

郵貯資金研究協会 助成金対象研究 『非対称情報下での社債発行の理論』報告書： 不完備証券市場における線型合理的期待均衡価格 の情報量について

研究助成金申請代表者 原 千秋*

平成 15 年 5 月 8 日

1 イン트로ダクション

1.1 研究の動機

証券市場を巡る近年の規制緩和の傾向に伴い、企業は設備投資資金や達転資金を多種の社債の発行することで金融市場から直接に調達するようになった。社債の価格は市場での需給関係を通じて決まり、企業は資金調達に必要な費用を最小化する社債を発行することが求められている。この資金調達を円滑にするには、社債を含めた各種証券の公正な取引を保ち、幅広い投資家層を取り込んだ、厚みのある証券市場を確立することが不可欠である。企業の業務・財務状況に関する「情報開示（ディスクロージャー）」は公正な証券取引を実現するための第一歩である。

しかしながら、いかに情報開示を進めても、社債が含有するリスクに関する情報の偏在を完全に取り除くのは困難である。企業のプロジェクトがもたらす利潤や企業全体としての収益率は、その業務内容のみならず、企業を取り巻く産業構造やマクロ経済変数にも大きく依存し、それらの予測にあたっては専門的知識が要求されるからである。それゆえ、市場で取引される債券のリスクに関する情報等が偏在する場合に、それらの価格がいかに決定されるかを理論的に分析するのは、極めて重要である。

1.2 理論的枠組みと研究成果の概要

本稿では、先物契約や株式・社債といった証券のリターンに関する情報が投資家間で偏在するような市場経済で、証券価格が情報伝達のためにいかなる役割を演ずるかを論ずる。より具体的には、市場取引に先立ち、証券のリターンに関する何らかの情報を

*本研究の問題設定から具体的な解法をみつけるに至るまで、大橋和彦氏との数多くの議論が極めて有益であった。ここに感謝の意を表したい。

得た投資家（これを「情報優位的投資家」と呼ぶことにする）と、何ら情報を得ない投資家（これを「情報劣位的投資家」と呼ぶことにする）より成る数理的証券市場モデルを分析の対象とする。この数理モデルでは、証券のリターンや生産技術へのショックなどを表す「リスク・ファクター」と呼ばれる確率変数がいずれも正規分布に従うとされる。また、投資家はいずれもリスク回避的かリスク中立的であり、もしリスク回避的ならば、リスク許容度（Arrow-Prattの絶対的危険回避度の逆数）は消費量に依存せず一定であると仮定する。さらに、一般にこのようなモデルにおいては、投資家がどれほど戦略的に行動するかを明らかにしておくのが肝要であるが、ここではいずれの投資家も価格受容的（price-taking）に行動する、即ち、自らが取引量を替えることが市場価格に及ぼす影響を無視する、と仮定する。以上の特性を備えた数理モデルは、偏在する情報が均衡価格価格を通じて部分的に伝達すること分析するための最も典型的なモデルとして経済学やファイナンスで用いられてきたが、ここでは先行文献の分析範囲を超え、以下の2点に関してより一般的な議論を展開することを目指す。

第1に、市場が不完備であることを許容し、なおかつどのような種類の証券が実際に市場取引に供されているか否かに関しては制約をおかない点である。つまり、市場が不完備である状況を許容し、なおかつ市場がどのように不完備であるか（つまり、どのようなタイプのリスクが市場で取引され得ないか）に依存しない研究結果を導き出している。また、情報劣位的投資家に関しては、証券市場への限定的参加（restricted participation）の状況を許容している。即ち、彼らは市場取引に供される全ての証券を取引できるのではなく、そのうちのいくつか（例えば株式投資信託）は全く取引費用を負担することなく取引できるが、その他の証券（例えば未公開株）はどんなに多額の取引費用を払っても取引できないという状況が、この数理モデルでは分析され得るのである。これは無論各証券を取引するためには有形無形の追加的費用がかかるという事実の、簡便な理論分析のためのやや乱暴な定式化であるが、全ての投資家が等しく全ての証券を取引できるという通常の枠組みに比べると、証券価格の情報の役割を論ずるためには重要かつ有益な一般化である。特に一部の投資家はある証券を取引できないが、その証券の均衡価格を観察することでインサイダー情報を推察できるという状況は、証券のリスク・シェアリングのための機能と情報伝達のための機能を峻別する際に有益なベンチマーク・ケースとなる。

また、リスク・ファクターの数には何ら本質的な制約をおかない点においても、本稿は先行文献より一般的な分析を与えている。つまり、本報告書の研究結果は、例えばリスクファクターが100ある場合でも、1や2しかない場合と同様に依然として成立するのである。このような一般性は、数理モデルの汎用性を高めるためにきわめて重要である。

本稿のモデルでは、情報優位的投資家は、証券取引に先立ってリターンに関する情報と得ると共に、自らの、リスクを伴う資産の大きさ（例えば証券取引に際して、既にどのような企業の株式を保有しているか、また先物取引の対象となる商品を、どれほど生産したか）を知っていると仮定する。したがって、情報優位的投資家の証券取引量は、証券リターンに関する情報とともに、この資産の大きさにも依存する。他方、情報劣位的投資家が証券のリターンに関する情報を得る唯一の方法は、その市場取引価格をみてとり、そこから情報優位的投資家が得たインサイダー情報を推測することである。無論この価格は情報優位的投資家の取引量に依存するのだが、この取引量は後者の資産の大

きさにも依存する．情報劣位的投資家はこの資産の大きさを知らないのか、例えば証券価格が極めて低いときに、その証券はリターンが低いと予想されているのか、それとも情報優位的投資家がたまたま大量に抱え込んでしまったために売りに出しているかを見極めることはできない．したがって一般に、情報劣位的投資家は、市場価格を観察しても、情報優位的投資家が保有する情報全てを推察できるわけではないのである．

そこで本稿では、線型合理的期待均衡 (Linear Rational Expectation Equilibrium)¹における証券価格を通じて情報優位的投資家から情報劣位的投資家に伝えられる情報を、よりわかりやすい方法で特徴付けることを研究の目的とする．本稿の研究結果をより具体的に述べるために、我々の分析対象となる情報伝達のチャンネルを3つ列挙しよう：

チャンネル1 均衡における証券価格

チャンネル2 均衡における情報優位的投資家の取引量

チャンネル3 固定された証券価格の下での、情報優位的投資家の取引量

本稿が用いる均衡概念である合理的期待均衡においては、情報劣位的投資家は均衡における証券価格を観察することによってのみ情報を受け取る．それゆえその均衡概念で想定されている情報伝達のチャンネルは、上掲のチャンネル1にあたる．また、先行文献のいくつかでは、チャンネル2を情報伝達のチャンネルと想定して均衡概念が定義された．詳しく言えば、市場取引を行う前に受け取った情報に応じて取引量を変え、さらにその影響を受けた均衡価格に反応した結果、情報優位的投資家がどのように取引量をかえるかを観察することでインサイダー情報を推測する、というチャンネルである．チャンネル1と2はともに均衡において定まる内生変数（確率ベクトル）であるが、チャンネル3はこれら2つのチャンネルとは異なり、仮想的な変数である．すなわち、証券価格が不確実性に依存しないという想定の下で、情報優位的投資家がリターンに関する情報や自らの資産総額に応じてどのように証券取引量を変えるかを観察することでインサイダー情報を推測する、というチャンネルである.² このチャンネルが仮想的変数であるのは、もし情報優位的投資家が自らの取引量を変化させたなら、需給一致のためには均衡価格も変化せねばならず、その分だけ実際の取引量の変分は小さくなってなければならないからである.³

上の呼称を使えば、本稿の主要結果を以下の通り述べることができる：

1. 全ての投資家がリスク回避的ならば、チャンネル1とチャンネル3は同じ情報を伝える（定理7）．
2. もし情報優位的投資家がリスク中立的ならば、均衡価格は証券リターンに関してこの投資家が保有する全てのインサイダー情報を情報劣位的投資家に伝達する（命題5）．

¹「線型」とは、均衡価格が、情報優位的投資家が受け取る情報を表す確率変数の実現値に線型に依存するということ．

²ここで想定される不確実性に依存しない証券価格のレベルは、裁定取引の機会を許容しないものであれば、どれでも構わない．

³これは、財やサービスに新たに課税したときに、一般にその税額だけ価格が上がるのではなく、価格上昇分は税額を下回るといふ現象に似ている．

3. もし情報優位的投資家がリスク回避的であり、かつ情報劣位的投資家がリスク中立的ならば、複数の均衡が存在し得る。この場合、複数の均衡のうちどれが実現するかに応じて、チャンネル1とチャンネル2のいずれも他方より多くの情報を伝えることがある。

これらの結果は数学的な色彩の強いものであるが、いくつかの重要な経済学的含意をもつことを見逃すわけにはいかない。その第1は均衡価格が伝える情報の一意性とリスク回避度の関係である。経済学やファイナンスでは、証券市場が一国経済に果たす役割についてしばしば議論される。もちろんその中でもっとも重要なのは、証券市場を通じて企業が運転資金や新規投資のための資金を調達すること、それから先物取引などを通じてリスクをヘッジする機会を与えてくれることである。また、副次的なことではあるが、企業の成長や景気の先行き、さらには金融・財政政策の発動などに関するインサイダー情報は、株式や債券、先物契約といった各種証券の価格に反映されるが、その反映された情報を、当初何ら情報を持っていなかった投資家が学び取ることができるということである。つまり、証券市場には、情報伝達の機能も備わっているのである。しかしながら、もし証券市場に複数の均衡が存在して、それらの均衡の間で情報伝達量に差異が存在するならば、この情報伝達の役割の大きさは実現する均衡に依存し、したがって情報の観点から証券市場が経済活動に対して貢献しているとは、直ちには結論付けられないのである。本報告書は均衡価格の情報伝達量の一意性の問題が実は投資家のリスク回避度と深く結びついている点を明らかにしたという点で重要である。

第2の重要な含意は、線型合理的期待均衡価格が伝達する情報は、情報劣位的投資家のリスク回避度や、市場取引前に保有する資産のあり方に依存しない点である。⁴ この結果は、社債の新規発行のような、新しい証券の取引に伴う経済厚生の変化といった経済問題を論ずるとき、価格を介して伝わる情報が新規発行に伴ってどのように変化するかを正確に知る必要がある場合に有用である。⁵ 通常、新規発行前と発行後の情報伝達量がどのように異なるかを知るためには、それぞれの状況で均衡を解かねばならないが（つまり、均衡価格を2回計算するということ）、本報告書の結果によれば、実際に均衡を解くという手間をかけることなく、情報量の変化を見極められるので、厚生の変化もより簡単に知ることができる。この点については、6.2節で数値例を挙げて説明する。

本報告書のモデルでは情報劣位的投資家はなんらインサイダー情報を持っていないので、均衡価格を通じて伝えられる情報が情報劣位的投資家のリスク回避度や資産保有に依存しないという点は当然の結果のように思われるかもしれないが、必ずしもそうではない。というのは、均衡価格はもちろん証券市場で需給が一致するところで決まるので、情報劣位的投資家の特性も、その決定に大いに影響を及ぼすからである。特に、チャンネル1と2が同じ情報を伝達すると証明できたとしても、この「均衡価格が伝達する情報は、情報劣位的投資家のリスク回避度や、市場取引前に保有する資産のあり方に依存しない」という含意は導き出せない点に注意されたい。このチャンネルの情報は

⁴ ここでは情報優位的投資家の初期保有量を表す確率変数はその投資家の特性と考えているが、この確率分布は情報劣位的投資家が、情報優位的投資家の初期保有量に関して抱く期待と解釈することも可能である。もしそうなら、それは情報劣位的投資家の特性のひとつと考えられるべきなので、「情報劣位的投資家の特性に全く依存しない」と言うのは正確でない。

