一般均衡理論

平成 19 年 2 月 22 日

1　経済・効率性・均衡

経済のモデルを以下のように定式化する。

1. L 種類の財（$L < \infty$）
    - ここで財には，消費財・投入物・中間生産物・労働・サービスなど財一般が含まれる。
    - 財が提供される時（timing），場所（location）の違いによって同じ財でも別の財として区別される。
    - 不確実性の文脈では，状態依存（state-contingent）に応じて財が区別される。
    - $L < \infty$ という仮定は，無限期間モデル（$t = 1, 2, 3, \ldots$）のモデルなどを排除する。
2. I 人の消費者（$I < \infty$）
3. 消費集合 $X_i \subset \mathbf{R}^L$（$i = 1, \ldots, I$）
    - 消費集合は消費者が生存可能な消費の集合と解釈できる。
    - 以下では $X_i = \mathbf{R}^L_+$ とする。ただし，これは「何も食べなくても生存可能である」とか「0.5 台の車に乗る」とか現実的でない状況を含んでいる。
4. 選好 $\succsim_i$（$i = 1, \ldots, I$）
    - 完備性（completeness），推移性（transitivity）を仮定する。
        - $\forall x_i, x_i' \in X_i \quad x_i \succsim_i x_i'$ or $x_i' \succsim_i x_i$
        - $\forall x_i, x_i', x_i'' \in X_i \quad (x_i \succsim_i x_i'$ and $x_i' \succsim_i x_i'') \Longrightarrow x_i \succsim_i x_i''$
    - $\succ_i$（厳密に好む）および $\sim_i$（無差別）を以下のように定義する。
        - $x_i \succ_i x_i' \iff (x_i \succsim_i x_i'$ and $x_i' \not\succsim_i x_i)$

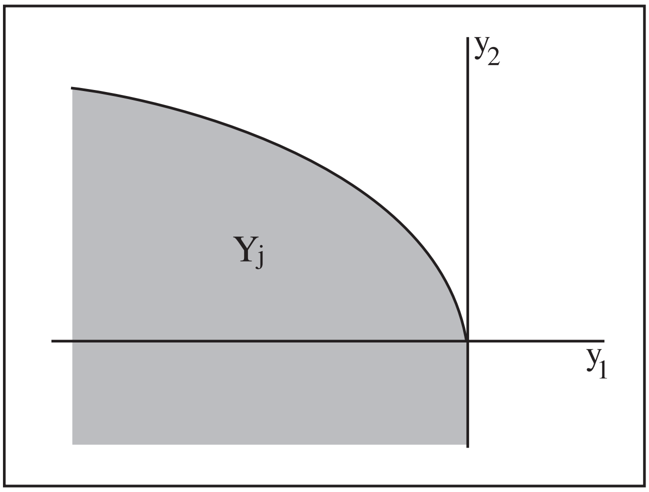
- $x_i \sim_i x'_i \iff (x_i \succsim_i x'_i \text{ and } x'_i \succsim_i x_i)$

- このとき選好の完備性と推移性から以下が成り立つ（証明せよ）。
  - $(x_i \sim_i x'_i \text{ and } x'_i \sim_i x''_i) \Longrightarrow x_i \sim_i x''_i$
  - $(x_i \succ_i x'_i \text{ and } x'_i \sim_i x''_i) \Longrightarrow x_i \succ_i x''_i$
  - $x_i \succsim_i x'_i \iff (x_i \succ_i x'_i \text{ or } x_i \sim_i x'_i)$
  - $x_i \succsim_i x'_i \iff x'_i \not\succ_i x_i$

5. J 社の企業

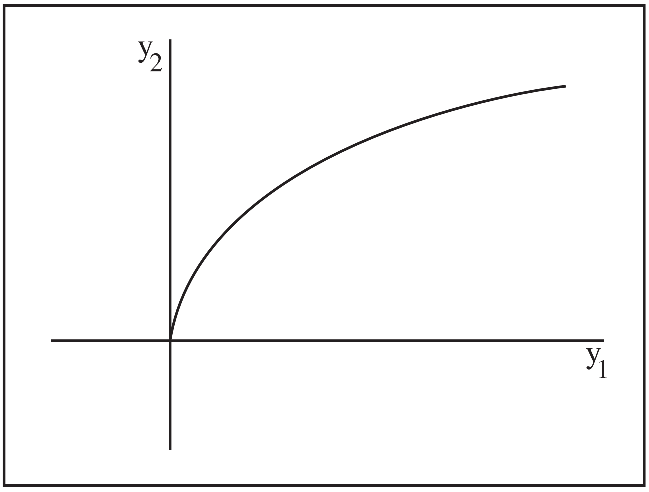
6. 生産集合 $Y_j \subset \mathbf{R}^L$（$j = 1, \ldots, J$）
   - 生産物を正値，投入物を負値で表す。
   - 無償廃棄（free disposal）を仮定する。

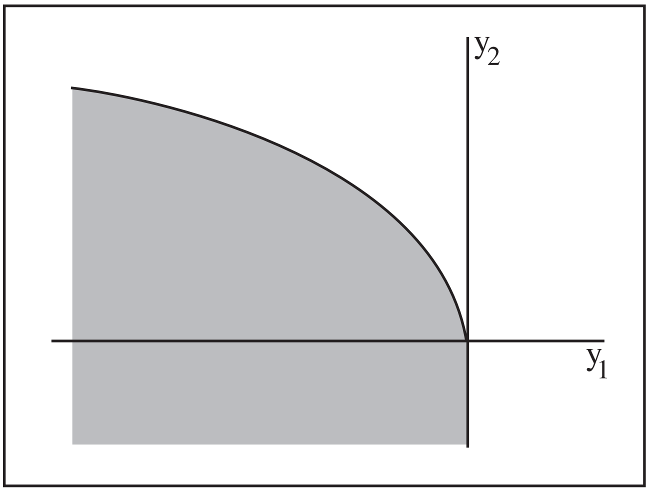
例 1.1 財 1 が投入物，財 2 が生産物（$L = 2$）のケース：



- $L = 2$ のケースには，(i) 生産集合が凸であることと，(ii) 生産関数が規模に関して非逓増であることは同値である。$L > 2$ のケースでは，(i) ならば (ii) が成り立つが，逆は必ずしも成り立たない。これは，生産関数が規模に関して非逓増であることは投入物間の代替関係について何ら制約を課さないのに対して，生産集合が凸であることはそこに制約を課すからである。

例 1.2 $L = 2$ のケースにおける，凸生産集合と規模に関して非逓増な生産関数：以下の 2 つの図において上図は非逓増な生産関数 $y_2 = f(y_1)$ を，下図は生産関数 f に対応する生産集合を描いている。





・以下では生産集合の凸性を仮定する。

7. 財の初期賦存 $\bar{\omega} \in \mathbf{R}^L$

定義 1.1 $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ が配分（allocation）であるとは，任意の $i = 1, \ldots, I$ について $x_i \in X_i$ が成り立ち，任意の $j = 1, \ldots, J$ について $y_j \in Y_j$ が成り立つことをいう。配分 $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ が実行可能配分（feasible allocation）であるとは，$\sum x_i = \bar{\omega} + \sum y_j$ が成り立つことをいう。

定義 1.2 (パレート最適性) 実行可能配分 (x^*, y^*) がパレート最適（Pareto efficient）であるとは，次の (i)，(ii) を同時に満たす実行可能配分 (x, y) が存在しないことをいう。

(i) $\forall i \quad x_i \succsim_i x_i^*$

(ii) $\exists i \quad x_i \succ_i x_i^*$

- パレート最適性の定義に価格は含まれない。また企業の利益も考慮されていない。これらは部分均衡理論の消費者余剰・生産者余剰の概念と対照的である（消費者余剰の計算には財の価格が用いられる）。ただし生産者余剰がその背後にある株主の効用を表していると考えれば，一般均衡理論の効率性概念と整合的に解釈することもできる。

- 厚生経済学や社会選択理論の文脈ではパレート最適性より強い効率性概念が用いられる。（例：衡平性）

- 契約理論・情報の経済学・不完備市場理論の文脈ではパレート最適性より弱い効率性概念が用いられる。（実行可能配分は情報の非対称性や不完備市場の下で実際には実行可能でないかもしれない。）

- 代替的効率性概念 1：配分効率性（allocative efficiency）

  定義 1.3 所与の $\bar{y} \in Y$ に対して $x^* \in X$ が配分効率的であるとは，配分 $(x^*, \bar{y})$ が実行可能であり，かつ $(x^*, \bar{y})$ をパレート改善する実行可能配分 $(x, \bar{y})$ が存在しないことをいう。

- 代替的効率性概念 2：生産効率性（productive efficiency）

  定義 1.4 $y^* \in Y$ が生産効率的であるとは $\sum_j y_j^* < \sum_j y_j$ を満たす $y \in Y$ が存在しないことをいう。

定義 1.5 (価格均衡) 実行可能配分 (x^*, y^*) と価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^L$ が価格均衡（price equilibrium）であるとは，

(i) $\forall j \; \forall y_j \in Y_j \quad p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j$

(ii) $\forall i \; \forall x_i \in X_i \quad (p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^* \Longrightarrow x_i^* \succsim_i x_i)$

が成り立つことをいう。

- 価格均衡の定義式 (i) を利潤最大化条件，定義式 (ii) を効用最大化条件とよぶ。

- 価格均衡の定義式 (ii) において $p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^*$ を満たす任意の $x_i \in X_i$ に着目することは市場完備性の仮定に基づいている。事実もし市場の不完備性のために現在の財と将来の財を一定の価格比で自由に交換することができないならば，(ii) は経済における均衡状態の定義として強すぎる条件である。

2　厚生経済学の基本定理

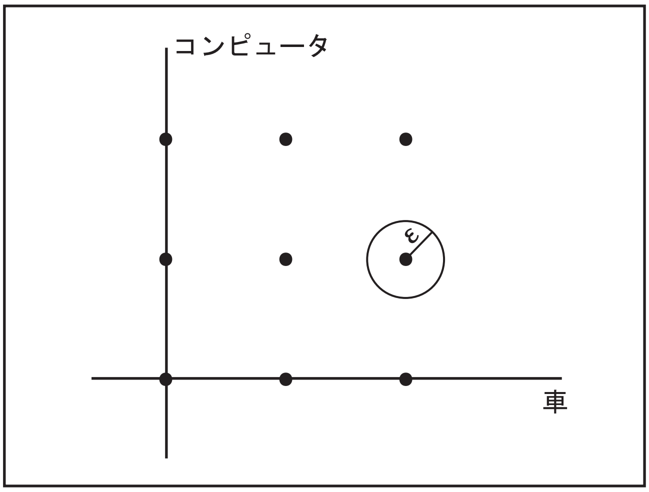
定義 2.1 $(X_i, \succsim_i)$ が局所非飽和（locally non-satiated）であるとは,

$$\forall x_i \in X_i \; \forall \epsilon > 0 \; \exists x_i' \in X_i \quad (|x_i' - x_i| < \epsilon \text{ and } x_i' \succ_i x_i)$$

