

経済学のための数学：宿題 2

京都大学経済研究所 原 千秋

締切：2017 年 4 月 24 日月曜日

1. $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ を任意の数列とする. $x \in \mathbf{R}$ とする. もし $(x_n)_n$ と $(y_n)_n$ がいずれも x に収束し, かつ, 任意の n について $\min\{x_n, y_n\} \leq z_n \leq \max\{x_n, y_n\}$ が成立するならば, $(z_n)_n$ も x に収束することを証明せよ.

2. 数列 $(x_n)_n$ を,

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

で定義する. $\{x_1, x_2, \dots\}$ の上限と下限が存在することを証明し, それらを求めよ.

3. $(\sum x_n)_n$ を任意の級数とする. $\delta \in [0, 1)$ (つまり, $0 \leq \delta < 1$) とする. もしある正の整数 N が存在して, 任意の $n > N$ について $\delta|x_n| \geq |x_{n+1}|$ が成立するならば, $(\sum x_n)_n$ は絶対収束することを証明せよ. また, 逆は成立しないことを示せ. (つまり, 絶対収束するが, 任意の $\delta \in (0, 1)$ および任意の正の整数 N について, ある $n > N$ が存在して, $\delta|x_n| < |x_{n+1}|$ が成立する級数 $(\sum x_n)_n$ の例を挙げよ.)

4. f は, 有界閉区間 $[a, b]$ からそれ自身への連続関数とする. 任意の $x \in [a, b]$ について $g(x) = f(x) - x$ とおくことで, 実数値関数 g を $[a, b]$ 上で定義する. g に中間値の定理を適用して, f の不動点 ($f(x) = x$ を満たす $x \in [a, b]$) が存在することを証明せよ.

5. n は非負の整数とする. 実数値関数 f を以下のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(a) $n = 0$ のとき, f は 0 で連続か?

(b) $n = 1$ のとき, f は 0 で連続か?