⁵ この種の具体的な分析は、Marin and Rahi (1999,2000), Ohashi (1999), Rahi (1996) などでなされている。

均衡に依存し、それゆえ情報劣位的投資家の特性に依存する可能性が排除できないからである。ここに、仮想的であるとはいえ、チャンネル3を考察の対象とする意義がある。

1.3 先行文献との比較

繰り返しになるが、この報告書の主要な結果は、上掲のチャンネル1と3が同じ情報を伝えることである。Laffont (1985), Demange and Laroque (1995), Marin and Rahi (1999, 2000), および Rahi (1996) の第3節は、市場で取引されている証券が高々2種類で、なおかつ情報優位的投資家の資産保有量を表す確率変数がある特殊な仮定を満たす場合に、実際に線型合理的期待均衡を解くことで、チャンネル1の情報量を判定した。これらの結果は無論有用であるが、より多種多様な証券が存在する場合に拡張できるかどうか、また、もし拡張できるなら、その結果はどのようなものであるか、をこれらの結果を推察するのは困難である。Admati (1985) は証券の種類数が任意である場合に線型合理的期待均衡を解いたが、彼女のモデルは、無限人の投資家が存在し、証券取引が開始する前に、彼らのそれぞれが証券のリターンに関する情報を得る点でここでのモデルとは異なる。さらに、各投資家が受け取る情報の攪乱項は互いに独立な確率変数と仮定されているので、大数の法則により、均衡価格は真の証券のリターンと経済全体の資産保有量の総和⁶の線型関数として表されるので、証券リターンの攪乱項はこの均衡価格に反映されない。他方、この報告書のモデルでは、証券リターンの情報を得る投資家は1人（後で見るように、複数の情報優位的投資家がモデルの存在すると解釈できるが、いずれにせよ彼ら全員が同じ攪乱項を共有する情報を得ると仮定せねばならない）なので、攪乱項が均衡価格に反映される。また、我々のモデルでは投資家はいずれもリスクを伴う資産を保有することが許容されるが、Admati (1985) では、いずれの投資家も安全資産のみを保有すると仮定される。このようなモデルは古典的なポートフォリオ選択論では標準的だが、本報告書のように、不完備市場を通じてのリスク・シェアリングの問題を取り扱う場合は不向きである。

均衡における情報優位的投資家の取引量は、均衡価格と、その投資家の固定証券価格の下での取引量から計算で求められる。つまり、チャンネル2から得られる情報は、チャンネル1と3の情報を合わせれば得られるのである。先に論じたとおり、いずれの投資家もリスク回避的なとき、これら2つのチャンネルは同じ情報を伝えるので、これらいずれのタイプのチャンネルも、チャンネル2のとは少なくとも同量の情報を伝えることがわかる。しかし、いずれの投資家もリスク回避的なとき、チャンネル2が、他の2チャンネルよりずっと少ない情報しか伝えないことがある。例えば、もし情報劣位的投資家が、情報優位的投資家の証券取引開始前の保有資産を完全に知っているならば、後者が持っている証券リターンに関する情報は、均衡価格を通じて全て前者に伝わり、それゆえ両者間の取引量は不確実性に全く依存しなくなる。つまり、チャンネル2ではいかなる情報も伝わらないのである。他方、情報劣位的投資家のみがリスク中立的ならば、チャンネル1と2が同じ情報を伝えるという結果は成立しないし、複数ある均衡のうちどれが実現するかに応じて、タイプ1のチャンネルがより多くの情報を伝えることもあれば、その逆もありうる。Bhattacharya, Reny, and Spiegel (1995), Duffie and

⁶Admati (1985) のモデルでは、各証券の総量は株式のように正であると仮定され、この正値が確率変数であると仮定されたが、本稿では、先物のように、各証券の総量はゼロであると仮定する。

Rahi (1995), Rahi (1996) の第 2 節, Ohashi (1999) らは, 情報優位的投資家の保有資産には不確実性があり, なおかつ (本稿とは異なり) 自らの取引量の変更が均衡価格に及ぼす影響を見越した上で取引量を決めると仮定 (price-taking の仮定) した上で, チャンネル 1 と 2 が同じ情報を伝える均衡を解いた. 換言すれば, これらの先行文献ではチャンネル 1 と 2 が同じ情報を伝えるという仮定の下で均衡価格を解いたのである. 最後に, 価格がインサイダー情報を部分的にのみ伝える合理的期待均衡に関する先駆的貢献として, Grossman and Stiglitz (1980) と Grossman (1976, 1981) を挙げておこう. 市場の完備性やリスク・ファクターの次元に関して制約的なモデルを扱っているが, チャンネル 1 と 2 の情報量の比較や 2 と 3 の違いなどに関連する, 多くの洞察に富んだ記述が見られる.

1.4 本稿の構成

第 2 節では, 本稿の数理的証券市場モデルを紹介する. 第 3 節は投資家の需給分析と線型合理的期待均衡の厳密な定義を与える. 主要な結果は第 5 に収められている. 第 6 では主要な結果の応用例を 2 つ挙げる. 第 7 節では結論と含意を概説する.

純粋に数学的内容の補題や証明は全て稿末の付録に集められている. 付録は 5 部より構成されている. 付録 A では, 線型のシグナルで条件付けられたマクロ経済的リスク・ファクターの条件付き分布について解析する. 付録 B ではリスク回避的投資家の期待効用最大化問題を解析する. 付録 C では定理 7 を証明する.

2 数理モデル

2.1 リスク・ファクター

K, L , および M をいずれも正の整数とする. 証券市場を取り巻く不確実性は, ある確率測度空間で定義された $K + L + M$ 次元の標準正規分布 (x, y, z) で表されているもとの仮定する. 第 1 のグループの K の確率変数

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix}$$

は, マクロ経済的な K 種類のリスク・ファクターである. 例えば, これら K 種類のリスク・ファクターは K 種類の財の, ある将来時点における直物価格に完全に相関していると考えてもよい.

イントロダクションで述べた通り, このモデルには情報優位的投資家と情報劣位的投資家が存在する. 第 2 のグループの確率変数

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix}$$

は市場取引開始前の情報優位的投資家の保有資産を，マクロ経済的リスク・ファクター x に関して表すものである．例えば，もし $K = L$ で， k 番目のリスク・ファクター x_k が k 番目の財の将来時点での直物価格に完全相関しているならば， y_k は，生産要素 1 単位を投入したときの k 番目の財の（確率変数である）産出高に完全相関していると考えてもよい．但し， y の実現値は情報優位的投資家のみが知っているものとする．マクロ経済的リスクを表す x とは異なり， y の実現値は，直接には情報劣位的投資家には関係ないが， y の実現値は情報優位的投資家の証券取引高に影響を及ぼすので，情報劣位的投資家は y から金銭的外部性（pecuniary externality）を受けることがある．また，後で見るように，例えば y の実現値がわかれば，情報劣位的投資家は情報優位的投資家が持っている x に関する情報を均衡価格から知ることが出来る．

3 番目のグループの確率変数

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_M \end{bmatrix}$$

は，情報優位的投資家が受け取る，マクロ経済的リスク x に関する情報に混じり込むノイズを表している．具体的にどのように z が情報に混入するかは後で紹介する．

我々は以下の記法を用いることにする．まず，任意の正の整数 N と $N \times K$ 行列 $A = (a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,N \\ k=1,\dots,K}}$ ，に対し， Ax は N 次元確率ベクトル

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^K a_{Nk}x_k \end{bmatrix}.$$

を表すものとする． x のところに y または z が登場しても同様の記法を用いることにする． $K \times N$ 行列 $A = (a_{kj})_{\substack{k=1,\dots,K \\ j=1,\dots,N}}$ に対しては

$$A^\top x = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K a_{k1}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^K a_{kN}x_k \end{bmatrix}.$$

となる．任意の N 次元確率ベクトル v と J 次元ランダムベクトル w に対し， $C(v, w)$ は，その (n, j) 成分が， v の第 n 成分 v_n と w の第 j 成分 w_j との共分散に等しい $N \times J$ 行列とする．それゆえ $C(v, v)$ は v の $N \times N$ 共分散行列となる．もし $N = J$ ならば， $v^\top w$ は，確率変数 $\sum_{n=1}^N v_n w_n$ を表す．

F を $K \times M$ 行列， Γ を $M \times M$ 行列とする． M 次元確率ベクトル w を

$$w = F^\top x + \Gamma^\top z$$

で定義する．そうすると， w は正規分布に従い， $E(w) = 0$ および

$$C((x, w), (x, w)) = \begin{bmatrix} C(x, x) & C(x, w) \\ C(w, x) & C(w, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_K & F \\ F^\top & F^\top F + \Gamma^\top \Gamma \end{bmatrix}$$

を満足する．行列 F と Γ に関しては，以下の仮定をおくことにする．

仮定 1 $\text{rank } F = \text{rank } \Gamma = M$ ， $F^\top F + \Gamma^\top \Gamma = I_M$ ．

そうすると

$$C((x, w), (x, w)) = \begin{bmatrix} I_K & F \\ F^\top & I_M \end{bmatrix}$$

となる．もし x に属する K 種類の確率変数のいかなる線型結合も， w を観察することで確実に知ることが出来なく，なおかつ w に属する M 種類の確率変数のうち，どの $M-1$ 種類の確率変数よりなる確率ベクトルも w より少ない情報量しか伝えられない（つまり，異なる条件付き確率分布を与える）とすると，仮定 2.1 は一般性を失わない．ここでの 1 番目の要請は，余計なシグナルがないことを保証し，2 番目の要請は情報優位的投資家にとって複数の安全債券が存在しえないことを保証するものである．

シグナル w で条件付けられた x の分布は，情報優位的投資家が取引時に抱く証券のリターンの期待であり，その分布は平均ベクトルおよび共分散行列が

$$E(x|w) = Fw, \quad C(x, x|w) = I_K - FF^\top. \quad (1)$$

で与えられる正規分布である．条件付き期待値 $E(x|w)$ は w に線型に依存するが，条件付き共分散行列 $C(x, x|w)$ は w に全く依存しない．それゆえ，

$$V_0 = I_K - FF^\top.$$

と書くことにすると， V_0 が正値定符号であることは以下のように証明される：まず， $F^\top F + \Gamma^\top \Gamma = I_M$ なので， $(K+M) \times M$ 行列

$$H = \begin{bmatrix} F \\ \Gamma \end{bmatrix}$$

は $\text{col } H$ の正規直交基底である．但しここで col は列空間を表す．したがって，任意の $r \in R^{K+M}$ に対し，もし r が $\text{col } H$ に属さないならば， r と H の列ベクトルとの内積の 2 乗の和は， r の R^{K+M} におけるユークリッドノルムの 2 乗より小さい．また， $\text{rank } \Gamma = K$ なので，

$$r = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$$

という形に書かれる任意の $r \in R^{K+M}$ (ただし $q \in R^K \setminus \{0\}$) は $\text{col } H$ に属さないので $\|H^\top r\|^2 < \|r\|^2$ ，すなわち

$$r^\top H H^\top r = q^\top F F^\top q < \|q\|^2.$$

が成立する．それゆえ $FF^\top$ の任意の固有値は 1 未満である．したがって V_1 の任意の固有値は 0 より大きい．よって V_0 は正値定符号である．

2.2 証券

我々は証券の集まりを、 K 種類の確率変数 $x_1, \dots, x_K$ で張られる線型空間の部分（線型）空間として定義する．座標系を適当に定めれば，この部分線型空間は R^K の部分線型空間とみなすことができる．これを「市場スパン（market span）」と呼び， $\mathcal{M}$ で表す．もしマクロ経済的リスクが K 種類の財の将来時点での直物価格を表しているとするならば， $x_1, \dots, x_K$ で張られる線型空間は，これらの財を予め一定比率保有した結果直物市場で実現する価値額全体の集合である．また，証券の集まりと同一視される部分空間は，どの財または財の組み合わせに対して先物契約が存在するかを表していると解釈できる．この部分空間が R^K と一致するときは市場は完備であり，さもなければ不完備である．