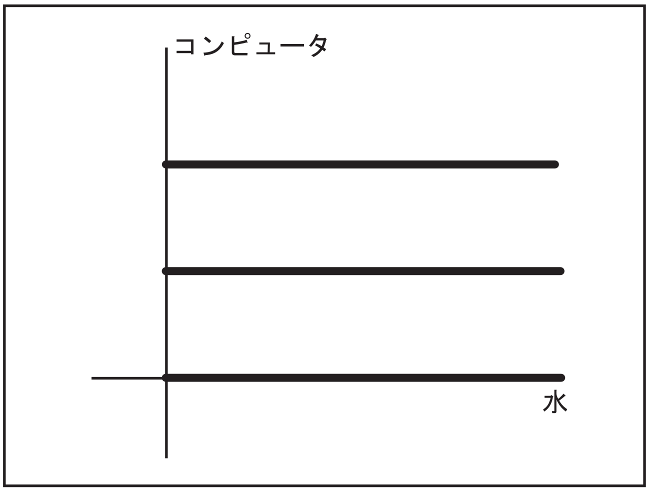
が成り立つことをいう。

- 局所非飽和性は X_i が密であることを要求する。すべての財が不可分財のとき選好は局所非飽和になりえない。

例 2.1 すべての財が不可分財のケース（選好は局所非飽和にならない）:

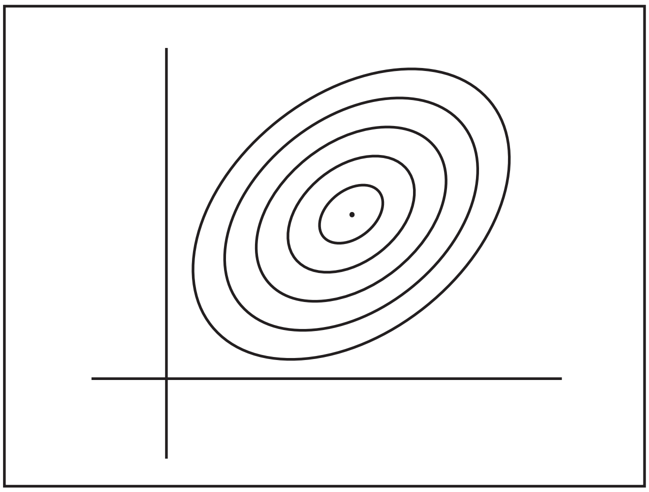


例 2.2 一部の財が不可分財のケース（選好は局所非飽和になりえる）:



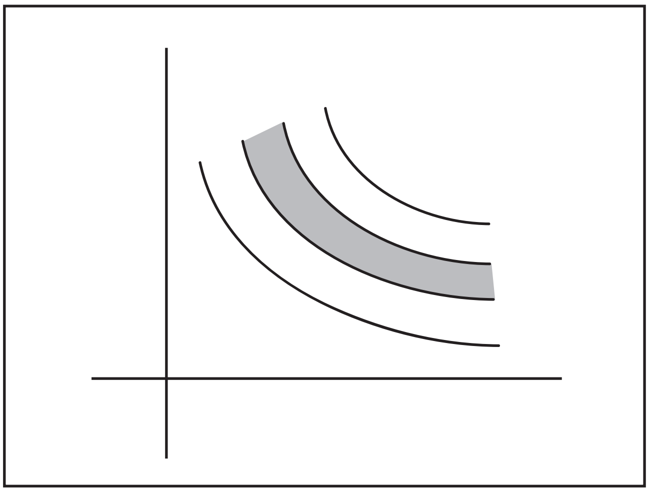
- 至福点（bliss point）を持つ選好は局所非飽和ではない。

例 2.3 至福点を持つ選好：



・厚みのある無差別曲線を持つ選好は局所非飽和ではない。

例 2.4 厚みのある無差別曲線を持つ選好：



定義 2.2 $(X_i, \succsim_i)$ が単調（monotone）であるとは,

$$\forall x_i, x_i' \in X_i \quad (x_i - x_i' \in \mathbf{R}^L_{++} \Longrightarrow x_i \succ_i x_i')$$

が成り立つことをいう[1]。

[1]文献によって選好の単調性はさまざまに定義されるが，以下では定義 2.2 を採用する。なお他の定義の一例として $(X_i, \succsim_i)$ が単調であることを

$$\forall x_i, x_i' \in X_i \quad (x_i - x_i' \in \mathbf{R}^L_{+} \Longrightarrow x_i \succsim_i x_i')$$

によって定めることもある。

・$(X_i, \succsim_i)$ が単調であるならば，$(X_i, \succsim_i)$ は局所非飽和である（証明せよ）。

問題 2.1 $\succsim_i$ は完備性・推移性・局所非飽和性を満たすとし，また $x_i^* \in X_i$，$p \in \mathbf{R}^L$ とする。このときもし

$$\forall x_i \in X_i \quad (p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^* \Longrightarrow x_i^* \succsim_i x_i)$$

が成り立つならば

$$\forall x_i \in X_i \quad (x_i \succsim_i x_i^* \Longrightarrow p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*)$$

が成り立つことを示せ。

定理 2.1 (厚生経済学の第 1 基本定理) $\{\succsim_i\}_{i=1}^I$ は完備性・推移性・局所非飽和性を満たすとする。このときもし実行可能配分 (x^*, y^*) と価格ベクトル p が価格均衡であるならば，(x^*, y^*) はパレート最適である。

証明 (x^*, y^*) と p が価格均衡であるとする。いま，ある実行可能配分 (x, y) が存在して (1)$\forall i \;\; x_i \succsim_i x_i^*$，および (2)$\exists i \;\; x_i \succ_i x_i^*$ が成り立つと仮定する（背理法)。このとき価格均衡の効用最大化条件により (2) から $\exists i \;\; p \cdot x_i > p \cdot x_i^*$ が成立。一方，問題 2.1 によれば (1) から $\forall i \;\; p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$ が成り立つ。したがって $\sum p \cdot x_i > \sum p \cdot x_i^*$ を得る[2]。ところが左辺に関して $\sum p \cdot x_i = p \cdot \sum x_i = p \cdot (\bar{\omega} + \sum y_j)$，右辺に関して $\sum p \cdot x_i^* = p \cdot (\bar{\omega} + \sum y_j^*)$ であるから結局 $\sum p \cdot y_y > \sum p \cdot y_j^*$ が成立。ゆえに $\exists j \;\; p \cdot y_j > p \cdot y_j^*$ が成り立つが，これは価格均衡の利潤最大化条件に矛盾する。∎

・厚生経済学の第 1 基本定理は X_i の凸性や効用関数の微分可能性を必要としない。

・厚生経済学の第 1 基本定理が成り立たない経済として，世代重複モデル（OLG) がある。

例 2.5 (世代重複モデル) 加算無限個の財・消費者を考える（$l \in \mathbf{N}$，$i \in \mathbf{N}$)。第 i 世代の消費者は第 i 期（若年期）と第 i+1 期（老年期）においてのみ消費可能であるとし（$X_i = \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \{0\} \times \cdots$)，その選好は効用関数 $u_i(x_i) = x_{i,i} + x_{i,i+1}$ によって表現されるとする。生産は存在せず（$\forall j \quad Y_j = \{0\}$)，財は初期賦存 $\bar{\omega} = (1, 1, \ldots)$ によってのみ与えられるものとする。このとき以下のような $x \in X$ と $p \in \mathbf{R}^L$

[2] この不等式は $I < \infty$ の仮定による。世代重複モデルなどではこの不等式は必ずしも成り立たない。

は価格均衡である。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots) \\
x_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\
x_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots) \\
&\vdots \\
p_1 \leq p_2 &\leq p_3 \leq \cdots
\end{aligned}
$$

ところがこのような x はパレート最適ではない。事実以下のような $x' \in X$ は x よりも効率的である。

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= (1, 1, 0, 0, 0, \ldots) \\
x'_2 &= (0, 0, 1, 0, 0, \ldots) \\
x'_3 &= (0, 0, 0, 1, 0, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

なお x' はパレート最適であり，また $p_1 = p_2 \geq p_3 \geq p_4 \cdots$ なる p のもとで x' と p は価格均衡を構成する。

- ただし経済主体の数や財の種類が無限であるからといって，直ちに厚生経済学の第 1 基本定理が成り立たなくなるわけではない。価格均衡配分がパレート最適であるか否かは付随する価格ベクトルの下で初期賦存 $\bar{\omega}$ の価値額が有限であるか否かに依存する。

定義 2.3 (準価格均衡) 実行可能配分 (x^*, y^*) と価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\}$ が準価格均衡（price quasi-equilibrium）であるとは,

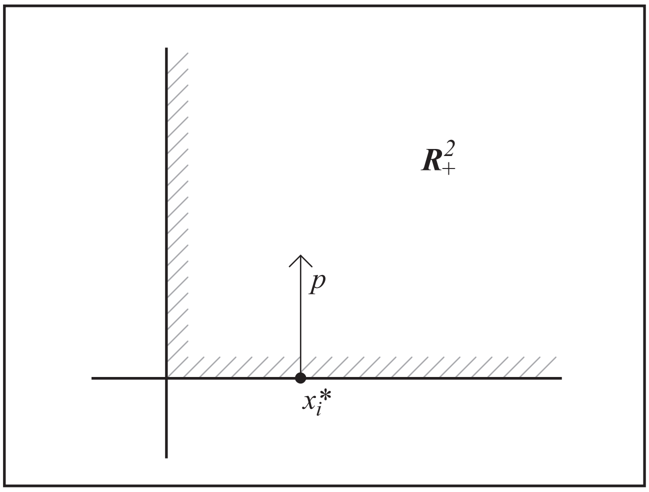
(i) $\forall j\ \forall y_j \in Y_j \quad p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$

(ii) $\forall i\ \forall x_i \in X_i \quad (p \cdot x_i < p \cdot x_i^* \Longrightarrow x_i^* \succsim_i x_i)$

が成り立つことをいう。

- 準価格均衡の定義式 (ii) を準効用最大化条件とよぶ。
- (x^*, y^*) と p が価格均衡であるならば (x^*, y^*) と p は準価格均衡であるが，逆は必ずしも成り立たない。
- 生産が存在しない経済において実行可能配分 x^* と価格ベクトル p が $\forall i\ \forall x_i \in X_i\ \ p \cdot x_i^* \leq p \cdot x_i$ を満たすならば，x^* と p は自明に準価格均衡である。

例 2.6 生産が存在しない経済において $X_1 = \cdots = X_I = \mathbf{R}^2_+$，$x^*_1 = \cdots = x^*_I = (1, 0)$，$\bar{\omega} = (I, 0)$，$p = (0, 1)$ とすれば，x^* と p は準価格均衡である：



定義 2.4 $x^*_i \in X_i$ と $p \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\}$ が最小所得条件（minimum income condition）を満たすとは，$p \cdot x^*_i > \min\{p \cdot x_i : x_i \in X_i\}$ が成り立つことをいう。

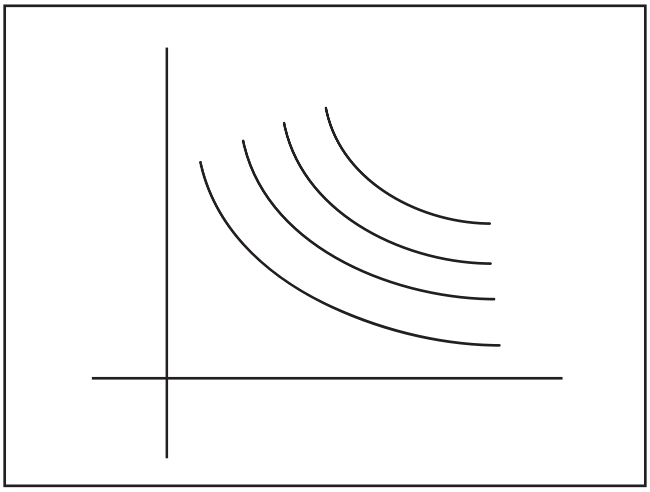
問題 2.2 (x^*, y^*) と p は準価格均衡であるとする。このとき以下の命題が成り立つことを示せ。

