経済学のための数学： 宿題 1

京都大学経済研究所 原 千秋

締切：2016 年 4 月 18 日月曜日

関口格先生が以前に作られた宿題を参考にしました.

1. X を $\boldsymbol{R}$ の任意の部分集合とする．このとき，以下の 2 つの条件は同値であることを証明せよ.

   (a) X は一点より成る.

   (b) X の上限と下限が存在し，それらは等しい.

2. 任意の数列の極限は高々ひとつ（つまり，存在するとしたらただひとつ）であることを証明せよ.

3. 実数の集合 $\boldsymbol{R}$ に関する以下の 3 つの条件は同値であることを証明せよ.

   (a) X を $\boldsymbol{R}$ の任意の部分集合とする．もし X が非空かつ上に有界ならば，X の上限が存在する.

   (b) $(x_n)_n$ を任意の数列とする．もし $x_0 \leq x_1 \leq x_n \leq \cdots$ が成立し，かつ，$\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ が上に有界ならば，$(x_n)_n$ の極限が存在する.

   (c) $(x_n)_n$ と $(y_n)_n$ を任意の数列とする．もし $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0$ が成立し，かつ $(y_n - x_n)_n$ が 0 に収束するならば，集合 $\bigcap_{n=0}^{\infty}[x_n, y_n]$（任意の $n = 0, 1, 2, \ldots$ について $x_n \leq y_n$ が成立するすべての $x \in \boldsymbol{R}$ より成る集合）は一点より成る.

4. $(x_n)_n$，$(y_n)_n$，$(z_n)_n$ を任意の数列とする．$x \in \boldsymbol{R}$ とする．もし $(x_n)_n$ と $(y_n)_n$ がいずれも x に収束し，かつ，任意の n について $\min\{x_n, y_n\} \leq z_n \leq \max\{x_n, y_n\}$ が成立するならば，$(z_n)_n$ も x に収束することを証明せよ.

5. 数列 $(x_n)_n$ を，

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

   で定義する．$\{x_1, x_2, \ldots\}$ の上限と下限が存在することを証明し，それらを求めよ.