ここで証券のペイオフ（支払額）は y の実現値に全く依存しないと仮定されていることに注意されたい．例えば， y は消費が起こる将来時点においてですら，情報優位的投資家のみが知ることが出来，なおかつ（上の仮定に反して）証券のペイオフが y の実現値にも依存するならば，情報優位的投資家は自分にとってもっとも得になるように y の実現値を嘘で申告するインセンティブ（誘因）を持つ．もし情報劣位的投資家がこれを予見するならば，そのような証券の取引に参加することはなく，結局取引は全く行われなであろう．それゆえ，証券のペイオフ（支払額）は y の実現値に全く依存しないという仮定は， y が常にインサイダー情報であるという状況では正当化され则认为ることができる．

2.3 投資家

今までに何度も触れてきたように，この経済には情報優位的投資家と情報劣位的投資家という2種類の投資家がいてと仮定する．情報優位的投資家は，リスク中立的であるか，またはリスク回避的ならば，一定の（消費量には依存しない）絶対的リスク許容度 $t_0 > 0$ を持つものとする．これは Arrow-Pratt の絶対的リスク回避度の逆数に他ならない．この投資家が初期保有量（つまり証券取引参加前に保有しており，証券取引を通じてヘッジしたいリスク資産）は $(d_0 + Dy)^T x$ で表される．但しここで d_0 は R^K のベクトル， D は $K \times L$ 行列である．したがって，マクロ経済リスク x ではかったこの投資家の初期保有量は正規分布に従う確率ベクトルに従う．また，この投資家は市場取引に供される全ての証券を，取引費用ゼロで取引できると仮定する．即ち，部分空間 $\mathcal{M}$ 上の任意のベクトルを市場で取引出来ると仮定する．それゆえ $\mathcal{M}$ を情報優位的投資家の「参加スパン（participation span）」とも呼ぶことにし， $\mathcal{M}_0$ と書く場合もある．

このように情報優位的投資家の初期保有量に，固有のリスク・ファクター y を導入するとことの意義は，第3.2節で見えるように，この投資家の証券需要関数が y に関して線型になることである．しかしながら，この方法が，固有のリスク・ファクターに関して線型性が得られる唯一の定式化というわけではない．例えば，もしこの投資家の絶対的リスク回避度が対数正規分布に従うリスク・ファクターならば，やはりこのリスク・ファクターに関して需要関数の線型性が得られる．

情報優位的投資家はたった1人しかいないという仮定は，文字通りに解釈されるべきでない．例えば，もし Λ という情報優位的投資家のグループが存在し，そのいずれも

が y と w を証券取引に先立って観察でき、なおかついずれも一定のリスク許容度 $t_\lambda > 0$ と初期保有量 $(d_\lambda + D_\lambda y)^\top x$ を持っており (ただし $d_\lambda \in R^K$ および $D_\lambda \in R^{K \times M}$) , いずれの参加スパンも $\mathcal{M} = 0$ に一致し、さらにもし $t_0 = \sum_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda$, $d_0 = \sum_{\lambda \in \Lambda} d_\lambda$, および $D_0 = \sum_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ が成立するならば、これらの投資家の総需要関数は、我々のモデルの情報優位的投資家の需要関数に一致する。この意味で、我々のモデルの情報優位的投資家は、代表的 (representative) な情報優位的投資家とみなすことができる。

他方、この証券市場モデルには H 人の情報劣位的投資家がいると仮定する。各投資家 $h \in \{1, \dots, H\}$ は、リスク中立的か、一定の (消費量に依存しない) リスク許容度 $t_h > 0$ を持つ。その投資家の初期保有量は $d_h^\top x$ で与えられる。但しここで d_h は R^K のベクトルである。したがって、マクロ経済的リスク x ではかったこの投資家の初期保有量にはリスクは伴わない。また各情報劣位的投資家が全ての証券を取引できるとは限らない。それゆえ各情報劣位的投資家の参加スパン $\mathcal{M}_h$ は $\mathcal{M}$ の部分空間であるが、これらの消費者はいずれも $\mathcal{M}$ に属する証券価格を観察できると仮定する。

3 リスク回避的投資家の証券需要

前節同様、市場スパンを $\mathcal{M}$, 投資家 h の参加スパンを $\mathcal{M}_h$ で表し、安全資産 (確実に 1 を支払う証券のこと) の価格を 1 に定めたときの K 種類の各マクロ経済的リスクのそれぞれに対する価格より成る K 次元ベクトルを「リスク価格ベクトル」と呼ぶ。その第 k 成分は、市場で観察される証券価格に内在する k 番目のリスク・ファクター x_k の、安全資産に対する相対価格である。リスク価格ベクトルはリスク・ファクター (x, y, z) の実現値に依存する確率ベクトルの実現値である。この確率ベクトルを p で表すことにする。もし実現値が π ならば、リターン $\theta \in R^K$ を与える証券の、安全資産 (不確実性によらず、必ず 1 を支払う証券) に対する相対価格は $\pi \cdot \theta$ で与えられる。

任意の対称かつ正値定符号な $K \times K$ 行列 V_h に対し、参加スパン $\mathcal{M}_h$ への、 V_h で定められる内積に関する直交射影を表す $K \times K$ 行列を $B(\mathcal{M}_h, V_h)$ で表す。もし $\dim \mathcal{M}_h = N$, $A \in R^{K \times N}$, $\mathcal{M}_h = \text{col } A$ ならば

$$B(\mathcal{M}_h, V_h) = A (A^\top V_h A)^{-1} A^\top V_h$$

となることを示すのは容易である。以下では、投資家の期待効用最大化の結果として決められる証券需要量を、投資家がリスク回避的な場合に限って分析する。リスク中立的な場合には、均衡は証券リターンの条件付き期待値を用いて直ちに定義されるので、需要分析は不要である。

3.1 情報優位的投資家による期待効用最大化

等式 (1) および付録 B の補題により、 y と w で条件付けられた、情報優位的投資家の k 次元のマクロ経済的リスク x に関する超過需要は

$$B(\mathcal{M}_0, V_0) (t_0 V_0^{-1} (Fw - p) - (d_0 + Dy)) \quad (2)$$

に等しい。

3.2 情報劣位的投資家による期待効用最大化

線型合理的期待均衡を定義するために、情報劣位的投資家は、証券取引にあたり、 y と w の線型結合として表されるリスク価格ベクトルのみを観察できるとしよう。より厳密に述べるために、 $P = [P_0 \ P_1 \ P_2] \in R^{K \times (1+L+M)}$ とする。そして K 次元確率ベクトル p を

$$p = P_0 + P_1 y + P_2 w$$

と定め、情報劣位的投資家は p を観察できるものとする。情報優位的投資家が証券取引前に観察したものは y と w のみなので、リスク価格ベクトル p が y と w の関数であると仮定するのは自然であるが、 p がこれら二つの確率ベクトルの線型関数であると仮定するのは、追加的な制約である。⁷

ここで列空間 $\text{col } P \subseteq \mathcal{M}$ と仮定するが、この仮定は以下のように正当化される。まず $\pi_1 \in R^K$ と $\pi_2 \in R^K$ を任意のふたつのリスク価格ベクトルとする。もし任意の $\zeta \in \mathcal{M}$ に対して $\pi_1^\top \zeta = \pi_2^\top \zeta$ が成立するならば、 π_1 と π_2 は共に同じ証券価格ベクトルに対応する。証券市場において情報劣位的投資家が実際に観察できるのは証券価格であって、リスク価格ではない。もし x の異なる実現値の下で異なるリスク価格ベクトルが同じ証券価格ベクトルに対応するなら、リスク価格ベクトルは証券価格ベクトルよりも大きな情報量を伝えてしまうことになる。そこで、ひとつの証券価格ベクトルにはたったひとつのリスク価格ベクトルが対応することを保証する方法のひとつとして、 p が常に市場スパン $\mathcal{M}$ に属するように $\text{col } P \subseteq \mathcal{M}$ を要請するのである。

リスク価格ベクトル p で条件付けられた x の分布は正規分布である。その平均ベクトル $E(x|p)$ は $p - P_0$ の線型関数だが共分散行列 $C(x, x|p)$ は p の実現値には全く依存しない。そこで、 $K \times K$ 行列 G を使って

$$E(x|p) = G(p - P_0)$$

と書くことにし、他方、 $K \times K$ 行列 V_h を使って

$$C(x, x|p) = V_h$$

と書くことにする。もちろん $V_1 = \dots = V_H$ が成立するのだが、ここで添字 h を付けたのは、以下の記法上の便宜のためである。各 V_h は正値定符号である。

付録 B の補題によれば、 p で条件付けられた、情報劣位的投資家 h の k 次元のマクロ経済的リスク x に関する超過需要は

$$B(\mathcal{M}_h, V_h) (t_h V_h^{-1} (G(p - P_0) - p) - d_h)$$

である。

価格 $p = P_0 + P_1 y + P_2 w$ は 2 つの役割をもっている。まず、情報劣位的投資家に、情報優位的投資家が持つ情報を伝えるシグナルとしての役割であり、これは情報劣位的投資家が証券需要を選ぶときに用いる条件付き期待値 $E(x|p) = G(p - P_0)$ と共分散行列 $C(x, x|p) = V_h$ がそれぞれ p で条件付けられていることから読み取れる。第 2 の役割は、通常の相対価格のとしての役割であり、これは 2 番目の p に表されている。

⁷情報優位的投資家の行動様式に関して若干異なる仮定の下で線型合理的期待均衡と非線型合理的期待均衡の関係を論じた論文に、Bhattacharya, Reny, and Spiegel (1995) がある。5.2 節を参照せよ。

4 線型合理的期待均衡

4.1 ある投資家がリスク中立的な場合

いずれの投資家がリスク中立的ならば、均衡においては証券価格はその投資家の抱く、証券リターンの条件付き期待値に等しくなければならない。なおかつ、その際の投資家の超過需要は、条件付き期待値ゼロを持つ $\mathcal{M}$ または $\mathcal{M}_h$ に属する任意のリスク（確率変数）である。それゆえこの投資家がリスク中立的な場合の線型合理的期待均衡は与えられる：

定義 2 $P = [P_0 \ P_1 \ P_2] \in R^{K \times (1+L+M)}$ は $\text{col } P \subseteq \mathcal{M}$ を満たすとし、 K 次元確率ベクトル p を $p = P_0 + P_1 y + P_2 w$ で定める。さらに $E(x|p) = G(p - P_0)$ および $C(x, x|p) = V_1$ と書くことにする。もし情報優位的投資家がリスク中立的であり、なおかつ任意の $a \in \mathcal{M}$ に対し $a^\top p = E(a^\top x|w)$ が成立するならば、 p を線型合理的期待均衡と呼ぶ。

他方、もし情報劣位的投資家の中にリスク中立的な投資家 h がいるならば、均衡価格 p は任意の $a \in \mathcal{M}_H$ に対して $a^\top p = E(a^\top x|p)$ を満たす。価格が、情報優位的投資家が取引前に受け取る情報 y と w に依存すると仮定すれば、以下の定義が得られる。

定義 3 $P = [P_0 \ P_1 \ P_2] \in R^{K \times (1+L+M)}$ とし、 K 次元確率ベクトル p を $p = P_0 + P_1 y + P_2 w$ で定める。情報劣位的投資家の集合 $\mathcal{H} \subseteq \{1, \dots, H\}$ が存在し、 $\mathcal{H}$ に属する任意の投資家がリスク中立的であり、なおかつ $M = \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{M}_h$ が成り立つと仮定する。もし任意の $a \in \mathcal{M}$ に対し $a^\top p = E(a^\top x|p)$ が成立するならば、 p を線型合理的期待均衡と呼ぶ。