1. 任意の $i = 1, \ldots, I$ について X_i の凸性，$\succsim_i$ の連続性，および最小所得条件が成り立つならば，(x^*, y^*) と p は価格均衡である。

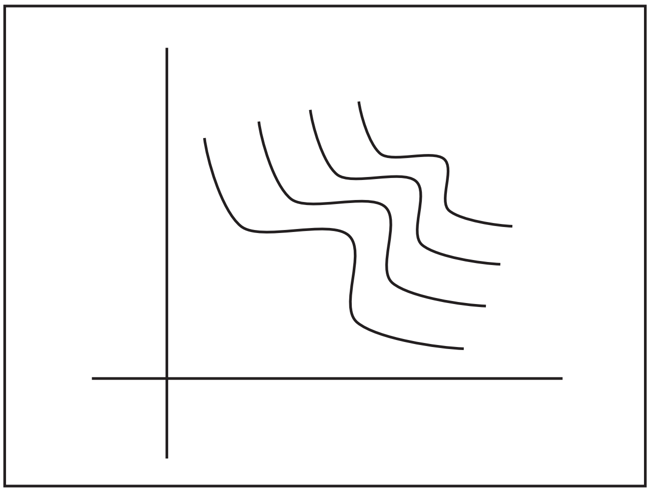
2. $\succsim_i$ は局所非飽和であるとする。このとき $x_i \succsim_i x^*_i$ が成り立つならば $p \cdot x_i \geq p \cdot x^*_i$ が成り立つ。

定義 2.5 選好 $\succsim_i$ が凸（convex）であるとは，任意の $x_i \in X_i$ に対して集合 $\{z_i \in X_i : z_i \succsim_i x_i\}$ が凸であることをいう。

例 2.7 選好 $\succsim_i$ が凸であるケース（$L = 2$）：



例 2.8 選好 $\succsim_i$ が凸ではないケース（$L = 2$）：



問題 2.3 選好 $\succsim_i$ は完備性・推移性・凸性を満たすとする。このとき以下の命題が成り立つことを示せ。

1. X_i は凸である。

2. 任意の $x_i \in X_i$ について集合 $\{z_i \in X_i : z_i \succ_i x_i\}$ が凸である。

定理 2.2 (厚生経済学の第 2 基本定理) 任意の $i = 1, \ldots, I$ について選好 $\succsim_i$ は完備性・推移性・局所非飽和性・凸性を満たすとする。また任意の $j = 1, \ldots, J$ について生産集合 Y_j は凸であるとする。このときもし実行可能配分 (x^*, y^*) がパレート最適であるならば，ある価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\}$ が存在して (x^*, y^*) と p は準価格均衡を構成する。

厚生経済学の第 2 基本定理を示すために次の定理を証明なしに用いる。

定理 2.3 (分離超平面定理) $\mathbf{R}^L$ の凸部分集合 A, B が $A \cap B = \emptyset$ を満たすとする。このときある $p \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\}$ とある $c \in \mathbf{R}$ が存在して，

$$\forall a \in A \, \forall b \in B \quad p \cdot a \geq c \geq p \cdot b$$

が成り立つ。

証明 (厚生経済学の第 2 基本定理) 第 1 段階：(x^*, y^*) をパレート最適配分とする。各 $i = 1, \ldots, I$ について集合 A_i を $A_i = \{x_i \in X_i : x_i \succ_i x_i^*\}$ と定め，またこのような $\{A_i\}_{i=1}^I$ より集合 A を $A = \{\sum x_i : \forall i \;\; x_i \in A_i\}$ と定める。このとき問題 2.3 より各 A_i は凸集合であり，したがって A も凸集合である。次に集合 B を $B = \{\sum y_j + \bar{\omega} : \forall j \;\; y_j \in Y_j\}$ と定める。定理の仮定より各 Y_j は凸集合であり，したがって B も凸集合である。ここで (x^*, y^*) がパレート最適であることから $A \cap B = \emptyset$ が成り立つ（証明せよ）。以上から分離超平面定理により，ある $p \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\}$ と $c \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\forall a \in A \, \forall b \in B \quad p \cdot a \geq c \geq p \cdot b \tag{1}$$

が成り立つ。

第 2 段階：(1) 式と選好の局所非飽和性より任意の $x \in X$ に対して

$$(\forall i \quad x_i \succsim_i x_i^*) \Longrightarrow p \cdot (\sum x_i) \geq c \tag{2}$$

が成り立つことを示す。ある $x \in X$ が存在して任意の i に対して $x_i \succsim_i x_i^*$ を満たし，かつ $c > p \cdot (\sum x_i)$ が成り立つと仮定する（背理法）。このとき任意の $i = 1, \ldots, I$ について選好 $\succsim_i$ が局所非飽和であることにより (i) $\forall i \;\; x_i' \succ_i x_i^*$ および (ii) $c > p \cdot (\sum x_i')$ を同時に満たす x' を取ることができる。(i) より $\sum x_i' \in A$ だから (1) 式によれば $p \cdot (\sum x_i') \geq c$ が成り立つが，これは (ii) に矛盾する。

第 3 段階：(2) 式よりただちに $p \cdot (\sum x_i^*) \geq c$ が成り立つ。一方 $\sum x_i^* = \sum y_j^* + \bar{\omega}$ かつ $\sum y_j^* + \bar{\omega} \in B$ だから，(1) 式より $p \cdot (\sum x_i^*) \leq c$ が成り立つ。したがって結局

$$p \cdot (\sum x_i^*) = p \cdot (\sum y_j^* + \bar{\omega}) = c \tag{3}$$

を得る。

第 4 段階：(x^*, y^*) と p が利潤最大化条件を満たすことを示す。任意の j と任意の $y_j \in Y_j$ をとり固定する。このとき $y_j + \sum_{k \neq j} y_k^* + \bar{\omega} \in B$ だから (1) 式と (3) 式より $p \cdot (y_j + \sum_{k \neq j} y_k^* + \bar{\omega}) \leq p \cdot (\sum y_j^* + \bar{\omega})$，すなわち $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$ を得る。

第 5 段階：(x^*, y^*) と p が準効用最大化条件を満たすことを示す。任意の i と任意の $x_i \in X$ をとり，$x_i \succsim_i x_i^*$ が成り立つとする。このとき (2) 式と (3) 式より $p \cdot (x_i + \sum_{k \neq i} x_k^*) \geq p \cdot (\sum x_i^*)$ が成り立つから，$p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$ を得る。したがって $\forall i \;\; (x_i \succsim_i x_i^* \Longrightarrow p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*)$ が示されたが，これは示すべきことの対偶である。∎

系 2.4 任意の $i=1,\dots,I$ について選好 $\succsim_i$ は完備性・推移性・局所非飽和性・連続性・凸性を満たすとする。また任意の $j=1,\dots,J$ について生産集合 Y_j は凸であるとする。このときもし実行可能配分 (x^*,y^*) が $\forall i\ \ x_i^*\in \mathrm{int}X_i$ を満たすならば次の (i) と (ii) は同値である。

(i) (x^*,y^*) がパレート最適である。

(ii) ある $p\in\mathbf{R}^L\setminus\{0\}$ が存在して (x^*,y^*) と p が価格均衡である。

証明 実行可能配分 (x^*,y^*) が $\forall i\ \ x_i^*\in\mathrm{int}X_i$ を満たすとする。(ii)$\Longrightarrow$(i) は厚生経済学の第 1 基本定理よりただちに成り立つ。(i)$\Longrightarrow$(ii) を示すために (x^*,y^*) がパレート最適配分であるとする。このとき厚生経済学の第 2 基本定理より，ある $p\in\mathbf{R}^L\setminus\{0\}$ が存在して (x^*,y^*) と p は準価格均衡を構成する。また任意の $i=1,\dots,I$ について選好 $\succsim_i$ は完備性・推移性・凸性を満たしているから，問題 2.3 より任意の $i=1,\dots,I$ について X_i は凸集合である。したがって問題 2.2 より任意の $i=1,\dots,I$ について x_i^* と p が最小所得条件を満たすことを示せば証明は終了する。ところが任意の $i=1,\dots,I$ について $x_i^*\in\mathrm{int}X_i$ が成り立っているから，十分小さい $\epsilon>0$ をとることによって $x_i^*-\epsilon p\in X_i$ を満たすことができる。このような $x_i^*-\epsilon p$ に対して $p\cdot(x_i^*-\epsilon p)=p\cdot x_i^*-\epsilon|p|^2<p\cdot x_i^*$ であるから結局 $p\cdot x_i^*>\min\{p\cdot x_i : x_i\in X_i\}$ が成立。ゆえに x_i^* と p は最小所得条件を満たしている。∎

3 所有構造

消費者の所有構造（ownership structure）を次のように定式化する。

1. 消費者 i が所有する財の初期賦存 $\omega_i\in\mathbf{R}_+^L$（$i=1,\dots,I$）
   - 各消費者が所有する財の初期賦存 $(\omega_i)_{i=1}^I$ と経済全体の財の初期賦存 $\bar{\omega}$ に関して $\sum\omega_i=\bar{\omega}$ が成り立つ。
2. 消費者 i が所有する企業 j の株式所有シェア θ_{ij}（$i=1,\dots,I,\ j=1,\dots,J$）
   - 株式所有シェアは非負であり（$\forall i\,\forall j\ \ \theta_{ij}\geq 0$），消費者に関して総和すると 1 になる（$\forall j\ \ \sum_i\theta_{ij}=1$）。

また以上の定式化のもとで私的所有経済 (private ownership economy) のモデルを

$$\{L,I,(X_i,\succsim_i)_{i=1}^I,J,(Y_j)_{j=1}^J,\bar{\omega},(\omega_i,(\theta_{ij})_{j=1}^J)_{i=1}^I\}$$

によって定める。

定義 3.1 (ワルラス均衡) 実行可能配分 (x^*,y^*) と価格ベクトル $p\in\mathbf{R}^L$ がワルラス均衡（walrasian equilibrium）であるとは

(i) (x^*, y^*) と p が価格均衡である

(ii) $\forall i \quad p \cdot x_i^* \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$

が成り立つことをいう[3]。

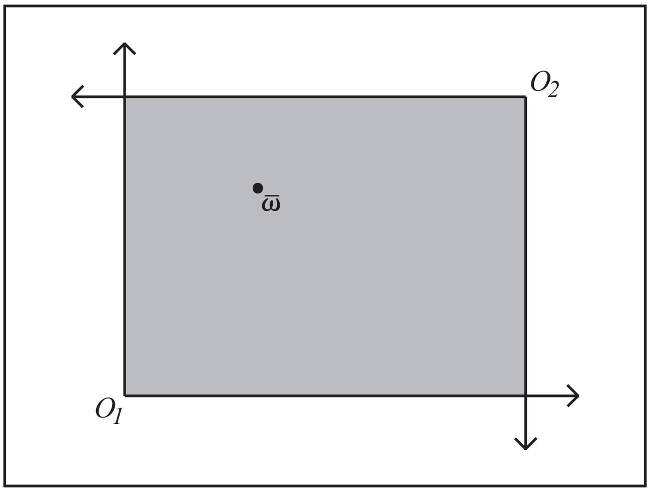
問題 3.1 実行可能配分 (x^*, y^*) と価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^L$ がワルラス均衡であるならば，任意の $i = 1, \ldots, I$ に対して $p \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$ が成り立つことを示せ。

