．AME を $(p, q, ((x_1^*, y_1^*), \cdots, (x_I^*, y_I^*)))$ とする時，$q \neq 0$ かつ rank $R(p) = S$ ならば，ある $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^S)^\top \in \boldsymbol{R}_{+}^{S} \setminus \{0\}$ が存在して $((p^0, \lambda^1 p^1, \cdots, \lambda^S p^S), (x_1^*, \cdots, x_I^*))$ は ADE である．

命題 A.1.4 より，命題 4.1.2 は以下のようなスマートな方法で示すことが可能である．

命題 4.1.2 の別の証明命題 A.1.4 より配分 $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ を達成するような ADE が存在する．よって厚生経済学の第一基本定理より $(x_1^*, \cdots, x_I^*)$ はパレート効率的である．　///

A.1.3　局所非飽和性と制約条件つき効率性

局所非飽和な効用関数を想定した上で，完備性の仮定を緩めた場合にはどのような結果が得られるのだろうか．(4.7) の $V_i(p)$ の下で，完備性による補題 4.1.1 に対応する結果を得ることができれば，制約条件つき効率性に対する議論もスムーズになる．

まず以下の命題を示す．

A.1.5 命題 任意の $\epsilon \in \boldsymbol{R}_{++}$ について $A(\epsilon) := \{R(p)\eta \mid \eta \in \boldsymbol{R}^J, \|\eta\| < \epsilon\}$ はバナッハ空間 $\mathrm{Col}\ R(p)$ 上の開集合である．

命題 A.1.5 の証明 写像 $M : \boldsymbol{R}^J \to \mathrm{Col}\ R(p)$ を $M : \eta \to R(p)\eta, \eta \in \boldsymbol{R}^J$ であるようなものとして取る．$\boldsymbol{R}^J$ はバナッハ空間であり，$\mathrm{Col}\ R(p)$ もまた高々有限個のベクトルで張られる線形部分空間なので $\boldsymbol{R}^S$ 上の閉部分空間となり，結果としてバナッハ空間である．したがって写像 M は全射な有界線形写像であるので開写像定理[1]により $A(\epsilon)$ はバナッハ空間 $\mathrm{Col}\ R(p)$ 上の開集合となる． ///

局所非飽和である効用関数 U_i の下での効用最大化解を (x_i^*, y_i^*) として，$U_i(x_i) = U_i(x_i^*)$ であるような $x_i \in V_i(p)$ が存在するとする．また x_i について (3.1) を満たすようなポートフォリオベクトルを $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ とする．局所非飽和の仮定から，x_i を中心とした任意の半径 $\delta \in \boldsymbol{R}_{++}$ の開球の内点に，x_i より厳密に効用水準を改善させる消費計画 $\widehat{x}_i$ が存在する．ここで任意の $s \in \{1, \cdots, S\}$ について，

$$\begin{aligned} \widehat{w}^s &:= p^s \cdot (\widehat{x}_i^s - x_i^s) \\ w^s &:= p^s \cdot (x_i^s - e_i^s) = \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s) \end{aligned}$$

とする．この時，

$$p^s \cdot (\widehat{x}_i^s - e_i^s) = \widehat{w}^s + w^s = \widehat{w}^s + \sum_{j=1}^J y_{ij} r_j^s(p^s)$$

が成立する．次に y_i を固定して，任意の $\epsilon > 0$ について以下の集合を考える．

$$C(\epsilon) := R(p)y_i + A(\epsilon) = \{R(p)(y_i + \eta) \mid \eta \in \boldsymbol{R}^J, \|\eta\| < \epsilon\}$$

$C(\epsilon)$ は命題 A.1.5 における $A(\epsilon)$ をベクトル $R(p)y_i \in \mathrm{Col}\ R(p)$ で平行移動しただけの集合なので，部分空間 $\mathrm{Col}\ R(p)$ 上の開集合である．

