経済学のための数学：宿題 3

京都大学経済研究所 原 千秋

締切：2016 年 5 月 1 日月曜日

1. (a) $(x_n)_n$ を数列とする．もしある自然数 N が存在し，任意の $n > N$ に対してある $m > n$ が存在し，$x_n \leq x_m$ が成立するならば，$(x_n)_n$ の単調非減少部分列の存在することを証明せよ．

   (b) $(x_n)_n$ を数列とする．もし任意の自然数 N に対してある $n > N$ が存在し，任意の $m > n$ について $x_n > x_m$ が成立するならば，$(x_n)_n$ の厳密な単調減少部分列の存在することを証明せよ．

   (c) 上記 2 つの結果を用いて，任意の数列には単調部分列が存在することを証明せよ．

2. 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が $x \in \boldsymbol{R}$ で微分可能であるとは，次の性質を持つ $c \in \boldsymbol{R}$ が存在することと講義では定義した：x に収束し，かつ，$x_n = x$ が成立するような n が存在しない任意の数列 $(x_n)_n$ について，数列

$$\left(\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right)_n$$

   は c に収束する．

   (a) 上の定義は，次の性質を持つ $c \in \boldsymbol{R}$ が存在することと同値であることを証明せよ：x に収束し，かつ，$x_n = x$ が成立するような n が存在しない任意の数列 $(x_n)_n$ について，数列

$$\left(\frac{|(f(x_n) - f(x)) - c(x_n - x)|}{|x_n - x|}\right)_n$$

   は 0 に収束する．

   (b) f が x で微分可能であるとき，上の定義に登場する c と (a) の条件に登場する c は等しいことを証明せよ．

3. n は非負の整数とする．実数値関数 f を以下のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ゼロではない任意の点で f は微分可能であることを留意せよ．

(a) $n = 1$ のとき，f は 0 で微分可能か？

(b) $n = 2$ のとき，f は 0 で連続微分可能（つまり，f が 0 で微分可能であり，かつ，f' が 0 で連続である）か？

(c) $n = 3$ のとき，f は 0 で連続微分可能か？

4. $\boldsymbol{R}^L$ 上の点列に関する以下の主張

$\boldsymbol{R}^L$ 上の任意の有界な点列には収束する部分列が存在する

は $L = 1$ の場合に真であると仮定して，$L \geq 2$ の一般の場合でも真であることを証明せよ．