4 私的所有経済の例

4.1 エッジワースボックス経済

私的所有経済の中でとくに $L = 2$，$I = 2$，$X_1 = X_2 = \mathbf{R}_+^2$，$Y_1 = \cdots = Y_J = \{0\}$，$\bar{\omega} = (\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2) \in \mathbf{R}_{++}^2$ を満たすものをエッジワースボックス経済（Edgeworth box economy）という。エッジワースボックス経済における実行可能配分の集合はエッジワースボックス（Edgeworth box）によって図示することができて，また消費者が所有する財の初期賦存はエッジワースボックス中の点として表すことができる[4]。

例 4.1 エッジワースボックスと所有構造：下図において実行可能配分の集合が影部によって表されている。また配分 $\bar{\omega}$ は消費者が所有する財の初期賦存を表している。

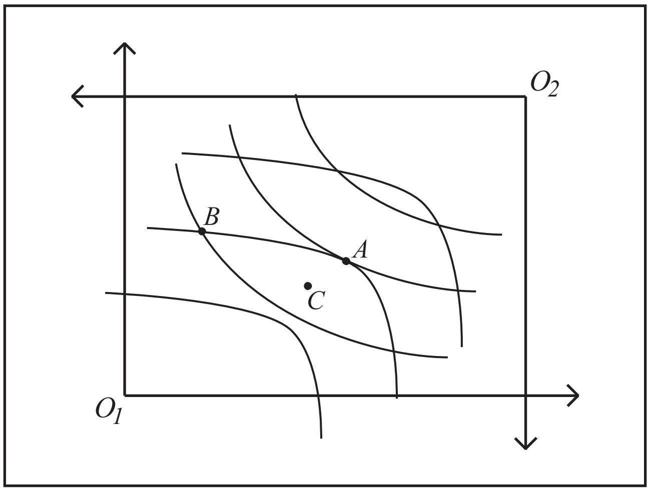


またエッジワースボックスに消費者の選好を表す無差別曲線を図示することによって，パレート最適配分・厚生経済学の基本定理・ワルラス均衡などを確認することができる。

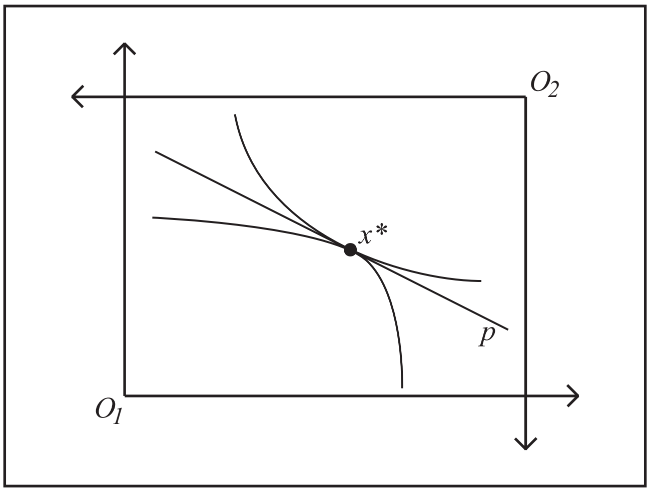
[3]ワルラス均衡の定義式 (ii) を予算制約条件とよぶ。

[4]エッジワースボックス経済には生産が存在しないので消費者による企業の株式所有シェアは無視することができる。

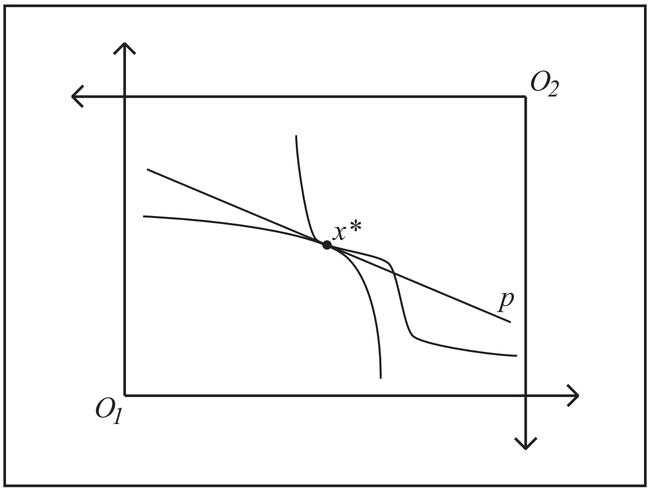
例 4.2 エッジワースボックスとパレート最適配分：下図において配分 A はパレート最適であるが配分 B はパレート最適ではない。事実，配分 C は配分 B をパレート改善している。



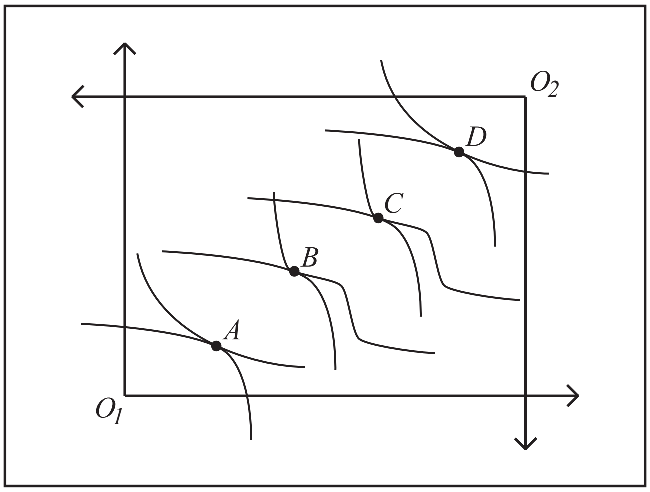
例 4.3 エッジワースボックスと厚生経済学の第 2 基本定理：消費者の無差別曲線が接する配分 x^* はパレート最適である。この配分 x^* において両方の無差別曲線に接する価格ベクトル p をとることで配分 x^* と価格ベクトル p は価格均衡を構成する。



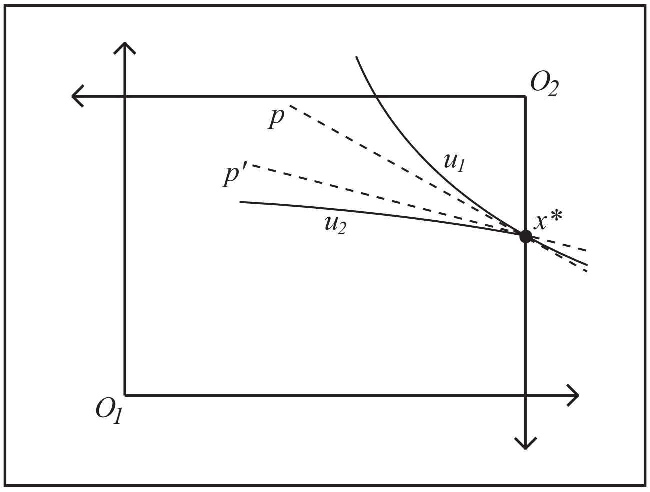
例 4.4 凸性を満たさない選好と厚生経済学の第 2 基本定理：下図において配分 x^* はパレート最適であるが，いかなる価格ベクトル p に対しても価格均衡を構成しえない。

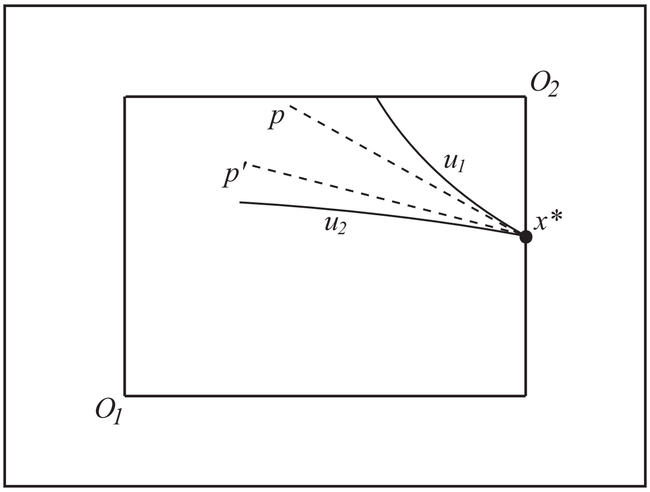


例 4.5 効率性と衡平性のトレードオフ：下図の経済では価格均衡の下で効率性は保証されるが衡平性は保証されない。事実配分 A,D は価格均衡によって実現できるが，これらは配分 B,C にくらべて衡平ではない配分である。

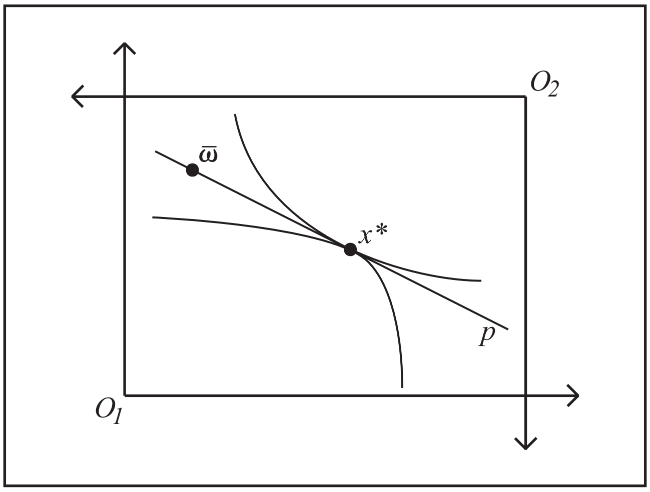


例 4.6 エッジワースボックスの描き方と価格均衡：エッジワースボックスの描き方には (i) 各消費者の座標軸を交差させて描く方法と (ii) 各消費者の座標軸を交差させずに描く方法がある。下図の経済において配分 x^* は価格ベクトル p のもとで価格均衡を構成するが価格ベクトル p' のもとでは価格均衡を構成しない。このことは (i) の描画法によれば明らかであるが，(ii) の描画法によると分かりにくくなってしまう。

