

経済学のための数学：宿題 5

京都大学経済研究所 原 千秋

締切：2017 年 5 月 17 日水曜日

1. 以下の 2 つの定理を考えよう.

陰関数定理 $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^2$ の任意の点で連続微分可能であるとする. $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ とする. もし $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ ならば, a を含む (開) 区間 I , b を含む (開) 区間 J , および微分可能な関数 $g: I \rightarrow J$ が存在して, 任意の $(x, y) \in I \times J$ について, $F(x, y) = F(a, b)$ が成立することと $g(x) = y$ が成立することは同値である. さらに,

$$g'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

が成立する.

逆関数定理 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ の任意の点で連続微分可能であるとする. $a \in \mathbf{R}$ とする. もし $f'(a) \neq 0$ ならば, a を含む (開) 区間 I , $f(a)$ を含む (開) 区間 J , および微分可能な関数 $g: J \rightarrow I$ が存在して, 任意の $(x, y) \in I \times J$ について, $f(x) = y$ が成立することと $g(y) = x$ が成立することは同値である. さらに,

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

が成立する.

陰関数定理を使って, 逆関数定理を証明せよ. (ヒント: $F(x, y) = f(x) - y$ と定義して, F に陰関数定理を適用せよ.)

2. L を正の整数, α をゼロではない実数とし, 関数 $F: \mathbf{R}_{++}^L \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$F(x) = (\min\{x^1, x^2, \dots, x^L\})^\alpha$$

と定義する.

- (a) F は同次関数であることを証明せよ. その際, 同次性の次数を求めよ.
- (b) 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対し, x において x の方向に関して (方向) 微分可能であることを証明せよ.
- (c) 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対し, もし $x^1 = x^2 = \dots = x^L$ ならば, いずれの変数に関しても偏微分可能ではないことを証明せよ.
3. (a) 任意の $x > 0$ と任意の正の整数 N について, $\exp(x) > \sum_{n=0}^N x^n/n!$ が成立することを証明せよ. (ヒント: テイラー展開を使い.)
- (b) 関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を以下のように定義する:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0). \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n について, ある $(n-1)$ 次の多項式 p_n が存在して, 任意の $x > 0$ について, f は x で n 回微分可能で,

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} f(x)$$

が成立することを証明せよ. (ただし, $f^{(n)}$ は f の n 回微分を表す. ヒント: n に関する帰納法を使い.)

- (c) f は 0 で任意の回数微分可能であり, $f^{(n)}(0) = 0$ が成立することを証明せよ.