仮に $C(\epsilon)$ が $\boldsymbol{R}^S$ 上の開集合ならば，$\widehat{w} := (\widehat{w}^1, \cdots, \widehat{w}^S)^\top$, $w := (w^1, \cdots, w^S)^\top$ として，開球の半径 δ を十分 0 に近づければ，

$$\widehat{w} + w = \widehat{w} + R(p)y_i \in C(\epsilon)$$

とできる．つまり，十分 δ を 0 に近づけさえすれば，ある $(\widehat{x}_i, y_i + \eta)$ を $U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i)$ かつ (3.1) を満たすように取ることができる．

次に時点 0 での予算制約について

$$p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + q \cdot y_i < 0$$

であると仮定する．この時，$\widehat{w}^0 = p^0 \cdot (\widehat{x}_i^0 - x_i^0) + q \cdot \eta$ として，

$$p^0 \cdot (\widehat{x}_i^0 - e_i^0) + q \cdot (y_i + \eta) = p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + q \cdot y_i + \widehat{w}^0$$

である．$\widehat{w}^0$ の定義から，ϵ, δ を十分 0 に近づけることで $\widehat{w}^0$ を

$$p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + q \cdot y_i + \widehat{w}^0 < 0$$

[1]付録の定理 A.2.1 を参照

であるように取ることができる．

このようにして取った $(\widehat{x}_i, y_i+\eta)$ は全ての時点，状態における予算制約を満たしつつ，$U_i(\widehat{x}_i) > U_i(x_i) = U_i(x_i^*)$ であるので，x_i^* の効用最大化に反する．つまり，少なくとも

$$p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + q \cdot y_i \geq 0$$

でなくてはならない．

命題 A.1.5 における $A(\epsilon)$ が $\boldsymbol{R}^S$ 上の開集合でなくては，上の議論は成立しないことはすぐに分かる．$A(\epsilon)$ が $\boldsymbol{R}^S$ 上での開集合となるには，$\mathrm{Col}\, R(p) = \boldsymbol{R}^S$，つまり市場が完備であることが要求される．したがって，$\mathrm{Col}\, R(p)$ に $\widehat{w} + w$ が含まれたりするような幸運な場合を除けば，上の議論は非完備市場において一般に成立しないことが分かる．

しかし，消費者の効用についての仮定を強めると，非完備市場について上の議論を成立させることができる．

A.1.6 命題 U_i が時点 0 の消費に対して局所非飽和であるとし，価格ベクトル (p, q) の下で効用最大化解 (x_i^*, y_i^*) が存在するとする．この時，$U_i(x_i) \geq U_i(x_i^*)$ であるような任意の $x_i \in V_i(p)$ について，時点 1 での予算制約を等号成立させるようなポートフォリオを $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ とすると，(x_i, y_i) は時点 0 の予算制約について，

$$p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i \geq p^0 \cdot e_i^0 \tag{A.5}$$

を満たす．特に $U_i(x_i) > U(x_i^*)$ ならば (A.5) の不等号は必ず厳密な不等号で成立する．

命題 A.1.6 の証明 $x_i \in V_i(p)$ について，$U_i(x_i) > U_i(x_i^*)$ ならば補題 4.1.1 と同様の方法で (A.5) を厳密な不等号で成り立たせることが示せる．よって $U_i(x_i) = U_i(x_i^*)$ である時を考える．x_i の時点 1 での消費を賄うポートフォリオを $y_i \in \boldsymbol{R}^J$ とする．

ここで仮に $p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i < p^0 \cdot e_i^0$ とする．U_i の時点 0 の消費に対する局所非飽和性より，x_i^0 を中心とした任意の半径 $\delta > 0$ の $\boldsymbol{R}^N$ 上の開球に含まれる点 $\widehat{x}_i^0$ を，

$$U_i((\widehat{x}_i^0, x_i^1, \cdots, x_i^S)) > U_i(x_i) = U_i(x_i^*) \tag{A.6}$$

を満たすように取れる．また

$$p^0 \cdot (\widehat{x}_i^0 - e_i^0) + q \cdot y_i = p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + q \cdot y_i + \widehat{w}^0$$