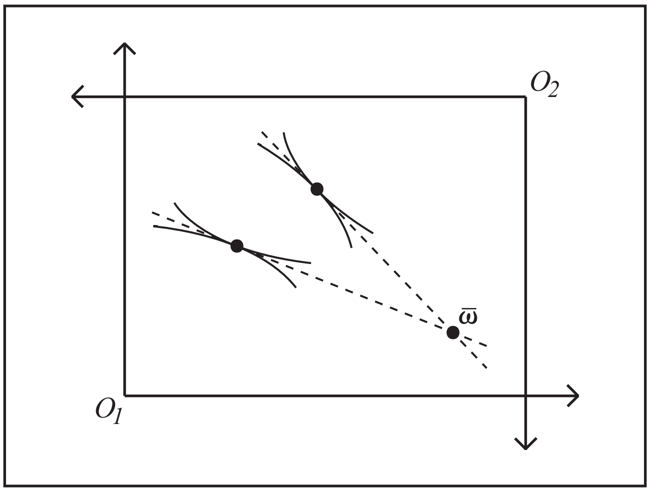




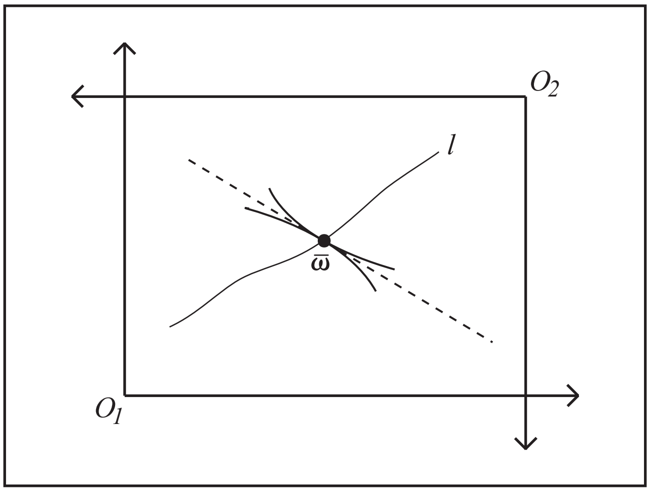
例 4.7 エッジワースボックスとワルラス均衡：下図において消費者が所有する財の初期賦存 $\bar{\omega}$ を与件として配分 x^* と価格ベクトル p はワルラス均衡を構成する。



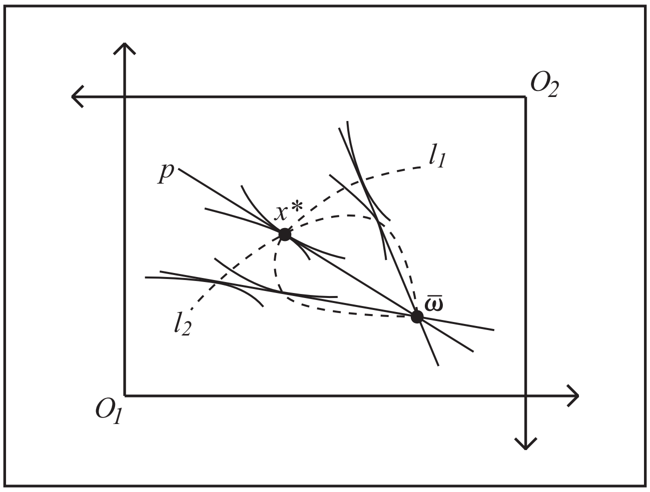
例 4.8 ワルラス均衡の一意性 (1)：経済には複数のワルラス均衡が存在しうる。



例 4.9 ワルラス均衡の一意性 (2)：消費者が所有する財の初期賦存がパレート最適である場合にはワルラス均衡は一意である。下図において曲線 l は契約曲線を表している。



例 4.10 オファー曲線とワルラス均衡：ワルラス均衡は消費者のオファー曲線が交わる配分として求めることができる。下図において曲線 l_1 は消費者 1 のオファー曲線を，曲線 l_2 は消費者 2 のオファー曲線を表している。



問題 4.1 消費者の選好が局所非飽和性を満たさないために厚生経済学の第 1 基本定理が成り立たないエッジワースボックス経済を図示せよ。

4.2 ロビンソン・クルーソー経済

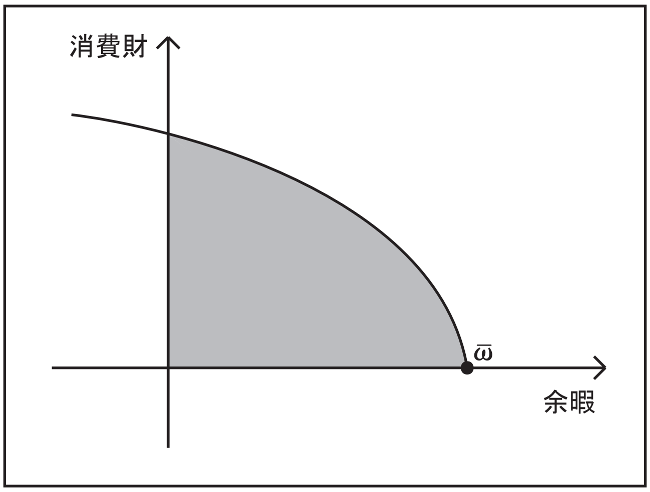
私的所有経済の中でとくに $L = 2$, $I = 1$, $X_1 = \mathbf{R}^2_+$, $J = 1$, $\bar{\omega} = (\bar{l}, 0)$, $\bar{l} > 0$ を満たすものをロビンソン･クルーソー経済（Robinson Crusoe economy）という。ロビンソン・クルーソー経済における第 1 財を余暇（leisure），第 2 財を消費財（consumption good）として解釈する。ロビンソン・クルーソー経済には 1 人の消費者と 1 社の企業しか存在しないから，消費者の所有構造

は $\omega_1 = \bar{\omega}$，$\theta_{11} = 1$ によって一意に定まる。また同じ理由から消費者や企業を表す添え字を省略しても誤解が生じないので，以下では X, Y という記号によって X_1, Y_1 を表すことにする。

ロビンソン・クルーソー経済では実行可能配分 (x^*, y^*) と価格ベクトル p が価格均衡であることと，(x^*, y^*) と p がワルラス均衡であることは同値である。これはロビンソン・クルーソー経済においては実行可能配分であることがワルラス均衡の予算制約条件を満たすための十分条件になっていることによる（証明せよ）。

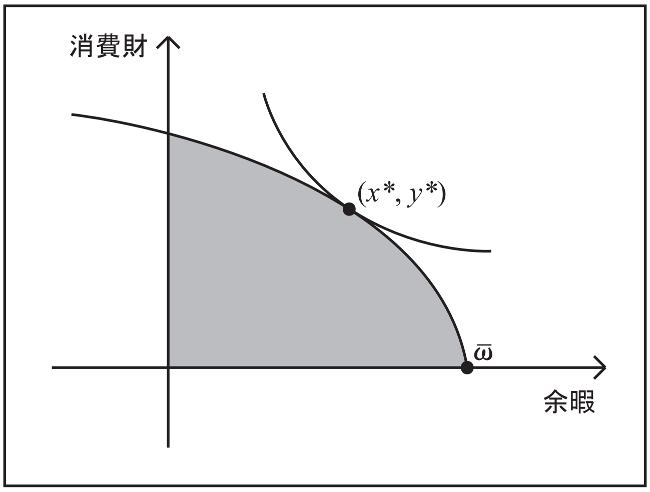
ロビンソン・クルーソー経済における実行可能配分の集合は $\{(x, y) \in X \times Y : x = \bar{\omega} + y\}$ によって表され，横軸と縦軸にそれぞれ余暇と消費財をとった 2 次元平面によって図示することができる。

例 4.11 ロビンソン・クルーソー経済における実行可能配分の集合：図中の曲線は生産集合 Y を財の初期賦存 $\bar{\omega}$ の分だけ平行移動したものである。

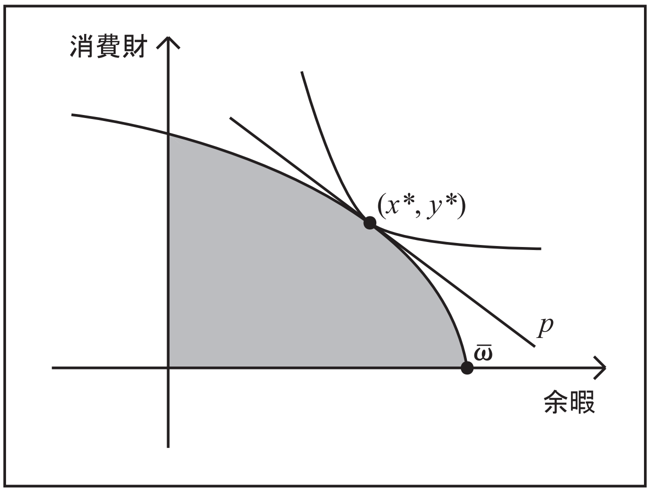


また同じ 2 次元平面上に消費者の選好を表す無差別曲線を図示することによって，パレート最適配分・厚生経済学の基本定理・ワルラス均衡などを確認することができる。

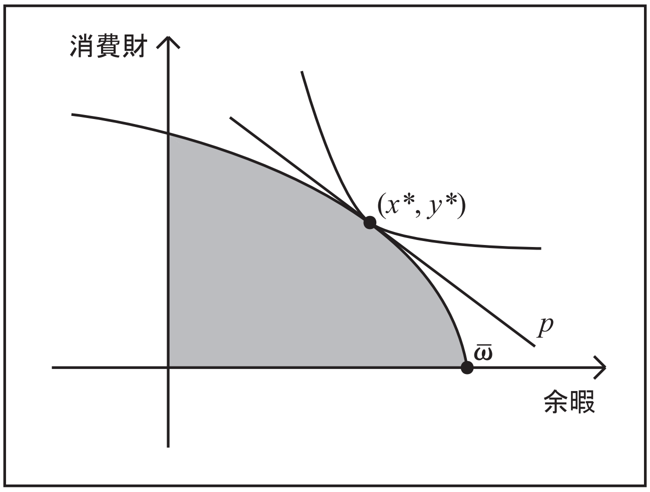
例 4.12 ロビンソン・クルーソー経済におけるパレート最適配分：



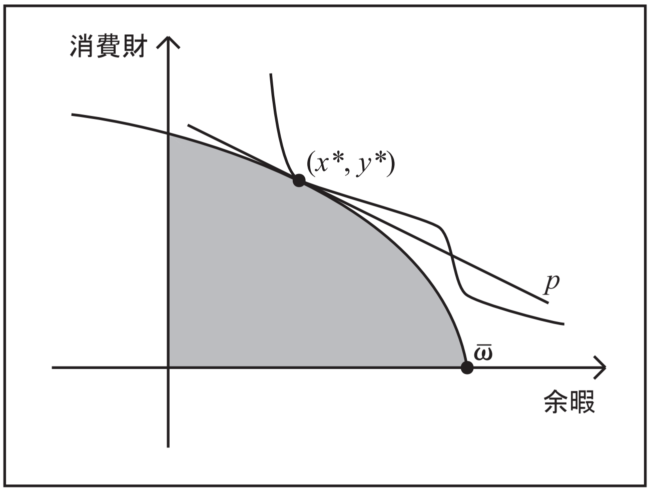
例 4.13 ロビンソン・クルーソー経済と価格均衡・ワルラス均衡：下図において配分 (x^*, y^*) と価格ベクトル p は価格均衡かつワルラス均衡である。この図から (x^*, y^*) がパレート最適であることが確認できる（厚生経済学の第1基本定理）。



例 4.14 ロビンソン・クルーソー経済と厚生経済学の第2基本定理：下図において配分 (x^*, y^*) はパレート最適である。この配分に対して消費者の無差別曲線と（$\bar{\omega}$ の分だけ平行移動した）生産集合の両方に接する価格ベクトル p をとれば，(x^*, y^*) と p は価格均衡を構成する。