もし情報優位的投資家がリスク中立的であり、なおかつ定義 3 に登場するような $\mathcal{H}$ が存在するならば、上のふたつの定義のいずれに照らしても線型合理的期待均衡となるようなリスク価格確率ベクトル p が存在する。この点は定理 5 で触れられる。より一般に、情報優位的投資家と情報劣位的投資家 h がリスク中立的であり、 p が定義 2 の意味で均衡ならば、任意の $a \in \mathcal{M}_H$ に対して $a^\top p = E(a^\top x|p)$ が成立する。これは、後で登場する定理 7 の証明からみてとれる。

4.2 全ての投資家がリスク回避的な場合

次に全ての投資家がリスク回避的である場合の均衡の定義を与える。このとき各投資家の超過需要量はリスク価格ベクトルに対して一意に定まるので、通常の需給一致式が均衡を定義する：

定義 4 $P = [P_0 \ P_1 \ P_2] \in R^{K \times (1+L+M)}$ は $\text{col } P \subseteq \mathcal{M}$ を満たすとし、 K 次元確率ベクトル p を $p = P_0 + P_1 y + P_2 w$ で定める。さらに $E(x|p) = G(p - P_0)$ および $C(x, x|p) = V_1$ と書くことにする。もし全ての投資家がリスク回避的であり、なおかつ以下の等式が成立するならば、 p を市場スパン $\mathcal{M}$ の線型合理的期待均衡と呼ぶ：

$$B(\mathcal{M}_0, V_0) (t_0 V_0^{-1} (Fw - p) - (d_0 + Dy)) + \sum_{h=1}^H B(\mathcal{M}_h, V_h) (t_h V_h^{-1} (G(p - P_0) - p) - d_h) = 0.$$

5 均衡価格の情報伝達量

線型合理的期待均衡の定義は価格が情報優位的投資家が持つ以上の情報を反映しないと要請するが、実際にどれほどの情報を伝えるかは明らかにはしない．本節は本稿の主題である、価格が伝える情報を数学的に特徴付ける．

5.1 リスク中立的投資家の場合

命題 5 もし情報優位的投資家がリスク中立的ならば、情報劣位的投資家がリスク回避的か中立的であるかにかかわらず線型合理的期待均衡 p はただひとつ存在する．

命題 5 の証明 先ず最初に、もし K 次元確率ベクトル p を $p = P_0 + P_1 y + P_2 w$ が定義 2 の意味で線型合理的期待均衡ならば、 p は定義 3 の意味でも線型合理的期待均衡となることを証明しよう．

任意の $a \in \mathcal{M}$ に対し $a^\top p = E(a^\top x|w)$ が成立する．ここで $E(x|w) = Fw$ なので、これは $a^\top p = a^\top Fw$ が成立することを意味する．したがって、 $P_1 = 0$ および $P_2 = 0$ となり、任意の $a \in \mathcal{M}$ に対して $a^\top P_2 = a^\top F$ が成立する． $\text{col } P_2 \subseteq \mathcal{M}$ より、 $P_2 = B(\mathcal{M}, I_K)F$ である．よって、

$$C((x, p), (x, p)) = \begin{bmatrix} I_K & FF^\top B(\mathcal{M}, I_K)^\top \\ B(\mathcal{M}, I_K)FF^\top & B(\mathcal{M}, I_K)FF^\top B(\mathcal{M}, I_K)^\top \end{bmatrix}$$

が成立する．それゆえ

$$E(x|p) = FF^\top B(\mathcal{M}, I_K)^\top (B(\mathcal{M}, I_K)FF^\top B(\mathcal{M}, I_K)^\top)^{-1} B(\mathcal{M}, I_K)Fw$$

となる．よって

$$\begin{aligned} & B(\mathcal{M}, I_K)^\top E(x|p) \\ &= B(\mathcal{M}, I_K)^\top FF^\top B(\mathcal{M}, I_K)^\top (B(\mathcal{M}, I_K)FF^\top B(\mathcal{M}, I_K)^\top)^{-1} B(\mathcal{M}, I_K)Fw \\ &= B(\mathcal{M}, I_K)Fw \end{aligned}$$

が成立する．他方、任意の $a \in \mathcal{M}$ に対し $a^\top p = E(a^\top x|w)$ が成立し、なおかつ $\text{col } B(\mathcal{M}, I_K) = \mathcal{M}$ なので、

$$B(\mathcal{M}, I_K)^\top p = B(\mathcal{M}, I_K)^\top Fw$$

が成立する．上の 2 式と $B(\mathcal{M}, I_K)$ が対称行列であることにより、

$$B(\mathcal{M}, I_K)^\top E(x|p) = B(\mathcal{M}, I_K)^\top p$$

となる．これは任意の $a \in \mathcal{M}$ に対し $a^\top p = E(a^\top x|p)$ が成立することと同値なので、 p は定義 3 の意味でも線型合理的期待均衡となる．

ここまでで既に、もし p が線型合理的期待均衡ならば、 $P_1 = 0$ 、 $P_2 = 0$ 、 $P_2 = B(\mathcal{M}, I_K)F$ が成立することを示した．よって線型合理的期待均衡の一意性は証明された．また、この P を用いて定義されるリスク価格確率ベクトル p が実際に任意の $a \in \mathcal{M}$

に対し $a^\top p = E(a^\top x|w)$ を満たすことは容易に確認できる．したがって均衡の存在も証明される．
///

以下の結果は，若干特殊ではあるが，複数均衡の存在を許容する状況を示している．

命題 6 もし $K = L = M$ および $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \dots = \mathcal{M}_H = R^K$ が成立し，情報優位的投資家がリスク回避的で，少なくともひとりの情報劣位的投資家がリスク中立的ならば，確率ベクトル $p = Fw$ および $p = 0$ はいずれも線型合理的期待均衡である．また，任意の正規直交行列 $A \in R^{K \times K}$ に対して，確率ベクトル $p = \frac{1}{2}FAy + \frac{1}{2}Fw$ も線型合理的期待均衡である．

等式 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \dots = \mathcal{M}_H = R^K$ は市場が完備で，全ての投資家が全ての証券の取引に参加できることを意味する． $M = K$ は，情報優位的投資家が受け取る情報 w には全ての証券に関して何らかの情報が含まれていることを意味し， $L = K$ はマクロ経済的リスクと同数の情報優位的投資家の保有資産に関するリスク・ファクターが存在することを意味する．この命題では，複数の均衡において，価格が伝える情報量に差がある点に着目すべきである．まず第 1 の均衡 $p = Fw$ においては $E(x|p) = E(x|w)$ が成立するので，情報優位的投資家と情報劣位的投資家は，証券リターンに関して全く同じ情報を共有することになる．第 2 の均衡 $p = 0$ においては，価格はいかなる情報も伝えないので，情報劣位的投資家は証券リターンに関していかなる情報も得ない．それゆえ $E(x|p) = E(x)$ が成立する．3 番目の均衡では若干の情報は伝わるが，情報劣位的投資家は情報優位的投資家ほどの情報は持ち得ない．

命題 6 の証明 まず， $p = Fw$ ならば $E(x|p) = Fw = p$ なので， $p = Fw$ は線型合理的期待均衡である．また， $p = 0$ ならば $E(x|p) = E(x) = 0 = p$ なので， $p = 0$ も線型合理的期待均衡である．最後に， $p = \frac{1}{2}FAy + \frac{1}{2}Fw$ ならば， $(FA)(FA)^\top = F(AA^\top)F^\top = FF^\top$ なので，

$$C((x, p), (x, p)) = \begin{bmatrix} I_K & \frac{1}{2}FF^\top \\ \frac{1}{2}FF^\top & \frac{1}{2}FF^\top \end{bmatrix} \quad (3)$$

となる．それゆえ $E(x|p) = \frac{1}{2}FF^\top \left(\frac{1}{2}FF^\top \right)^{-1} p = p$ が成立し， $p = \frac{1}{2}FAy + \frac{1}{2}Fw$ も線型合理的期待均衡である．
///

3 種類の均衡の間には（確率変数である）消費量についても差があることが（2）式から見てとれる．実際，均衡 $p = Fw$ における情報優位的投資家の消費は

$$(d_0 + Dy) - (d_0 + Dy) = 0$$

であり，均衡 $p = 0$ においては

$$(d_0 + Dy) + (t_0 V_0^{-1} Fw - (d_0 + Dy)) = t_0 V_0^{-1} Fw$$

であり，最後に均衡 $p = \frac{1}{2}FAy + \frac{1}{2}Fw$ においては

$$(d_0 + Dy) + \left(t_0 V_0^{-1} \left(\frac{1}{2}Fw - \frac{1}{2}FAy \right) - (d_0 + Dy) \right) = t_0 V_0^{-1} \left(\frac{1}{2}Fw - \frac{1}{2}FAy \right)$$

である．

さらに，3種類の均衡のそれぞれにおける情報優位的投資家の取引量を観察することで得られる情報，すなわちイントロダクションで述べたタイプ2の情報は，均衡価格よりも多くの情報を伝えることもあるし，逆に少ない情報を伝えることもある点を上の均衡配分の分析は示している．具体的には，情報優位的投資家は全く初期保有を持たない（つまり， $d_0 = 0$ かつ $D = 0$ ）と想定すれば，情報優位的投資家の取引量は，上で導出した消費量に他ならない．第1の均衡 $p = Fw$ においては，価格が（不確実性に全く依存しない）取引量より多くの情報を伝えるが，第2の均衡 $p = 0$ においては，取引量は情報優位的投資家が持ってる証券のリターンに関する全ての情報を伝えるのに対し，価格は不確実性に全く依存しないので何ら情報を伝えない．イントロダクションで既に触れたが，次節でより詳しく述べるように，全ての投資家がリスク回避的な場合は，均衡における情報優位的投資家の取引量が均衡価格より多くの情報を伝えることはありえない．したがって，均衡 $p = 0$ における情報量の逆転は，情報劣位的投資家がリスク中立的であることに起因すると言える．

また，より一層特殊なケースとして，情報劣位的投資家はたった1人のみ存在する（つまり $H = 1$ ）場合を考えよう．このとき，情報劣位的投資家の取引量は情報優位的投資家の取引量に -1 を乗じたものである．よって情報劣位的投資家が情報優位的投資家の取引量を知るとは，すなわち自分の取引量を知ることである．Kreps (1977) が指摘したように，均衡において自らの取引量を知ることができるというのはごく自然な仮定であるし，そこから情報優位的投資家が得た，証券リターンに関する情報を推測というのも当然の仮定である．しかし，上の例でもし情報劣位的投資家がそのような推察を実際に行うならば， $p = 0$ はもやは均衡でなくなる．⁸ リスク中立的な情報劣位的投資家が存在する場合，合理的期待均衡は満足のいく均衡概念とは言えないだろう．

なお，第3の均衡 $p = \frac{1}{2}FAy + \frac{1}{2}Fw$ に対しては

$$C(x, x|p) = I_K - \frac{1}{2}FF^\top \quad (4)$$

となる．つまり，条件付き分散も，ちょうど情報優位的投資家の分散 ($C(x, x|w) = I_K - FF^\top$) と全く情報がない場合の分散 ($C(x, x) = I_K$) の間に収まる点も，この均衡で価格が伝達する情報量が他のふたつの均衡のその中間に位置することを示している．また，この均衡においては価格と取引量のいずれかが他方より多くの情報を与えることはないが，取引量で条件付けられた共分散行列 $C(x, x|(1/2)Fw - (1/2)FAy)$ は (A に依存せず) $I_K - (1/2)FF^\top$ に等しいことが示される．⁹ つまり，価格と取引量は異なる情報を与えるが，共分散行列ではかれるその精度は同一なのである．