である．ここで $\widehat{w}^0 = p \cdot (\widehat{x}_i^0 - x_i^0)$ である．内積とノルムの連続性から δ を 0 に近づければ近づけるほど $|\widehat{w}^0|$ を 0 に近づけることができるので，十分小さい $\delta > 0$ を

$$p^0 \cdot (\widehat{x}_i^0 - e_i^0) + q \cdot y_i = p^0 \cdot (x_i^0 - e_i^0) + q \cdot y_i + \widehat{w}^0 < 0$$

であるように取れる．この時，(A.6) が満たされ，かつ全ての予算制約を満たすので，x_i^* の効用最大化と矛盾する．よって $p^0 \cdot x_i^0 + q \cdot y_i \geq p^0 \cdot e_i^0$ である．　///

A.2　ベクトル空間

集合 X の任意の要素について加法演算とスカラー倍演算が定義されている場合に X を**ベクトル空間**と呼ぶ.

A.2.1 定義 (ノルム (norm)) ベクトル空間 X について，関数 $\|\cdot\|: X \to \boldsymbol{R}$ が以下の条件を満たす時，$\|\cdot\|$ を X 上の**ノルム**と呼ぶ.

1. 任意の $x \in X$ について，$\|x\| \geq 0$ であり，等号成立は $x = 0$ の時に限る.
2. 任意の $x \in X, \alpha \in \boldsymbol{R}$ について，$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ が成り立つ.
3. (三角不等式) 任意の $x, y \in X$ について，$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成り立つ.

ノルムは X 上の連続な凸関数である．またノルムが定義されたベクトル空間を**ノルム空間**と言う．さらにノルム空間 X について $d(x, y) := \|x - y\|$ とおけば (X, d) は距離空間となる．ノルムは 1 つのベクトル空間に 1 つとは限らず，任意の $x = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$
\begin{aligned}
\|x\| &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad (\text{ユークリッドノルム，} L^2 \text{ ノルム}) \\
\|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad (\text{絶対値ノルム，} L^1 \text{ ノルム}) \\
\forall p \geq 1,\ \|x\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad (L^p \text{ ノルム}) \\
\|x\|_\infty &:= \sup_{i \in \{1, \cdots, n\}} |x_i|, \quad (\text{スープノルム，} L^\infty \text{ ノルム}) \\
\|x\|_A &:= \sqrt{x^\top A x}, \quad (A \text{ は任意の } n \text{ 行 } n \text{ 列の正値定符号な実数行列})
\end{aligned}
$$

などは全てノルムの定義を満たすので $\boldsymbol{R}^n$ 上のノルムとなる.

A.2.2 定義 (内積 (inner product)) ベクトル空間 X について，$x, y \in X$ に対し関数 $x \cdot y : X \times X \to \boldsymbol{R}$ が以下の条件を満たす時，この関数を X 上の**内積**と呼ぶ.

1. 任意の $x \in X$ について，$x \cdot x \geq 0$ であり，等号成立は $x = 0$ の時に限る.
2. 任意の $x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ について，$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$ が成り立つ.
3. 任意の $x, y \in X$ について，$x \cdot y = y \cdot x$ が成り立つ.

内積は X 上の連続関数である．また内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**と言う．さらに内積空間 X について，任意の $x \in X$ に対し，$\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ と定義すれば，$\|\cdot\|$ はノルムの公理を満たす．このようにして作られるノルムを**内積から誘導されたノルム**と言う．よって内積空間は内積から誘導されたノルムによりノルム空間になる．内積空間 X の内積から誘導されたノルムについて**コーシー・シュワルツの不等式**

$$
\text{任意の } x, y \in X \text{ について，} |x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|
$$

(ただし等号成立はある $(\alpha, \beta)^\top \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ が存在して，$\alpha x = \beta y$ である時のみ) と**中線定理**

$$
\text{任意の } x, y \in X \text{ について，} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
$$

が成立する．逆に中線定理を満足するようなノルムはそのノルムを誘導するような内積が存在する．内積空間 X について任意の $x, y \in X$ が $x \cdot y = 0$ を満たすならば，x と y は**直交**すると言う.