例 4.15 凸性を満たさない選好と厚生経済学の第 2 基本定理：下図において配分 (x^*, y^*) はパレート最適であるが，いかなる価格ベクトル p に対しても価格均衡を構成しえない。



問題 4.2 消費者の選好が局所非飽和性を満たさないために厚生経済学の第 2 基本定理が成り立たないロビンソン・クルーソー経済を図示せよ。

5　超過需要関数

本節以下では次の条件を満たす純粋交換私的所有経済を考える。

- $X_1 = \cdots = X_I = \mathbf{R}^L_+$
- 任意の $i = 1, \ldots, I$ について $\succsim_i$ は完備・推移・連続・強凸・強単調である。

・ $Y_1 = \cdots = Y_J = \{0\}$

・ 任意の $i = 1, \ldots, I$ について $\omega_i \in \mathbf{R}^L_+$ であり，かつ $\bar{\omega} = \sum \omega_i \in \mathbf{R}^L_{++}$ が成り立つ。

選好の強凸性より消費者の効用最大化問題から導出される需要関数は一価関数となる。これを関数 $x_i : \mathbf{R}^L_{++} \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^L_+$ によって表す。また選好の強単調性より需要関数 $x_i(p, p \cdot \omega_i)$ はワルラス法則（Walras' law），すなわち

$$\forall p \in \mathbf{R}^L_{++} \quad p \cdot x_i(p, p \cdot \omega_i) = p \cdot \omega_i$$

を満たす。

定義 5.1 消費者 i の超過需要関数 (excess demand function of consumer i) を

$$z_i(p) = x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i$$

によって定まる関数 $z_i : \mathbf{R}^L_{++} \to \mathbf{R}^L$ として定義する。

定義 5.2 経済の超過需要関数 (excess demand function of economy) を

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} z_i(p)$$

によって定まる関数 $z : \mathbf{R}^L_{++} \to \mathbf{R}^L$ として定義する。

命題 5.1 配分 $(x_1(p, p \cdot \omega_i), \ldots, x_I(p, p \cdot \omega_i))$ と価格ベクトル p がワルラス均衡であるための必要十分条件は $z(p) = 0$ が成り立つことである。

証明 需要関数 $x_i(p, p \cdot \omega_i)$ の定義より配分 $(x_1(p, p \cdot \omega_i), \ldots, x_I(p, p \cdot \omega_i))$ と価格ベクトル p は各消費者の効用最大化条件と予算制約条件を満たしている。したがって定理の証明のためには $(x_1(p, p \cdot \omega_i), \ldots, x_I(p, p \cdot \omega_i))$ が実行可能配分であることと $z(p) = 0$ が成り立つことの同値性を示せば十分であるが，これは超過需要関数 z の作り方より明らか。∎

命題 5.2 超過需要関数 z は以下の性質を満たす。

1. z は連続関数である。

2. z は 0 次同次関数（homogeneity of degree zero）である。すなわち，任意の $\alpha > 0$ と任意の $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ に対して $z(\alpha p) = z(p)$ が成り立つ。

3. z はワルラス法則を満たす。すなわち，任意の $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ に対して $p \cdot z(p) = 0$ が成り立つ。

4. z は下に有界（bounded from below）である。すなわち，ある $b \in \mathbf{R}^L$ が存在して任意の $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ に対して $z(p) \geq b$ が成り立つ

5. z は次の境界挙動（boundary behavior）にしたがう。すなわち，$\mathbf{R}^L_{++}$ 上の点列 $\{p^n\}$ と $\mathbf{R}^L_+$ 上の点 p が条件 (i) $\{p^n\}$ は p に収束する，(ii) $\exists l \ \ p_l > 0$, (iii) $\exists l \ \ p_l = 0$ を満たすならば

$$\lim_{n\to\infty} \max\{z_1(p^n), \ldots, z_I(p^n)\} = \infty$$

が成り立つ。

証明　1. 消費者の選好 $\succsim_i$ は連続であるからベルジュの最大値定理（Berge maximum theorem）により需要関数 $x_i(p, p\cdot\omega_i)$ は連続である。したがって超過需要関数 z も連続である。

2. 消費者の予算集合 $\{x_i \in X_i : p\cdot x_i \leq p\cdot\omega_i\}$ は p のスカラー倍に関して不変であるから，消費者の需要関数 $x_i(p, p\cdot\omega_i)$ は p に関して 0 次同次である。したがって超過需要関数 z も 0 次同次である。

3. 消費者の需要関数 $x_i(p, p\cdot\omega_i)$ がワルラス法則を満たすことより明らか。

4. 任意の p に対して $z(p) = \sum_i (x_i(p, p\cdot\omega_i) - \omega_i) \geq \sum_i(-\omega_i) = -\bar{\omega}$ が成り立つことから結果を得る。ただし途中の不等式は $X_1 = \cdots = X_I = \mathbf{R}^L_+$ と定めたことによる。

5. 本節の仮定より $\sum \omega_i \in \mathbf{R}^L_{++}$ が成り立つことと以下の問題 5.1 から結果を得る。∎

問題 5.1 消費者 i の選好 $\succsim_i$ は完備・推移・連続・強単調とする。$\mathbf{R}^L_{++}$ 上の点列 $\{p^n\}$ と $\mathbf{R}^L_+$ 上の点 p が条件 (i) $\{p^n\}$ は p に収束する，(ii) $\exists l \ \ p_l > 0$, (iii) $\exists l \ \ p_l = 0$ を満たすとする。このときもし $p\cdot\omega_i > 0$ が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty} \max\{x_{i1}(p^n, p^n\cdot\omega_i), \ldots, x_{iL}(p^n, p^n\cdot\omega_i)\} = \infty$$

が成り立つことを示せ。ただし $x_{il}(p^n, p^n\cdot\omega_i)$ は $x_i(p^n, p^n\cdot\omega_i)$ の第 l 要素とする。

6　ワルラス均衡の存在

定理 6.1 (ワルラス均衡の存在) 第 5 節において定めた純粋交換私的所有経済にはワルラス均衡が存在する。

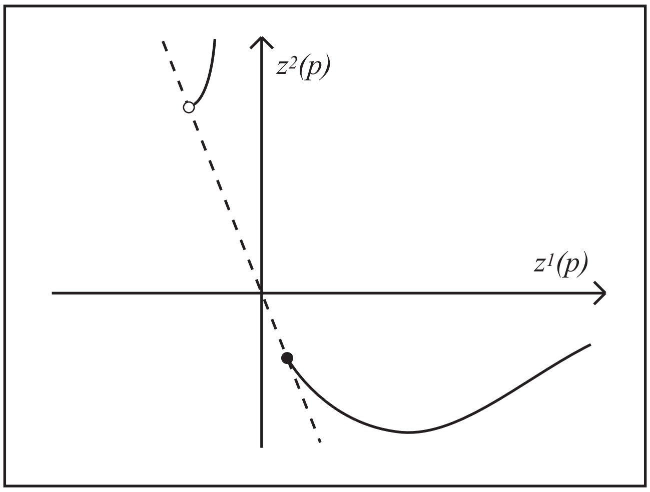
命題 5.1 と命題 5.2 より本定理の証明には以下の補題を示せば十分である。

補題 6.2 関数 $z : \mathbf{R}^L_{++} \to \mathbf{R}^L$ が命題 5.2 の 5 性質を満たすとする。このときある $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ が存在して $z(p) = 0$ が成り立つ。

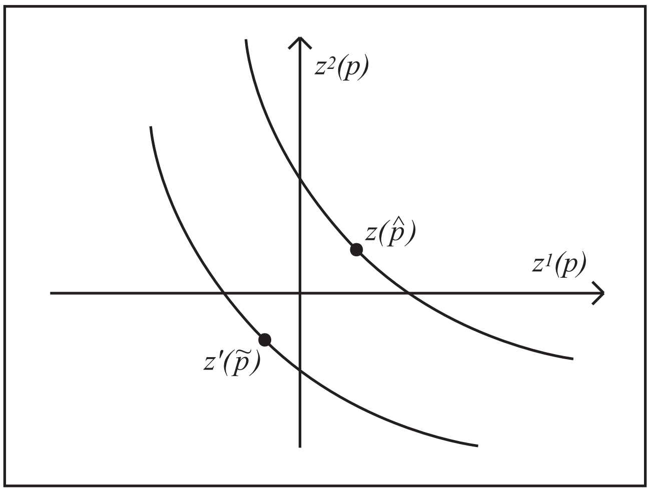
この補題の対偶によれば，もし $z(p) = 0$ を満たす $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ が存在しないならば関数 z は命題 5.2 の 5 性質のうち少なくとも 1 つを満たさないはずである。そこで補題に証明を与える前に，$L = 2$ のケースにおいて $z(p) = 0$ を

満たす $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ が存在しない関数 z の様々な軌跡を図示して，そのいずれのケースにおいても z が命題 5.2 の 5 性質のうち少なくとも 1 つを満たしていないことを確認する。

例 6.1 ジャンプする軌跡を持つ関数 z：下図のような軌跡を持つ z に対して $z(p) = 0$ を満たす p は存在しない。しかしこのような z は連続性を満たしていない。

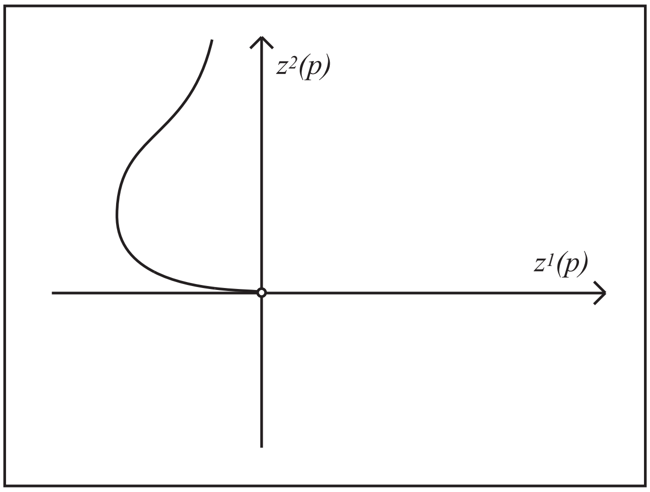


例 6.2 第 1 象限または第 3 象限を通る軌跡を持つ関数 z：下図のような軌跡を持つ z, z' に対して $z(p) = 0, z'(p') = 0$ を満たす p, p' は存在しない。しかしこのような z, z' はワルラス法則を満たしていない。事実，$\hat{p} \in \mathbf{R}^L_{++}$ に対して $\hat{p} \cdot z(\hat{p}) > 0$ が成り立ち，$\tilde{p} \in \mathbf{R}^L_{++}$ に対して $\tilde{p} \cdot z'(\tilde{p}) < 0$ が成り立っている。



例 6.3 原点に収束する軌跡を持つ関数 z：下図のような軌跡を持つ z に対して $z(p) = 0$ を満たす p は存在しない。しかしこのような z は命題 5.2 で定めた境