最後に， $K \times K$ 正規直交行列の集合は $K(K-1)/2$ 次元の微分多様体 (Stiefel 多様体) をなすので，少なくとも $K(K-1)/2$ 次元の多様体をなす均衡価格ベクトルが存在する

⁸ しかし $p = Fw$ は依然として均衡．

⁹ これはこれは (4) 式と A が正規直交行列ならば $-A$ もまた正規直交行列であることから従う．

ことをもこの結果は示している点を指摘しておこう。既に見たように，これらの均衡は異なる消費量に対応するので，この結果は均衡消費量も同次元の多様体を成すことを示している．このように連続体濃度の均衡が存在することも，リスク中立的な情報劣位的投資家が存在する場合には，合理的期待均衡は満足 of いく均衡概念ではないことの傍証である．

5.2 リスク回避的投資家の場合

以下の定理が本稿の主要結果である． $\mathcal{L} = \text{col } F \subseteq R^K$ とする．

定理 7 全ての投資家がリスク回避的であるとし，また

$$\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{L}^\perp = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{L}^\perp = \cdots = \mathcal{M}_H \cap \mathcal{L}^\perp \quad (5)$$

が成立すると仮定する． $P = [P_0 \ P_1 \ P_2] \in R^{K \times (1+L+M)}$ とし， $p = P_0 + P_1 y + P_2 w$ が市場スパン $\mathcal{M}$ の線型合理的期待均衡ならば，

$$\text{row } [P_1 \ P_2] = \text{row } (B(\mathcal{M}, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F]) \quad (6)$$

が成立する．ただしここで， $[-D \ t_0 V_0^{-1} F]$ は $-D$ と $t_0 V_0^{-1} F$ の列ベクトルより成る $K \times (L + M)$ 行列であり， row は行空間を表す．

この定理の証明は長いので付録に譲ることにし，以下ではその意義や先行文献との比較を説明することにしよう．まず，等式 (6) は

$$A_1 (P_1 y + P_2 w) = B(\mathcal{M}, V_1) (t_1 V_1^{-1} F w - D y)$$

となるような $K \times K$ 行列 A_1 ，および

$$P_1 y + P_2 w = A_2 B(\mathcal{M}, V_1) (t_1 V_1^{-1} F w - D y)$$

となるようなもうひとつの $K \times K$ 行列 A_2 が存在することと同値である．また，若干の証明を要するが，これは

$$P_1 y + P_2 w = A B(\mathcal{M}, V_1) (t_1 V_1^{-1} F w - D y)$$

となるような，逆行列を持つ $K \times K$ 行列 A が存在することと同値である．したがって等式 (6) は $P_1 y + P_2 w$ と $B(\mathcal{M}, V_0) (t_0 V_0^{-1} F w - D y)$ のいずれか一方の実現値がわかれば，他方の実現値もわかるという条件と同値である．もちろん P_0 は不確実性に依存しないので， p の実現値を知ることと $P_1 y + P_2 w$ の実現値を知ことは同値である．他方，証券価格が w や y の実現値に関わらず一定という仮想的状況では，そのリスク価格ベクトルを $\pi \in R^K$ とすれば，情報優位的投資家の超過需要は

$$B(\mathcal{M}, V_0) (t_0 V_0^{-1} (F w - \pi) - (d_0 + D y))$$

である．これを知することは $B(\mathcal{M}, V_0) (t_0 V_0^{-1} F w - D y)$ の実現値を知ることと同値である．それゆえこの定理は，均衡価格 p は，固定価格の下での情報優位的投資家の超過需要と同じ情報量を伝えることを意味するものである．

部分空間 $\mathcal{L}$ のユークリッドの内積に関する直交補空間 $\mathcal{L}^\perp$ は、シグナル w がいかなる情報をも与えないマクロ経済的リスクの集合である。この定理の仮定 (5) は、投資家間で取引できるマクロ経済的リスク ($\mathcal{M}_h$) については差異はあり得るものの、いかなる情報をも得られないリスクに関しては皆同じ取引可能性に直面していることを要請するものである。この仮定は我々の証明には不可欠であり、この仮定が満たされていない場合には、 p が情報優位的投資家の取引量と少なくとも同じ情報を与えることは付録に収められている証明から分かるが、その際、実際に p が情報優位的投資家の取引量よりも多くの情報を伝えるかどうかは不明である。ただ、この仮定が経済学的に重要な以下の2つのケースを含んでいることは明記するに値するだろう：

1. $\mathcal{L} = R^K$.
2. $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \cdots = \mathcal{M}_H$.

第1のケースは、情報優位的投資家が受け取る情報 w の中には、 K 種類のいずれのマクロ経済的リスクに関する何らかの情報が含まれていることを意味する。第2のケースでは、全ての投資家が等しく証券取引に参加出来ることを意味する。

ここで本稿の結果を精確に先行文献と比較することができる。Bhattacharya, Reny, and Spiegel (1995), Duffie and Rahi (1995), Rahi (1996) の第2節、および Ohashi (1999) らは、自らの証券取引量の価格への影響を考慮するような情報優位的投資家を考察し、価格 p に対し、 $P_1 y + P_2 w = AB(\mathcal{M}, V_0)(t_0 V_0^{-1} F w - D y)$ となるような $K \times K$ 行列 A が存在することを均衡の定義の中で要請した。つまり、情報優位的投資家の取引量が少なくとも価格と同程度の情報を伝えるという条件を課したのである。¹⁰ 本稿の分析では、(確率ベクトルたる)証券価格が情報優位的投資家の超過需要量よりも多くの情報を伝達する可能性を許容しつつも、均衡においては彼らの仮定と同じ結果が得られることを示したものである。他方、本稿で想定されているような価格受容的な情報優位的投資家については、Laffont (1985) の第4節, Marin and Rahi (1999, 2000), および Rahi (1996) の第3節などで、 $K \leq 2$ および $\dim \mathcal{M} \leq 2$ が満たされる状況で P を実際に解いている。これら特殊ケースの均衡解からでは、定理7のような一般的結果を類推するためには不十分であろう。また、Admati (1985) が考察の対象とした線型合理的期待均衡価格は $p = P_0 + P_1 x + P_2 y$ の形で書かれる確率ベクトルである。DeMarzo and Skiadas (1998) は線型であるか否かを問わずに合理的期待均衡の一意性の問題を一般的な枠組みの中で取り扱ったが、本稿とは異なり、初期保有量 $d_h \in R^K$ が市場スパン $\mathcal{M}$ に属することを仮定している。また、いずれの文献も、全ての投資家が等しく証券取引に参加出来る（つまり、 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \cdots = \mathcal{M}_H$ ）という仮定をおいている。限定的参加に関する初期の貢献は Balasko, Cass, and Siconolfi (1990) であるが、彼らは情報が偏在しないケースを取り扱った。

¹⁰ 実際にこのような P が線型合理的期待均衡になりためには、行列 A が逆行列を持つこと、つまり、均衡価格と情報優位的投資家の超過需要が同じ情報を伝えること、が必要条件である。

6 主要結果の応用

本節では前節の結果のふたつの応用を紹介する．第1の応用例では，ある投資家がリスク中立的なケースに関わる命題5と命題6を使い，第2の応用例では，全ての投資家がリスク回避的なケースを取り扱う定理7を使う．

6.1 均衡リスク価格の連続性

一般均衡理論では，投資家の初期保有量やリスク許容度といった経済のファンダメンタルズが変化したときに，均衡において内生的に決まる価格や消費量がどのように変化するかしばしば興味の対象となる．無論これら内生変数はファンダメンタルズが複雑に相互作用しながら決定されるので，その変化のあり方について強い性質を導出するのは難しい．しかし一般に，ファンダメンタルズを均衡価格ベクトル全部よりなる集合に結びつける対応 (correspondence) が上半連続であることは良く知られている.¹¹ すなわち，ファンダメンタルズの列 (sequence) がある極限に収束するとき，そのファンダメンタルズの均衡の列の極限は，ファンダメンタルズの列の極限の均衡のひとつであるという性質である．以下では，情報劣位の投資家がリスク中立的な場合は，この一般的な性質が成立しないことを命題5と命題6を使って説明する．

まず，命題6と同様に， $M = K$ および $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 = \cdots = \mathcal{M}_H = R^K$ が成立し，少なくともひとりの情報劣位の投資家がリスク中立的と仮定する．さらに初期保有量 D, d_h ($h \in \{0, 1, \dots, H\}$)，およびリスク回避的な情報劣位の投資家のリスク許容度 t_h は所与としよう．そうすると，情報優位の投資家がリスク回避的であるかそれとも中立的か，もし回避的ならリスク許容度がいくつか，を定めれば，数理モデルの全てのファンダメンタルズを定めることになる．

このとき，情報優位の投資家がリスク中立的ならば，命題5により， $p = Fw$ が唯一の線型合理的期待均衡である．他方，もし情報優位の投資家がリスク回避的ならば，命題6により，その投資家のリスク許容度がどんなに高くても， $p = Fw$ に加え， $p = 0$ および，任意の $K \times K$ 正規直交行列 A に対し， $p = (1/2)FAy + (1/2)Fw$ も均衡となる．

ここで，もし情報優位の投資家がリスク回避的だがリスク許容度が無限大に発散するならば，その投資家の期待効用関数 (8) は，リスク中立的投資家の期待効用関数に収束する．もちろん，リスク回避的な場合の均衡価格 $p = 0$ および $p = (1/2)FAy + (1/2)Fw$ はそれ自身に収束する．しかし，これらはいずれも情報優位の投資家がリスク中立的な場合の線型合理的期待均衡ではない．すなわち，命題6の状況で，情報優位の投資家のリスク許容度のみをファンダメンタルズのパラメーターとしたときに，経済のファンダメンタルズに均衡価格ベクトルを結びつける対応は上半連続ではない．それゆえ，もちろん，一般に全ての投資家のリスク許容度や初期保有量をパラメーターにする場合も，この対応は上半連続ではない．

上半連続性が満たされないのは経済分析上好ましくない．というのは，計算の都合やその他分析上の技術的な要因により，所与のモデルの均衡を直接分析することを試みるよりも，それを近似するモデルの均衡をまず分析し，その均衡の極限をもって元にと与えられた経済の均衡とするアプローチが多くの場合経済分析では有用だが，上半連続性が

¹¹例えば，Mas-Colell (1985) を見よ．

満たされないということは，このアプローチが適用できないからである．分析の対象とするファンダメンタルズに制約を加えることで，この問題を迂回することが分析の都合上必要とされよう．

6.2 新しい証券と情報伝達

定理 7 の応用例として，ここでは，社債の新規発行のように，新しい証券が市場で取引されることで均衡価格が伝える情報がいかに変化するかを，比較的簡単な数値例に従って説明する．通常この種の伝達情報量を比較するには，新証券の発行の前と後の 2 つの均衡を計算しなければならないが，以下の議論でみてとれるように，定理 7 はその手間を省いてくれる．これが定理 7 の有用性のひとつである．

まずは数理的に数値例を与えよう：

$$\begin{aligned} K &= H = 3, \\ d_0 &= d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d_1 &= d_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ L &= M = 1, \\ D &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} 2^{-1} \\ 2^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma &= 2^{-1/2}. \end{aligned}$$