A.2.3 定義 (バナッハ空間 (Banach space)，ヒルベルト空間 (Hilbert space)) ノルム空間 X において以下を満たすコーシー列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$,

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$$

の極限 x^* が $x^* \in X$ である時，X は**完備**であると言う．完備なノルム空間を**バナッハ空間**，完備な内積空間を**ヒルベルト空間**と言う．

$\boldsymbol{R}^n$ について通常の内積とその内積から誘導されるユークリッドノルムをおけば $\boldsymbol{R}^n$ はヒルベルト空間となる．またノルムを先ほどのように距離として見なすことで，完備なベクトル空間は完備距離空間となる．

A.2.4 定義 (直交射影 (orthogonal projection)) ヒルベルト空間 X において X 上の閉部分空間を M とする．この時，以下を満たす写像 $P_M : X \to M$ が任意の点 $x \in X$ について定義できる．

$$P_M(x) = \arg\min_{y \in M} \|x - y\|$$

$P_M(x)$ を x の M への**直交射影**と言う．

X をヒルベルト空間，M を X 上の閉部分空間とした時，M への直交射影を与える写像 $P_M : X \to M$ は X 上で連続であり，任意の $x \in X$ について，$P_M(x)$ は一意である．また P_M は線形写像で，かつ冪等性，$P_M \circ P_M = P_M$ を満たす．そして $x - P_M(x) \in M^{\perp}$ である．

A.2.5 定義 (有界線形写像 (bounded linear mapping)) ノルム空間 X と Y について線形写像 $f : X \to Y$ が,

$$\text{ある } K \in \boldsymbol{R}_+ \text{ が存在して，任意の } x \in X \text{ について，} \|f(x)\| \leq K\|x\|$$

を満たす時，f は**有界線形写像**と言う．

任意の有限次元の実数行列 $A \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$ について，関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を $f(x) := Ax$ として定義すると，f は有界線形写像となる．有界線形写像であることと連続な線形写像であることは同値である．よってヒルベルト空間 X 上における閉部分空間 M への直交射影を与える写像 $P_M : X \to M$ は連続な線形写像であるので有界線形写像である．有界線形写像については関数解析学における重要定理の一つである開写像定理が成立する．

A.2.1 定理 (開写像定理 (open mapping theorem)) バナッハ空間 X と Y について有界線形写像 $f : X \to Y$ が全射ならば，f は開写像である．すなわち任意の開集合 $O \subseteq X$ について，集合 $\{f(x) \mid x \in O\} \subseteq Y$ はバナッハ空間 Y における開集合となる．

参考文献

[1] Cass, D. and Shell, K. (1983) "Do Sunspots Matter?," Journal of Political Economy, Vol. 91, No. 2, pp. 193 – 227.

[2] Debreu, G. (1959) "Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium" Yale University Press.

[3] Kajii, A. and Gotardi, P. (1999) "The Structure of Sunspot Equilibria: the Role of Multiplicity," Review of Economic Studies, Vol. 66, No 3, pp. 713 – 732.

[4] LeRoy, S. and Werner, J. (2000) "Principle of Financial Economics," Cambridge University Press.

[5] Magill, M. and Shafer, W. (1991) "Incomplete markets," In: Hildenbrand, W., Sonnenschein, H. (eds) Handbook of Mathematical Economics, Vol. 4, pp. 1523–1614. Elsevier, Amsterdam.

[6] Mas-Colell, A. (1992) "Three Observations on Sunspots and Asset Redundancy" in D. Gale and P. Dasgupta (eds.), Economic Analysis of Markets and Games, MIT Press, Cambridge and London, pp. 465 – 474.

[7] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995) "Microeconomic Theory" Oxford University Press.

[8] Mehra, R. and Prescott, E. (1985) "The Equity Premium: A Puzzle," Journal of Monetary Economics, Vol. 15, pp. 145 – 161.

[9] Selden, L. (1978) "A New Representation of Preferences over "Certain A Uncertain" Consumption Pairs: The "Ordinal Certainty Equivalent" Hypothesis," Econometrica, Vol 46, No 5, pp.1045 – 1060.

[10] Werner, J. (1985) "Equilibrium in Economies with Incomplete Financial Markets," Journal of Economic Theory, Vol. 36, pp. 110 – 119.