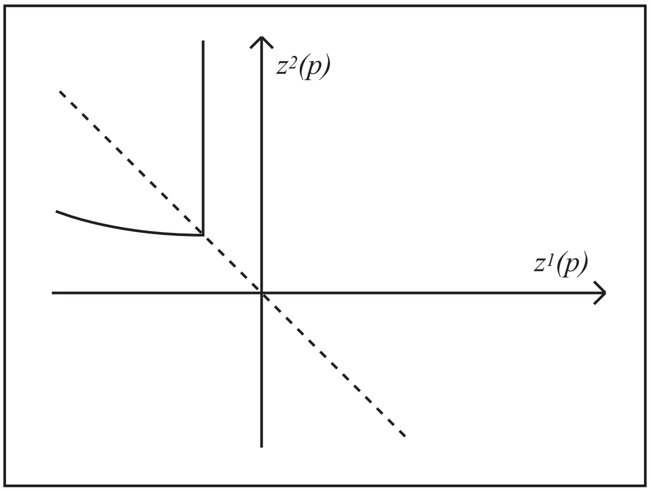
界挙動条件を満たさない。事実，$p_1/p_2 \to 0$ のとき $\max\{z_1(p), z_2(p)\} \not\to \infty$ である。



例 6.4 第 2 象限のみを通る軌跡を持つ関数 z：関数 $z : \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}^2$ を

$$z_2(p) = \frac{\max\{p_1, p_2\}}{\min\{p_1, p_2\}}, \quad z_1(p) = -\frac{p_2}{p_1} z_2(p)$$

によって定める[5]。このとき任意の $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ に対して $z_2(p) > 0$ だから $z(p) = 0$ を満たす p は存在しない。しかしこのような z は下に有界ではない。



補題 6.2 を示すために次の定理を証明なしに用いる。

定理 6.3 (角谷の不動点定理) 集合 $P \subset \mathbf{R}^L$ は非空・凸・コンパクトであるとする。また対応 $f : P \to P$ について (i) 任意の $p \in P$ に対して $f(p) \subset P$

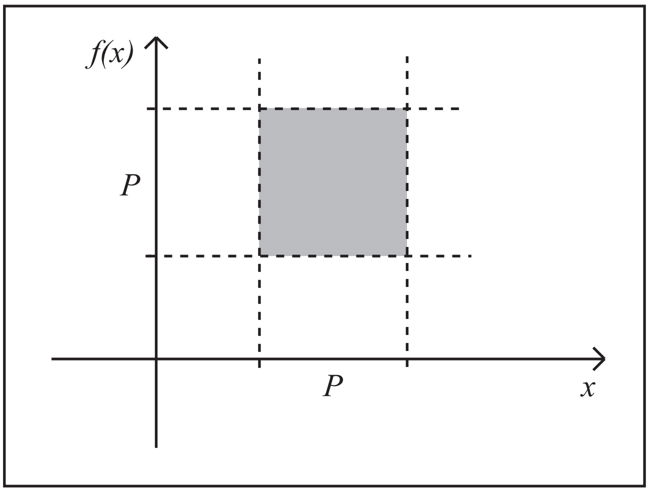
[5] このとき z は連続性・0 次同次性・ワルラス法則・境界挙動条件を満たしている。

は非空・凸であり，(ii)f は上半連続であるとする[6]。このときある $p^* \in P$ が存在して $p^* \in f(p^*)$ が成り立つ。

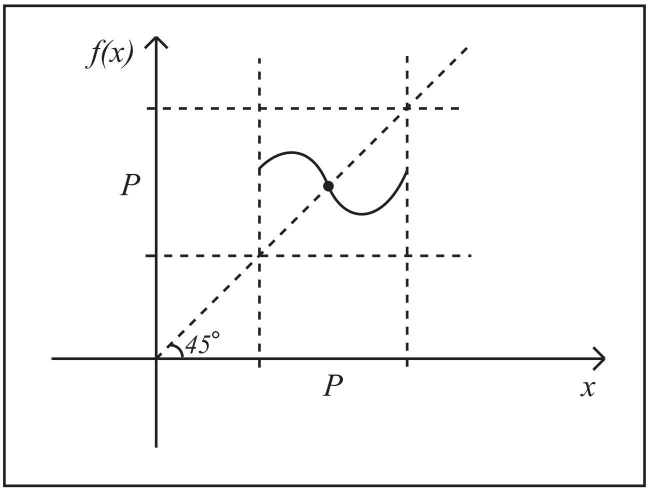
- f が一価関数ならば定理の条件 (i) は自明に成立し，条件 (ii) は f の連続性に対応する。したがってこのとき角谷の不動点定理はブラウワーの不動点定理に帰着する。

- $L = 1$ のとき定理中の P は $\mathbf{R}$ の有界閉区間となる。したがって対応 $f : P \to P$ のグラフは $P \times P$ によって表される二次元平面上の正方形の領域に含まれる。この領域内に f のグラフを閉集合となるように描くと，グラフは必ず 45 度線との交点を持つ。角谷の不動点定理はこの交点の存在を保証する定理に他ならない。

例 6.5 $L = 1$ のときの角谷の不動点定理：以下の 2 つの図において，上図は対応 $f : P \to P$ のグラフが含まれる領域 $P \times P$ を，下図はその領域に含まれる $f : P \to P$ のグラフが閉集合となるように描いている。



[6] 対応 $f : P \to P$ が上半連続（upper hemi-continuous）であるとは f のグラフ $\{(p, q) \in P \times P : q \in f(p)\}$ が閉集合であることをいう。



・ $L=1$ かつ $P=[\underline{p},\bar{p}]\subset\mathbf{R}$，さらに f が一価関数であるならば角谷の不動点定理は中間値の定理に帰着する。（関数 f に対して関数 g を $g(p)=f(p)-p$ と定めれば $g(\underline{p})\geq 0$ かつ $g(\bar{p})\leq 0$，さらに g は連続であるから中間値の定理によりある $p^*\in P$ が存在して $g(p^*)=0$，すなわち $f(p^*)=p^*$ が成り立つ。）

補題 6.2 を証明するために上で導入した角谷の不動点定理を用いるが，(i) z の定義域 $\mathbf{R}^L_{++}$ と値域 $\mathbf{R}^L$ が異なる，(ii) z の定義域 $\mathbf{R}^L_{++}$ が有界集合でない，(iii) z の定義域 $\mathbf{R}^L_{++}$ が閉集合でないという三つの問題より角谷の不動点定理を超過需要関数 $z:\mathbf{R}^L_{++}\to\mathbf{R}^L$ に直接適用することはできない。そこで以下の証明中では z を用いて新しく定義する対応 $f:P\to P$ が角谷の不動点定理を適用するために必要な条件をすべて満たし，かつ f の不動点 p に対して $z(p)=0$ が成り立つことを示している。

証明　(補題 6.2) $\mathbf{R}^L_+$ の部分集合 P を $P=\{p\in\mathbf{R}^L_+ : p_1+\cdots+p_L=1\}$ として定める。このとき P は非空・凸・コンパクト集合である。また対応 $f:P\to P$ を

$$f(p)=\begin{cases}\{q\in P:\forall l\ [z_l(p)<\max\{z_1(p),\ldots,z_L(p)\}\Rightarrow q_l=0]\} & \text{if }\ p\in\mathbf{R}^L_{++}\\ \{q\in P:\forall l\ [p_l>0\Rightarrow q_l=0]\} & \text{otherwise}\end{cases}$$

によって定める[7]。

第 1 段階：以上のように集合 P と対応 f を定めるとき

$$(p\in f(p)\text{ and }p\in\mathbf{R}^L_{++})\Longrightarrow z(p)=0 \tag{4}$$

[7]直感的に対応 f は市場の価格調整メカニズムを表現していると解釈することができる。すなわち調整前価格ベクトル p と調整後価格ベクトル $q\in f(p)$ を比較すると超過需要 $z_l(p)$ が相対的に小さい財 l について $q_l<p_l$ が成り立っている。

が成り立つことを示す。$p \in \mathbf{R}^L_{++}$ かつ $z(p) \neq 0$ が成り立つとする（背理法）。このときワルラス法則よりある $\bar{l}$ とある $\underline{l}$ が存在して $z_{\bar{l}}(p) > 0$ および $z_{\underline{l}}(p) < 0$ が成り立つ。したがって対応 f の定義より任意の $q \in f(p)$ に対して $q_{\underline{l}} = 0$ が成り立つが，$p \in \mathbf{R}^L_{++}$ だから結局 $p \notin f(p)$ を得る。

第 2 段階：また集合 P と対応 f の定義より

$$p \in P \setminus \mathbf{R}^L_{++} \Longrightarrow p \notin f(p) \tag{5}$$

が成り立つことを示す。$p \in P \setminus \mathbf{R}^L_{++}$ を任意にとり固定する。このとき $p \in P$ であることよりある $\bar{l}$ が存在して $p_{\bar{l}} > 0$ が成り立つが，対応 f の定義よりそのような $\bar{l}$ に対して $q \in f(p) \Longrightarrow q_{\bar{l}} = 0$ が成り立つ。これよりただちに $p \notin f(p)$ が得られる。

第 3 段階：(5) 式から対応 f に不動点 $p \in f(p)$ が存在するならば $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ が成り立ち，さらに (4) 式からこの不動点 p は $z(p) = 0$ を満たすことが分かる。したがって残るは対応 f が実際に不動点 $p \in f(p)$ を持つことを示せばよく，そのためには対応 f が角谷の不動点定理を適用するための条件を満たしていることを示せば十分である。

第 4 段階：任意の $p \in P$ に対して $f(p)$ が非空・凸であることは容易に示すことができる（証明せよ）。

第 5 段階：対応 f のグラフ $\{(p, q) \in P \times P : q \in f(p)\}$ が閉集合であることを示す。このために $P \times P$ 上の点 $(\bar{p}, \bar{q})$ と $(\bar{p}, \bar{q})$ に収束するグラフ上の収束列 $\{(p^n, q^n)\}$ を任意にとり固定する[8]。このとき $\bar{p}$ と $\{p^n\}$ について，条件 (i) $\bar{p} \in \mathbf{R}^L_{++}$，(ii) $\bar{p} \notin \mathbf{R}^L_{++}$ かつ $\exists N\ \forall n \geq N\ \ p^n \notin \mathbf{R}^L_{++}$，(iii) $\bar{p} \notin \mathbf{R}^L_{++}$ かつ $\forall N\ \exists n \geq N\ \ p^n \in \mathbf{R}^L_{++}$ のうち少なくとも 1 つ，そしてただ 1 つのみが成り立つ。

第 6 段階：第 5 段階において条件 (i) が成り立つ場合について考える。このとき一般性を失うことなく任意の n について $p^n \in \mathbf{R}^L_{++}$ が成り立つとしてよい。したがって対応 f の定義より任意の n について

$$q^n \in f(p^n) = \{q \in P : \forall l\ [z_l(p^n) < \max\{z_1(p^n), \ldots, z_L(p^n)\} \Rightarrow q_l = 0]\}$$

が成り立ち，これより容易に $\bar{q} \in f(\bar{p})$ を示すことができる（証明せよ）。

第 7 段階：第 5 段階において条件 (ii) が成り立つ場合について考える。このとき対応 f の定義より任意の $n \geq N$ について

$$q^n \in f(p^n) = \{q \in P : \forall l\ [p^n_l > 0 \Rightarrow q_l = 0]\}$$

が成り立ち，これより容易に $\bar{q} \in f(\bar{p})$ を示すことができる（証明せよ）。

第 8 段階：第 5 段階において条件 (iii) が成り立つ場合について考える。$\bar{q} \in f(\bar{p})$ が成り立つことを示すために $\bar{p}_l > 0$ を満たすような l を任意にとり