また， $0 < t_0 = t_1 = t_2 = t_3 < \infty$ とする．

上の数学的定義によれば，3 種類のマクロ経済的リスク・ファクターと 3 人の情報劣位的投資家が存在する．情報優位的投資家と 2 番目の情報劣位的投資家 ($h = 2$) は 1 番目のリスク・ファクター x_1 に関して 1 単位を初期保有し，他方 1 番目の情報劣位的投資家 ($h = 1$) と 3 番目の情報劣位的投資家 ($h = 3$) は 3 番目のリスク・ファクター x_3 に関して 1 単位を初期保有する．また，情報優位的投資家の初期保有量にはランダム項もあるが，それは第 1 リスク・ファクター x_1 についてはのみであり，なおかつそのランダム項は確率変数 $y = y_1$ である．証券取引に先立ってこの投資家が受け取る情報は確率変数 $w = w_1 = (1/2)x_1 + (1/2)x_2 + (1/2^{1/2})z_1$ で与えられる．全ての投資家はリスク回避的で，彼らのリスク許容度は全て等しい． F と Γ が仮定 2.1 を満たすことに注意しよう．

当初の市場スパン $\mathcal{M}$ は $(1, 0, 0)^\top$ で張られる 1 次元部分空間とし， $\mathcal{M} = \mathcal{M}_h$ が任意

の $h \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対して成立するとする．つまり，当初市場では第 1 リスク・ファクター x_1 に完全相関する証券のみが取引されており，なおかつこの証券の取引に全投資家が参加できるとする．そこで 2 種類の新しい証券（例えば 2 種類の社債）のいずれか一方が新たに市場に導入され，なおかつ導入後は全ての投資家はその新証券を取引に参加できるものと想定しよう．2 種類の証券のリターンは $(0, 1, 0)^\top$ および $(0, 0, 1)^\top$ で与えられる．それゆえ新証券導入後に実現される市場スパンは

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と定義すれば， $\mathcal{M}' = \text{col } A'$ および $\mathcal{M}'' = \text{col } A''$ のいずれかとなる．全員参加の仮定により，任意の h に対し， $\mathcal{M}'_h = \mathcal{M}'$ と $\mathcal{M}''_h = \mathcal{M}''$ が成立する．

直交射影を表す行列 $B(\mathcal{M}_h, V_0)$, $B(\mathcal{M}'_h, V_0)$, $B(\mathcal{M}''_h, V_0)$ はいずれも対称で， $\text{row } B(\mathcal{M}_h, V_0) \subset \text{row } B(\mathcal{M}'_h, V_0)$ および $\text{row } B(\mathcal{M}_h, V_0) \subset \text{row } B(\mathcal{M}''_h, V_0)$ となるので，

$$\begin{aligned} \text{row } B(\mathcal{M}_h, V_0) [-D t_0 V_0^{-1} F] &\subseteq \text{row } B(\mathcal{M}'_h, V_0) [-D t_0 V_0^{-1} F] \\ \text{row } B(\mathcal{M}_h, V_0) [-D t_0 V_0^{-1} F] &\subseteq \text{row } B(\mathcal{M}''_h, V_0) [-D t_0 V_0^{-1} F] \end{aligned}$$

が成立する．したがって，定理 7 によれば，いずれの証券でも導入された結果，新しい均衡価格は，導入前の均衡価格と少なくとも同程度か，またはそれより多くの情報を伝える．以下では， $(0, 1, 0)^\top$ を導入するほうが， $(0, 0, 1)^\top$ の場合よりも多くの情報が均衡価格を通じて伝わることを定理 7 を使って示す．

本稿では，均衡価格や均衡において達成される投資家の消費水準や効用水準を明示的に導出することはしないが，この結果の興味深い点は以下の通り説明されよう．まず，情報優位的投資家の初期保有量は $(1 + y_1)x_1$ である． $E(y_1) = 0$ なので，ここでこの投資家の初期保有量が x_1 であるケース（つまり，マクロ経済的リスク x ではかった初期保有量は不確実性を伴わず，その初期保有量が $Dy + d_0$ の期待値に等しいケース）をベンチマークとして考えよう．さらに，情報優位的投資家は w を観察しないとする．このとき，この証券市場モデルでは情報は完全に対称的であり，経済厚生上の観点からは，上記 2 種類の証券のうち $(0, 0, 1)^\top$ をリターンとする方が導入されるべきである．なぜなら， d_h ($h \in \{0, 1, 2, 3\}$) の定義により， $(0, 0, 1)^\top$ は投資家間に偏在する 3 番目のリスク・ファクターのシェアリングに役立つが，2 番目のリスク・ファクターに関する初期保有量は全ての投資家にとってゼロであり，かつ全投資家が同じリスク許容度を持つので， $(0, 1, 0)^\top$ をリターンとする証券はこのようなシェアリングの機能を持ち得ないからである．本節の数値例は，シェアリングの機能を持ち得ない証券でも，均衡価格を通じた情報伝達の観点からは導入されるべきであるケースが存在することを示している．特に，この数値例では， $(0, 1, 0)^\top$ の導入後には，情報優位的投資家が受け取った情報 w が完全に伝わるので，情報の非対称性が均衡において消滅し，第 1 の証券 $(1, 0, 0)^\top$ の取引量と均衡価格にも影響が及ぶことが予想される．

均衡価格が伝える情報量を実際に計算してみよう．まず，情報優位的投資家が情報 w

を受け取った後に期待する（条件付）共分散行列 V_0 は

$$V_0 = I_3 - FF^\top = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる．したがって，

$$V_0^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となる．よって，

$$V_0^{-1}F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である．したがって，

$$[-D \ t_0 V_0^{-1}F] = \begin{bmatrix} -1 & t_0 \\ 0 & t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．

新しい証券が導入され後の市場スパンへの， V_0 で定められる内積に関する直交射影を表す行列を求めよう．まず， $(0, 1, 0)^\top$ が導入された場合には，

$$B(\mathcal{M}', V_0) = A' ((A')^\top V_0 A')^{-1} (A')^\top V_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．他方， $(0, 0, 1)^\top$ が導入された場合には，

$$B(\mathcal{M}'', V_0) = A'' ((A'')^\top V_0 A'')^{-1} (A'')^\top V_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．

これより，情報伝達量を示す行列を計算すると

$$\begin{aligned} B(\mathcal{M}', V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1}F] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & t_0 \\ 0 & t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t_0 \begin{bmatrix} -1/t_0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B(\mathcal{M}'', V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1}F] &= \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & t_0 \\ 0 & t_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (2/3)t_0 \begin{bmatrix} -3/2t_0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．よって，証券 $(0, 1, 0)^\top$ の導入後に均衡価格を通じて伝わる情報は $w_1 - (1/t_0)y_1$ および w_1 それ自身を観察して得られる情報に等しく，他方，証券 $(0, 0, 1)^\top$ の導入後に

均衡価格を通じて伝わる情報は $w_1 - (3/2t_0)y_1$ を観察して得られる情報に等しい．実はこの情報は当初の市場スパン $\mathcal{M}$ の均衡価格によっても伝えられることが容易に証明できる．それゆえ前者の場合は，情報劣位的投資家は情報優位的投資家と証券リターンに関しては同等の情報を得る．他方，後者の場合，情報劣位的投資家が受け取る情報 $w_1 - (3/2t_0)y_1$ には y_1 が混在しているので，情報の非対称性が均衡においても存在し続けることになる．

7 結論

本稿では，リスク・ファクターが正規分布に従い，各投資家がリスク中立的かリスク回避的で，なおかつリスク回避的な場合はリスク許容度（Arrow-Pratt の絶対的リスク回避度の逆数）が消費量に依存せず一定であるような証券市場の数理モデルにおいて，均衡価格がインサイダー情報を広く投資家に伝えるかについて考察した．このような数理モデルは数多くの先行文献で取り扱われたが，本稿のモデルの特徴は，市場が不完備であり，なおかつ投資家がいくつかの証券の市場取引には参加できない状況を許容している点にある．また，リスク・ファクターの次元が任意であることも，先行文献の多くに勝っている点である．

本稿では，情報劣位的投資家（インサイダー情報を持たない投資家）がリスク回避的ならば，情報優位的投資家（インサイダー情報を持つ投資家）がリスク回避的であるか否かにかかわらず，均衡価格が伝達する情報は一意に定まることを証明し，それを特徴付けることに成功した．特に，もし情報優位的投資家がリスク中立的ならば，均衡は一意に存在し，なおかつ情報優位的投資家が持つ，証券のリターンに関するインサイダー情報は均衡価格によって全て情報劣位的投資家に伝えられることを示した．他方，もし情報劣位的投資家がリスク中立的で情報優位的投資家がリスク回避的ならば，複数の均衡が存在し，それらの均衡の価格は互いに異なる情報量を伝える可能性があることを示した．またこういった情報量に関する研究結果の応用例を 2 つ挙げた．

本稿では解決できなかった問題はいくつかある．まず，定理 7 で全ての投資家がリスク回避的であるときに均衡価格が伝達する情報を特徴付けたものの（確率ベクトルである）均衡価格体系が一意であるかどうかはまだ確認されていない．リスク・ファクターの次元が低いケースを取り扱った先行文献から，均衡価格体系の一意性が強く予想されるが，その証明は未だ得られてない．第 2 に，定理 7 では，市場の不完備性や投資家の取引可能性についての条件である (5) 式が仮定されているが，それがこの定理が与える特徴づけにとって本当に必要不可欠な条件であるかどうかは明らかでない．第 3 に，命題 6 は均衡が複数存在するための簡明な十分条件を与えているが，完備市場や全員参加の条件など強い仮定がおかれているため，複数均衡の存在が，例えば不完備市場においてどの程度一般的な現象かについてはあまり有用な指針は与えてくれない．この点の見極めも大事だろう．さらに，本稿のモデルでは複数の情報優位的投資家が異なる情報を得るケースを排除していたが，こういったケースもまた今後の研究の課題である．また，6.2 節では，本稿の均衡価格の伝達情報量に関する結果を，新証券の導入の帰結を見極めるために応用したが，本稿の結果は新証券導入のより広範な厚生経済学的研究に応用されるべきものである．

A シグナルが伝える情報量

定理 7 の直前に定義したように，マクロ経済的リスクを表す線型空間 R^K の部分空間 $\text{col } F$ を $\mathcal{L}$ で表し，そのユークリッド内積に関する直交補空間を $\mathcal{L}^\perp$ で表すことにする．以下の補題は， y と w の線型結合として表されるいかなるシグナルも， $\mathcal{L}^\perp$ に属するマクロ経済的リスクに関する情報は全く与えないことを示している．

補題 8 N を正の定数， $S = [S_0 \ S_1 \ S_2]$ を $N \times (1 + L + M)$ 行列とする． N 次元確率ベクトル s を

$$s = S_0 + S_1 y + S_2 w \quad (7)$$

と定義する．このとき任意の $a \in \mathcal{L}^\perp$ に対し， $E(a^\top x | s) = E(a^\top x)$ および $C(a^\top x, x | s) = C(a^\top x, x)$ が成り立つ．

シグナル s の最も典型的な例は線型合理的期待均衡 p であり，このときは $N = K$ である．もうひとつの例は情報優位的投資家が観察するシグナル w であり，これは $N = L + M$ ，

$$S_0 = 0, S_1 = \begin{bmatrix} I_L \\ 0_{M \times L} \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0_{L \times M} \\ I_M \end{bmatrix}$$

とすることで得られる．さらにもうひとつの例は，情報優位的投資家の，固定されたリスク価格 $\pi \in R^K$ の下での超過需要である．付録 B でみるように，これは $N = K$ ， $S_0 = -B(\mathcal{M}, V_0)(t_0 V_0^{-1} \pi + d_0)$ ， $S_1 = -B(\mathcal{M}, V_0)D$ ， $S_2 = t_0 B(\mathcal{M}, V_0)V_0^{-1}F$ とおくことで得られる．また，上の補題は，任意の $a \in \mathcal{L}^\perp$ に対し， $a^\top x$ と他のいかなる ($\mathcal{L}^\top$ に属するとは限らない) マクロ経済的リスクとの共分散に関する期待も x に基づいて更新することは出来ないことを示している．