[8] したがって，ここから以下で示すべきことは $P \times P$ 上の点 $(\bar{p}, \bar{q})$ が対応 f のグラフ上にあること，すなわち $\bar{q} \in f(\bar{p})$ が成り立つことである。

固定する。ここで点列 $\{p^n\}$ が $\forall N\ \exists n \geq N\ \ p^n \in \mathbf{R}^L_{++}$ を満たすことより点列 $\{p^n\}$ のある部分列 $\{p^{n_k}\}$ が存在して任意の k について $p^{n_k} \in \mathbf{R}^L_{++}$ が成り立つ。このとき z の境界挙動条件よりただちに

$$\lim_{k\to\infty} \max\{z_1(p^{n_k}), \ldots, z_L(p^{n_k})\} = \infty \tag{6}$$

が成り立つ。一方ワルラス法則より任意の k について

$$z_l(p^{n_k}) = \frac{1}{p_l^{n_k}} \sum_{h\neq l} p_h^{n_k}(-z_h(p^{n_k}))$$

が成り立つが，z は下に有界だからある $b \in \mathbf{R}^L$ が存在して任意の k について

$$z_l(p^{n_k}) \leq \frac{1}{p_l^{n_k}} \sum_{h\neq l} p_h^{n_k}(-b_h)$$

が成り立つ。ゆえに z の連続性より

$$\lim_{k\to\infty} z_l(p^{n_k}) \leq \frac{1}{\bar{p}_l} \sum_{h\neq l} \bar{p}_h(-b_h) < \infty \tag{7}$$

を得る。(6) 式と (7) 式より，ある K が存在して任意の $k \geq K$ について $z_l(p^{n_k}) < \max\{z_1(p^{n_k}), \ldots, z_L(p^{n_k})\}$ が成り立つ。したがって対応 f の定義より任意の $k \geq K$ に対して $q_l^{n_k} = 0$ が成り立つ。以上により $\bar{q}_l$ に収束する収束列 $\{q_l^n\}$ の部分列 $\{q_l^{n_k}\}$ が 0 に収束することが示されたから $\bar{q}_l = 0$ が得られる。以上の議論において $\bar{p}_l > 0$ を満たす l は任意であったから $(\bar{p}, \bar{q}) \in P \times P$ は $\forall l\ (\bar{p}_l > 0 \Rightarrow \bar{q}_l = 0)$ を満たしている。対応 f の定義よりこれは $\bar{q} \in f(\bar{p})$ が成り立つことに他ならない。∎

7 Sonnenschein-Mantel-Debreu Theorem

命題 5.2 に示した超過需要関数 $z : \mathbf{R}^L_{++} \to \mathbf{R}^L$ の 5 性質は，消費者の需要曲線が右下がりであることや顕示選好の弱公理が成り立つことを含意していない。本節では超過需要関数 z がこのような命題 5.2 の 5 性質以外の性質を持っているのかどうかという疑問について考える。

この疑問に対する直接的な回答が次の定理によって与えられる。この定理によれば超過需要関数 z が持つ性質は命題 5.2 の 5 性質によって出し尽くされていることが分かる。

定理 7.1 (Sonnenschein-Mantel-Debreu Theorem) $I \geq L$ が成り立ち，また集合 C を $\mathbf{R}^L_{++}$ のコンパクト部分集合とする。このときもし関数 $\hat{z} : \mathbf{R}^L_{++} \to \mathbf{R}^L$ が命題 5.2 の 5 性質を満たすならば，I 人の消費者と L 種類の財から構成されるある経済が存在して，その経済の超過需要関数が C 上で $\hat{z}$ に一致する。

ここでは本定理に証明を与えない。その代わりに SMD 定理が成り立つためには消費者の人数と財の種類について $I \geq L$ が成り立たなければならないこと，換言すれば $L > I$ が成り立つときには経済の超過需要関数が命題 5.2 の 5 性質以外の性質を持つことを示す。

定義 7.1 (スルツキー代替行列) 消費者 i のスルツキー代替行列 (Slutsky substitution matrix)$S_i(p, w_i)$ を

$$S_i(p, w_i) = D_p x_i(p, w_i) + D_w x_i(p, w_i) x_i(p, w_i)^T$$

によって定める[9]。ただし $x_i(p, w_i)$ を消費者 i の需要関数とする。

- スルツキー代替行列 $S_i(p, w_i)$ は対称・半負値定符号行列である。これは補償需要関数（Hicksian demand function）$h_i(p, u)$ と支出関数（expenditure function）$e_i(p, u)$ に対してスルツキー代替行列 $S_i(p, w_i)$ が

$$S_i(p, w_i) = D_p h_i(p, u)|_{u=u_i(x_i(p,w_i))}$$
$$S_i(p, w_i) = D_p^2 e_i(p, u)|_{u=u_i(x_i(p,w_i))}$$

  を満たすことから導かれる。

命題 7.2 消費者 i の超過需要関数 $z_i(p)$ とスルツキー代替行列 $S_i(p, w_i)$ について

$$Dz_i(p) = S_i(p, p \cdot \omega_i) - D_w x_i(p, p \cdot \omega_i) z_i(p)^T$$

が成り立つ。またこれより任意のベクトル $v \in \mathbf{R}^L$ に対して

$$v^T Dz_i(p) v = v^T S_i(p, p \cdot \omega_i) v - v^T D_w x_i(p, p \cdot \omega_i) z_i(p)^T v$$

が成り立つ。

証明 消費者の超過需要関数は $z_i(p) = x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i$ によって定義されるから $Dz_i(p) = D_p x_i(p, p \cdot \omega_i) + D_w x_i(p, p \cdot \omega_i) w_i^T$ が成り立つ。ここでスルツキー代替行列行列を用いて右辺から $D_p x_i(p, p \cdot \omega_i)$ を消去すれば $Dz_i(p) = S_i(p, p \cdot \omega_i) - D_w x_i(p, p \cdot \omega_i)[x_i(p, p \cdot \omega_i) - w_i]^T$ となる。最後に超過需要関数 $z_i(p)$ の定義により右辺を変形して $Dz_i(p) = S_i(p, p \cdot \omega_i) - D_w x_i(p, p \cdot \omega_i) z_i(p)^T$ を得る。命題の後半は前半の結果より明らかである。∎

- $z_i(p + v) - z_i(p) \approx Dz_i(p) v$ が成り立つから，$Dz_i(p) v$ は近似的に価格ベクトルの変化 v に伴う超過需要ベクトルの変化を表している。したがってまた $v^T Dz_i(p) v$ は近似的に価格ベクトルの変化と超過需要ベクトルの変化の内積を表している。

[9] この等式において右辺第 1 項は価格変化が需要に与える代替効果，右辺第 2 項は価格変化が需要に与える所得効果を表している。

命題 7.2 の結果より消費者の超過需要関数 z_i とベクトル $v \in \mathbf{R}^L$ について

$$v \cdot z_i(p) = 0 \Longrightarrow v^T Dz_i(p) v \leq 0 \tag{8}$$

が成り立つことが分かる。これよりただちに次の命題を得る。

命題 7.3 もし $v \in \mathbf{R}^L$ が任意の $i = 1, \ldots, L$ について $v \cdot z_i(p) = 0$ を満たすならば $v^T Dz(p) v \leq 0$ が成り立つ。

証明 経済の超過需要関数の定義から $Dz(p) = \sum_i Dz_i(p)$ が成り立つことと (8) 式より明らか。∎

命題 7.3 とワルラス法則から明らかに任意の $v \in \{tp : t \in \mathbf{R}\}$ に対して $v^T Dz(p) v \leq 0$ が成り立つ。しかし命題 5.2 で与えられた超過需要関数 z の 5 性質は $v \notin \{tp : t \in \mathbf{R}\}$ の範囲に $v^T Dz(p) v \leq 0$ を満たすような v が存在するかどうかについて何ら制約を課さない。したがってもし一定のクラスに含まれる任意の経済に対してある $v \notin \{tp : t \in \mathbf{R}\}$ が存在して $\forall i \;\; v \cdot z_i(p) = 0$ が成り立つならば，これはそのクラスに含まれる任意の経済において超過需要関数 z が命題 5.2 の 5 性質以外の性質を持つことに他ならない。

そこで価格ベクトル p を与件として $v \in \mathbf{R}^L$ に関する線形方程式体系

$$\begin{cases} v \cdot z_1(p) = 0 \\ \quad \vdots \\ v \cdot z_I(p) = 0 \\ v \cdot p = 0 \end{cases} \tag{9}$$

について考える。この線形方程式が自明な解 $v = 0$ 以外の解を持つことと，ある $v \notin \{tp : t \in \mathbf{R}\}$ が存在して $\forall i \;\; v \cdot z_i(p) = 0$ が成り立つことは同値である。したがって先の議論より，もし一定のクラスに含まれる任意の経済のもとで線形方程式 (9) が自明な解 $v = 0$ 以外の解を持つならば，そのクラスに含まれる任意の経済において超過需要関数 z は命題 5.2 の 5 性質以外の性質を持つ。いま線形方程式 (9) は L 個の未知数と $I + 1$ 本の方程式から構成されているから，$L > I + 1$ が成り立つならば線形方程式 (9) は自明な解 $v = 0$ 以外の解を持つ。

ここで議論を一歩進めて，線型方程式 (9) において与件であった価格ベクトル p としてワルラス均衡価格ベクトル p^* をとれば線型方程式 (9) は

$$\begin{cases} v \cdot z_1(p^*) = 0 \\ \quad \vdots \\ v \cdot z_I(p^*) = 0 \\ v \cdot p^* = 0 \end{cases} \tag{10}$$

となる。ワルラス均衡価格 p^* は $z(p^*) = \sum_i z_i(p^*) = 0$ を満たすから，もし $v \in \mathbf{R}^L$ について $v \cdot z_1(p^*) = \cdots = v \cdot z_{I-1}(p^*) = 0$ が成り立つならば $v \cdot z_I(p^*) = 0$ も成り立つことが分かる。したがって線型方程式 (10) は実質的に I 本の方程式から構成されているから，もし $L > I$ が成り立つならば線形方程式 (10) は自明な解 $v = 0$ 以外の解を持つ。

以上の結果を次の命題によってまとめておく。

命題 7.4 消費者の人数と財の種類に関して $L > I$ が成り立つ任意の経済において超過需要関数 z は

$$\exists v \in \mathbf{R}^L \setminus \{tp^* : t \in \mathbf{R}\} \quad v^T Dz(p^*)v \leq 0$$

という性質を持つ。ただし $p^* \in \mathbf{R}^L_{++}$ はワルラス均衡価格ベクトルとする。さらに消費者の人数と財の種類に関して $L > I + 1$ が成り立つ任意の経済において超過需要関数 z は

$$\forall p \in \mathbf{R}^L_{++} \; \exists v \in \mathbf{R}^L \setminus \{tp : t \in \mathbf{R}\} \quad v^T Dz(p)v \leq 0$$

という性質を持つ。

命題 7.4 から，消費者の人数と財の種類について $L > I$ が成り立つとき経済の超過需要関数が命題 5.2 の 5 性質以外の性質を持つこと，換言すれば SMD 定理が成り立つためには $I \geq L$ が成り立たなければならないことが示された。