補題 8 の証明 まず，

$$C((x, s), (x, s)) = \begin{bmatrix} I_K & FS_2^\top \\ S_2 F^\top & C(s, s) \end{bmatrix}$$

となることに注意しておく．また，一般性を失うことなく $C(s, s)$ は正値定符号と仮定できる．なぜなら，もし正値定符号でなければ， s に属する N 成分 (確率変数) のうちのいくつかの線型結合として他の全ての成分を表すことができ，なおかつそのような成分の集まりが線型独立 (つまり，この集まりに属するいずれの成分も，やはりそれに属する他の成分の線型結合として表せ得ないということ) となるように成分を選ぶことができるからである．そのように選ばれた成分の集まりを補題に登場する s とおけば， s が伝える情報には違いはないし，なおかつ正値定符号性が得られる．

$N \times N$ 行列 $C(s, s)$ は逆行列を持つので，例えば Anderson (1984) の定理 2.5.1 により，

$$E(x | s) = FS_2^\top C(s, s)^{-1} s,$$

$$C(x, x | s) = I_K - FS_2^\top C(s, s)^{-1} S_2 F^\top$$

が得られる．また， $a^\top F = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
& E(a^\top x|s) \\
&= a^\top E(x|s) \\
&= a^\top F S_2^\top C(s, s)^{-1} w \\
&= 0 \\
&= E(a^\top x), \\
& C(a^\top x, x|s) \\
&= a^\top C(x, x|s) \\
&= a^\top (I_K - F S_2^\top C(s, s)^{-1} S_2 F^\top) \\
&= a^\top - a^\top F S_2^\top C(s, s)^{-1} S_2 F^\top \\
&= a^\top \\
&= C(a^\top x, x)
\end{aligned}$$

が成立する．

///

次の補題では，部分空間 $\mathcal{L}$ の性質を取り扱う．

補題 9 1. $R^K = (\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp) + (\mathcal{M}_h^\perp + \mathcal{L})$.

2. $\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp$ と $\mathcal{M}_h^\perp + \mathcal{L}$ はユークリッド内積に関して互いに直交する．

3. (7) 式の形で表される任意の s で条件付けられた x の共分散行列を V とすると， V で定められる内積に関しても $\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp$ と $\mathcal{M}_h^\perp + \mathcal{L}$ は互いに直交する．

4. ユークリッド内積に関する， $\mathcal{M}_h$ における $\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp$ の直交補空間を $\mathcal{K}_h$ で表すとすると，任意の $\zeta \in R^K$ に対して， $\zeta \in \mathcal{M}_h$ と $B(\mathcal{M}_h^\perp + \mathcal{L}, I_K)\zeta \in \mathcal{K}_h$ は同値である．

補題 9 の証明 1. 2. この主張は $(\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp)^\perp = \mathcal{M}_h^\perp + \mathcal{L}$ より従う．

3. 任意の $\zeta \in \mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp$ と任意の $\xi \in \mathcal{M}_h^\perp + \mathcal{L}$ に対し，補題 8 により，

$$\zeta^\top V \xi = \zeta^\top C(x, x|s) \xi = C(\zeta^\top x, x|s) \xi = C(\zeta^\top x, x) \xi = \zeta \xi = 0$$

が成立する．

4. $\Pi_1 = B(\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp, I_K)$ および $\Pi_2 = B(\mathcal{M}_h^\perp + \mathcal{L}, I_K)$ と書くことにしよう．任意の $\zeta \in R^K$ に対し， $\zeta = \Pi_1 \zeta + \Pi_2 \zeta$ が成立する． $\Pi_1 \zeta \in \mathcal{M}_h$ なので， $\zeta \in \mathcal{M}_h$ と $\Pi_2 \zeta \in \mathcal{M}_h$ は同値である．さらに， $\Pi_2 \zeta$ は $\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp$ に属する任意のベクトルと直交するので， $\Pi_2 \zeta \in \mathcal{K}_h$ と $\Pi_2 \zeta \in \mathcal{M}_h$ は同値である．したがって $\zeta \in \mathcal{M}_h$ と $\Pi_2 \zeta \in \mathcal{K}_h$ は同値である．

///

補題 10 $\mathcal{M}$ を市場スパンとし, V を対称かつ正値定符号の $K \times K$ 行列とする. 部分空間 $\{B(\mathcal{M}, V)\zeta \in \mathcal{M} \mid \zeta \in \mathcal{L}\}$ を $\mathcal{H}$ で, $\mathcal{M}$ のもうひとつの部分空間 $\{\zeta \in \mathcal{M} \mid \text{任意の } \xi \in \mathcal{L} \text{ に対し } \xi^\top V \zeta = 0\}$ を $\mathcal{I}$ で表すことにする. このとき $\mathcal{M} = \mathcal{H} + \mathcal{I}$ が成立し, なおかつ $\mathcal{H}$ と $\mathcal{I}$ は V で定められる内積に関して直交する.

補題 10 の証明 まず, $VB(\mathcal{M}, V)$ が対称な $K \times K$ 行列であることを示すのは容易である. 次に, $\zeta \in \mathcal{M}$ とすると, 任意の $q \in \mathcal{L}$ に対し,

$$\begin{aligned}\zeta^\top V(B(\mathcal{M}, V)q) &= \zeta^\top (VB(\mathcal{M}, V))q \\ &= q^\top (VB(\mathcal{M}, V))\zeta \\ &= q^\top V(B(\mathcal{M}, V)\zeta) \\ &= q^\top V\zeta\end{aligned}$$

となる. それゆえ $\zeta^\top V(B(\mathcal{M}, V)q) = 0$ と $q^\top V\zeta = 0$ は同値である. ここで $q \in \mathcal{L}$ の選択は任意だったので, これは任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\zeta^\top V\xi = 0$ が成立することと $\zeta \in \mathcal{I}$ が同値であることを示している. ///

B 期待効用最大化問題

この節では, マクロ経済的リスク x の条件付き分布が平均ベクトル $\mu \in R^K$ と共分散行列 $V \in R^{K \times K}$ を持つ正規分布に従い (ただし V は正値定符号), リスク価格ベクトルが $\pi \in R^K$, 参加スパンが $\mathcal{M}_h$ であるときに, 一定のリスク許容度 t_h と x に関して初期保有量 $\delta^\top x$ (但し $\delta \in R^K$) を持つ投資家の期待効用最大化問題を考察する. この枠組みは, 情報優位的投資家と情報劣位的投資家のいずれにも適用され得るものである.

もしこの投資家の超過需要が $\zeta^\top x$ ならば (ただし $\zeta \in \mathcal{M}_h$), 消費量 (確率変数) は $(\delta + \zeta)^\top x - \pi^\top \zeta$ になる. この消費量の条件付き期待値は $(\delta + \zeta)^\top \mu - \pi^\top \zeta$, 条件付き分散は $(\delta + \zeta)^\top V(\delta + \zeta)$ に等しい. 絶対的危険回避度一定の仮定の下で, この期待効用関数の最大化が, 以下の関数の最大化と同値であることは良く知られている.¹²

$$(\delta + \zeta)^\top \mu - \pi^\top \zeta - (2t_h)^{-1}(\delta + \zeta)^\top V(\delta + \zeta). \quad (8)$$

行列 V で定められる内積に関する, $\mathcal{M}_h$ への直交射影を表す行列を $B(\mathcal{M}_h, V)$ と書くことにする. 次の補題は最大化のための 1 階の条件の良く知られているので, その証明は省く.

補題 11 最大化問題

$$\begin{aligned}\text{Max} \quad & (\delta + \zeta)^\top \mu - \pi^\top \zeta - (2t_h)^{-1}(\delta + \zeta)^\top V(\delta + \zeta) \\ \text{subject to} \quad & \zeta \in \mathcal{M}_h\end{aligned}$$

の解は

$$\zeta = B(\mathcal{M}_h, V) (t_h V^{-1} (\mu - \pi) - \delta)$$

で与えられる.

¹²例えば Duffie and Rahi (1995) で説明されている.

ここからはさらに，条件付き平均 μ と条件付き共分散行列 V は (7) 式のような線型のシグナルによって条件付けられていると仮定する． $\Pi_1 = B(\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp, I_K)$ および $\Pi_2 = B(\mathcal{M}_h^\perp + \mathcal{L}, I_K)$ と書くことにする．また $\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp$ の $\mathcal{M}_h$ における， V に関する直交補空間を $\mathcal{K}_h$ で書くことにする．このとき，補題の期待効用最大化問題は，ふたつの解きやすい部分問題に分解される．

補題 8 と補題 9 の 2 より，

$$\begin{aligned} & (\delta + \zeta)^\top \mu - \pi^\top \zeta - (2t_h)^{-1} (\delta + \zeta)^\top V (\delta + \zeta) \\ = & (\Pi_1 \delta + \Pi_1 \zeta)^\top (\Pi_1 \mu) - (\Pi_1 \pi)^\top (\Pi_1 \zeta) - (2t_h)^{-1} (\Pi_1 \delta + \Pi_1 \zeta)^\top (\Pi_1 \delta + \Pi_1 \zeta) \\ & + (\Pi_2 \delta + \Pi_2 \zeta)^\top (\Pi_2 \mu) - (\Pi_2 \pi)^\top (\Pi_2 \zeta) - (2t_h)^{-1} (\Pi_2 \delta + \Pi_2 \zeta)^\top V (\Pi_2 \delta + \Pi_2 \zeta) \end{aligned}$$

が得られる．ここで右辺の 1 行目は $\Pi_2 \zeta$ に全く依存せず，第 2 行目は $\Pi_1 \zeta$ に全く依存しない．したがって，補題 9 の 2 により，前節の期待効用最大化問題を解くことは，以下のふたつの最大化問題：

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & (\Pi_1 \delta + \zeta_1)^\top (\Pi_1 \mu) - (\Pi_1 \pi)^\top \zeta_1 - (2t_h)^{-1} (\Pi_1 \delta + \zeta_1)^\top (\Pi_1 \delta + \zeta_1), \\ \text{subject to} \quad & \zeta_1 \in \mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp, \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & (\Pi_2 \delta + \zeta_2)^\top (\Pi_2 \mu) - (\Pi_2 \pi)^\top \zeta_2 - (2t_h)^{-1} (\Pi_2 \delta + \zeta_2)^\top V (\Pi_2 \delta + \zeta_2), \\ \text{subject to} \quad & \zeta_2 \in \mathcal{K}_h \end{aligned}$$

を解くことに他ならない．

補題 12 V が，(7) 式の形に書かれるシグナルで条件付けられた共分散行列を表すとすると，期待効用最大化問題

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & (\delta + \zeta)^\top \mu - \pi^\top \zeta - (2t_h)^{-1} (\delta + \zeta)^\top V (\delta + \zeta). \\ \text{subject to} \quad & \zeta \in \mathcal{M}_h \end{aligned}$$

の解は

$$\zeta = \Pi_1 (t_h (\mu - \pi) - \delta) + B(\mathcal{K}_h, V) (t_h V^{-1} (\Pi_2 \mu - \Pi_2 \pi) - \Pi_2 \delta)$$

で与えられる．

補題 12 の証明 補題 B をふたつの部分問題のそれぞれに適用すれば，

$$\zeta = B(\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp, V) (t_h (\Pi_1 \mu - \Pi_1 \pi) - \Pi_1 \delta) + B(\mathcal{K}_h, V) (t_h V^{-1} (\Pi_2 \mu - \Pi_2 \pi) - \Pi_2 \delta)$$

が得られる．ここで $B(\mathcal{M}_h \cap \mathcal{L}^\perp, V) \Pi_1 = \Pi_1$ なので，証明が完了する．

///

C 定理7の証明

$P = [P_0 \ P_1 \ P_2]$ を $K \times (1 + L + M)$ 行列とし, $p = P_0 + P_1 y + P_2 w$ を, 市場スパン $\mathcal{M}$ の線型合理的期待均衡とする. $G \in R^{K \times K}$ を $E(x|p) = G(p - P_0)$ で, $V_0 \in R^{K \times K}$ を $C(x, x|p) = V_0$ で定義する. 以下では先ず

$$\text{row } [P_1 \ P_2] \supseteq \text{row } (B(\mathcal{M}, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F]) \quad (9)$$

を証明する. そこで $\alpha \in R^L$ および $\beta \in R^M$ とし,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \ker [P_1 \ P_2]$$

が成り立っているとすると,

$$P_0 + P_1 \alpha + P_2 \beta = P_0$$

なので, y の実現値が α で w の実現値が β のとき, p の実現値は P_0 である. また, y の実現値が 0 で w の実現値も 0 のときにも p の実現値は P_0 である. したがって, 任意の情報劣位的投資家 $h \in \{1, \dots, H\}$ に対し,

$$\begin{aligned} & B(\mathcal{M}_h, V_1) (t_h V_h^{-1} (G(P_1 \alpha + P_2 \beta) - (P_0 + P_1 \alpha + P_2 \beta)) - d_h) \\ &= B(\mathcal{M}_h, V_1) (-t_h V_1^{-1} P_0 - d_h) \end{aligned}$$

が成立する. 均衡の需給一致条件により,

$$\begin{aligned} & B(\mathcal{M}_0, V_0) (t_0 V_0^{-1} (F\beta - (P_0 + P_1 \alpha + P_2 \beta)) - (D\alpha + d_0)) \\ &= B(\mathcal{M}_0, V_0) (-t_0 V_0^{-1} P_0 - d_0) \end{aligned}$$

が成立する. したがって, $B(\mathcal{M}, V_0) (t_0 V_0^{-1} F\beta - D\alpha) = 0$, すなわち

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \ker (B(\mathcal{M}, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F])$$

が成立する. よって

$$\ker [P_1 \ P_2] \subseteq \ker (B(\mathcal{M}, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F])$$

が示されたことになる. ここで

$$\ker [P_1 \ P_2] = (\text{row } [P_1 \ P_2])^\perp$$

であり, 同様の等式が $\ker (B(\mathcal{M}, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F])$ に対しても成り立つ. よって

$$(\text{row } [P_1 \ P_2])^\perp \subseteq (\text{row } (B(\mathcal{M}, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F]))^\perp$$

となるが, これは (9) 式と同値である.

これにより,

$$\text{rank } [P_1 \ P_2] \leq \text{rank } (B(\mathcal{M}_0, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F])$$

を示せば証明が完了する．これは

$$\text{col } [P_1 \ P_2] \subseteq \text{col } (B(\mathcal{M}_0, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F])$$

より従うが，さらにこれは

$$\text{col } [P_1 \ P_2] \subseteq \mathcal{K}_0 + \text{col } (\Pi_1 D) \quad (10)$$

と

$$\text{col } (B(\mathcal{M}, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F]) = \mathcal{K}_0 + \text{col } (\Pi_1 D) \quad (11)$$

より従う．この2式を以下で証明することにする．

まず(11)式を証明するために，

$$\begin{aligned} & \text{col } (B(\mathcal{M}, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F]) \\ &= \text{col } B(\mathcal{M}, V_0) D + \text{col } B(\mathcal{M}, V_0) V_0^{-1} F \end{aligned}$$

が成立することに注意しよう．ここで，容易に $\text{col } V_0^{-1} F = \mathcal{L}$ が示される．補題10により， $\{B(\mathcal{M}_0, V_0)\zeta \mid \zeta \in \mathcal{L}\}$ は， $\mathcal{M}_0$ における V_0 に関する $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}^\perp$ の直交補空間である．補題9の2により，それはユークリッド内積に関する直交補空間にもなっている．よってそれは $\mathcal{K}_0$ に等しい．それゆえ $\text{col } B(\mathcal{M}, V_0) V_0^{-1} F = \mathcal{K}_0$ が得られる．他方，再び補題9の3により，

$$\begin{aligned} & B(\mathcal{M}_0, V_0) D \\ &= B(\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{L}^\perp, V_0) D + B(\mathcal{K}_0, V_0) D \\ &= \Pi_1 D + B(\mathcal{K}_0, V_0) D \end{aligned}$$

が成立する．したがって，

$$\begin{aligned} & \text{col } (B(\mathcal{M}_0, V_0) [-D \ t_0 V_0^{-1} F]) \\ &= \Pi_1 D + B(\mathcal{K}, V_0) D + \mathcal{K}_0 \\ &= \Pi_1 D + \mathcal{K}_0 \end{aligned}$$

となる．これで(11)式が示された．

次に(10)式を証明しよう．まず， $\text{col } [P_1 \ P_2] \subseteq \mathcal{M}_0$ なので，補題9の4により， $\text{col } \Pi_2 [P_1 \ P_2] \subseteq \mathcal{K}_0$ が成立する．したがって，

$$\begin{aligned} \text{col } [P_1 \ P_2] &= \text{col } (\Pi_1 [P_1 \ P_2] + \Pi_2 [P_1 \ P_2]) \\ &\subseteq \text{col } \Pi_1 [P_1 \ P_2] + \text{col } \Pi_2 [P_1 \ P_2] \\ &\subseteq \text{col } \Pi_1 [P_1 \ P_2] + \mathcal{K}_0 \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\text{col } \Pi_1 [P_1 \ P_2] = \text{col } \Pi_1 D$$

を示せば証明が完了する．ここまでの議論で，仮定(5)式は全く使われてないことに注意しよう．

補題 12 より ,

$$\begin{aligned}
& B(\mathcal{M}_0, V_0) (t_0 V_0^{-1} (Fw - p) - (Dy + d_0)) \\
& + \sum_{h \geq 1} B(\mathcal{M}_h, V_1) (t_h V_1^{-1} (G(p - P_0) - p) - d_h) \\
= & t_0 \Pi_1 Fw - \Pi_1 (Dy + d_0) - t_0 \Pi_1 p \\
& + B(\mathcal{K}_0, V_0) (t_0 V_0^{-1} \Pi_2 Fw - \Pi_2 (Dy + d_0) - t_0 V_0^{-1} \Pi_2 p) \\
& + \sum_{h \geq 1} (t_h \Pi_1 G(p - P_0) - \Pi_1 d_h - t_h \Pi_1 p) \\
& + \sum_{h \geq 1} B(\mathcal{K}_h, V_h) (t_h V_1^{-1} \Pi_2 G(p - P_0) - \Pi_2 d_h - t_h V_1^{-1} \Pi_2 p) \\
= & t_0 \Pi_1 Fw - \Pi_1 (Dy + d_0) - t_0 \Pi_1 p \\
& + \sum_{h \geq 1} (t_h \Pi_1 G(p - P_0) - \Pi_1 d_h - t_h \Pi_1 p) \\
& + B(\mathcal{K}_0, V_0) (t_0 V_0^{-1} \Pi_2 Fw - \Pi_2 (Dy + d_0) - t_0 V_0^{-1} \Pi_2 p) \\
& + \sum_{h \geq 1} B(\mathcal{K}_h, V_h) (t_h V_1^{-1} \Pi_2 G(p - P_0) - \Pi_2 d_h - t_h V_1^{-1} \Pi_2 p) .
\end{aligned}$$

最右辺の最初の 2 行の和は $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}^\perp$ に属し , 最後の 2 行の和は $\sum_{h \geq 0} \mathcal{K}_h$ に属する . ただし , 仮定 (5) と $\mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_0$ により , $\mathcal{K}_h \subseteq \mathcal{K}_0$ が成立する . よって $\sum_{h \geq 0} \mathcal{K}_h = \mathcal{K}_0$ となるので , 各和ともゼロでなければならない . 特に ,

$$t_0 \Pi_1 Fw - \Pi_1 (Dy + d_0) - t_0 \Pi_1 p + \sum_{h \geq 1} (t_h \Pi_1 G(p - P_0) - \Pi_1 d_h - t_h \Pi_1 p) = 0. \quad (12)$$

$Fw = E(x|w)$ と $G(p - P_0) = E(x|p)$ が成り立つので , 補題 8 により , $\Pi_1 Fw = \Pi_1 G(p - P_0) = 0$ となる . (12) 式はそれゆえ

$$-\Pi_1 Dy - \Pi_1 \left(\sum_{h \geq 0} d_h \right) - \left(\sum_{h \geq 0} t_h \right) \Pi_1 p = 0$$

と同値である . よって , $d = \sum_{h \geq 0} d_h \in \mathbb{R}^K$ および $t = \sum_{h \geq 0} t_h \in \mathbb{R}_{++}$ と書くことにすれば

$$\Pi_1 p = -t^{-1} \Pi_1 (Dy + d) ,$$

すなわち ,

$$\begin{aligned}
\Pi_1 P_0 &= -t^{-1} \Pi_1 d, \\
\Pi_1 P_1 &= -t^{-1} \Pi_1 D, \\
\Pi_1 P_2 &= 0
\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} & \text{col } \Pi_1 [P_1 \ P_2] \\ &= \text{col } [\Pi_1 P_1 \ \Pi_1 P_2] \\ &= \text{col } \Pi_1 P_1 + \text{col } \Pi_1 P_2 \\ &= \text{col } (-t^{-1} \Pi_1 D) \\ &= \text{col } \Pi_1 D. \end{aligned}$$

以上で (10) 式は証明された．これで証明が終了した．

参考文献

- [1] Admati, A. R., A noisy rational expectations equilibrium for multi-asset securities markets, *Econometrica*, 53 (1985), 629-657.
- [2] Anderson, T. W., *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, second edition, 1984, John Wiley and Sons, New York.
- [3] Balasko, Y., D. Cass, and P. Siconolfi, The structure of financial equilibrium with exogenous yields: The case of restricted participation, *Journal of Mathematical Economics*, 19 (1990), 195-216.
- [4] Bhattacharya, U., P. Reny, and M. Spiegel, Destructive interference in an imperfectly competitive multi-security market, *Journal of Economic Theory*, 65 (1995), 136-170.
- [5] Demange, G., and G. Laroque, Private information and the design of securities, *Journal of Economic Theory*, 65 (1995), 233-257.
- [6] DeMarzo, P., and C. Skiadas, Aggregation, determinacy, and informational efficiency for a class of economies with asymmetric information, *Journal of Economic Theory*, 80 (1998), 123-152.
- [7] Duffie, D., and R. Rahi, Financial market innovation and security design: an introduction, *Journal of Economic Theory*, 65 (1995), 1-42.
- [8] Grossman, S., 1976, On the efficiency of competitive stock markets where traders have diverse information, *Journal of Finance*, 31 (1976), 573-585.
- [9] Grossman, S., 1980, An introduction to the theory of rational expectations under asymmetric information, *Review of Economic Studies*, 48 (1981), 541-559.
- [10] Grossman, S., and J. Stiglitz, On the impossibility of informationally efficient markets, *American Economic Review*, 70 (1980), 393-408.

- [11] Kreps, D. M., A note on “fullfilled expectations” equilibria, *Journal of Economic Theory*, 14 (1977), 32-43.
- [12] Laffont, J.-J., On the welfare analysis of rational expectations equilibria with asymmetric information, *Econometrica*, 53 (1985), 1-29.
- [13] Marin, J. M., and R Rahi, Speculative securities, *Economic Theory*, 14 (1999), 653-668.
- [14] Marin, J. M., and R Rahi, Information revelation and market completeness, *Review of Economic Studies*, 67 (2000), 455-481.
- [15] Mas-Colell, A., “The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach,” 1985, Cambridge University Press.
- [16] Ohashi, K., Security innovation on several assets under asymmetric information, *Japanese Economic Review*; 50 (1999), 75-95.
- [17] Rahi, R., Adverse selection and security design, *Review of Economic Studies*, 63 (1996), 287-300.