上級ミクロ経済学 講義ノート

原千秋 京都大学経済研究所

2020年2月12日

第1章

Kuhn-Tucker 条件

1.1 イントロダクション

本章では、制約付き最大化問題の解への Kuhn-Tucker 必要条件と十分条件を解説する。本章で与えられる条件は目的関数が複数個ある場合にも適用でき、その点で標準的なものよりも一般的である。したがって、制約付き最大化問題はパレート効率的な配分(定義は後述)を見つける問題の一般化にもなる。また我々の行う証明は Minkowski-Farkas の補題を使用しているという点で標準的なものよりも初等的である。これによって帰納法による証明を行うことができ、分離超平面定理を使用する際の位相的な議論を省くことができる。

1.2 Minkowski-Farkas の補題

本節の内容は Gale, "Theory of Linear Economic Models" の第 2.1-2.3 章によっている. J と L を正の整数とする.

1.2.1 補題 (Minkowski and Farkas) $A \in \mathbb{R}^{J \times L}, b \in \mathbb{R}^L$ とする. このとき,以下の 2 条件のうち 1 つのみが必ず成立する.

- 1. 列ベクトル $z \in \mathbf{R}^J_{\perp}$ が存在して $b^{\top} = z^{\top}A$.
- 2. 列ベクトル $x \in \mathbf{R}^L$ が存在して $Ax \in \mathbf{R}_+^J$ かつ $b^\top x < 0$.

ただし、^T は転置を表す.

任意の $a\in \mathbf{R}^L$ に対して $a^\perp=\{x\in \mathbf{R}^L|a\cdot x=0\}$ と定義する. つまり, a^\perp は a と直交するベクトルの集合である.

 $a \in \mathbf{R}^L$ かつ $b \in \mathbf{R}^L$ とし, $a \cdot b \neq 0$ と仮定する.このとき,任意の $x \in \mathbf{R}^L$ に対して一意な $v \in a^{\perp}$ と一意な $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在し $x = v + \lambda b$ である.v を x の b に沿った a^{\perp} への射影という.

練習問題 1.2.1 $v = x - \frac{a \cdot x}{a \cdot b}b$ を示せ.

補題 1.2.1 の証明 まず,上の 2 条件が同時に成立しないことを背理法により示す.上の 2 条件を満たす z と x が存在すると仮定する. $b^{\top}=z^{\top}A$ に x を右からかけて $b^{\top}x=z^{\top}Ax$ を得る.しかし,条件 2 と $z\in \mathbf{R}_{+}^{J}$ から $b^{\top}x<0$ かつ $z^{\top}Ax\geq0$ が成立するから,この等式は成立せず,これは矛盾である.したがって,この 2 条件は同時には成立しない.

あとは条件 1 が成立しないときに条件 2 が成立することを示せば十分である.これを J に関する帰納法によって示す.

J=1 の場合の証明は練習問題とする.

J > 2 として J - 1 のときには条件 1 が成立しなければ条件 2 が成立するものとする.

$$A = \left[\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_{J-1} \\ a_J \end{array} \right]$$

と表す. ここで, $a_1, \ldots, a_{J-1}, a_J$ は \mathbf{R}^L の行ベクトルである. また,

$$A' = \left[egin{array}{c} a_1 \ dots \ a_{J-1} \end{array}
ight] \in oldsymbol{R}^{(J-1) imes L}$$

とする. A は条件 1 を満たさないから,A' もまた条件 1 を満たさない.すなわち, $b^\top=z'^\top A'$ なる $z'\in \mathbf{R}_+^{J-1}$ は存在しない.したがって,帰納法の仮定から $x'\in \mathbf{R}_+^{L}$ (列ベクトル)が存在して $A'x'\in \mathbf{R}_+^{J-1}$ かつ $b^\top x'<0$ である.

 $a_J \cdot x' \geq 0$ ならば x' は条件 2 で求めるものであり、証明は完了する. そこで $a_J \cdot x' < 0$ と仮定する. a_1, \ldots, a_{J-1}, b の a_J に沿った x'^{\perp} への射影をそれぞれ $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{J-1}, \hat{b}$ と表す.

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_1 \\ \vdots \\ \widehat{a}_{J-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(J-1) \times L}$$

とおく、ここで背理法により $\hat{b}^{\top}=w^{\top}\hat{A}$ なるような $w\in \mathbf{R}_+^{J-1}$ (列ベクトル) が存在しないことを示す、そこでそのような

$$w = \left[\begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_{J-1} \end{array} \right]$$

が存在すると仮定する. このとき,

$$\widehat{b}^{\top} = \sum_{j=1}^{J-1} w_j \widehat{a}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{J-1} w_j \left(a_j - \frac{x' \cdot a_j}{x' \cdot a_J} a_J \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{J-1} w_j a_j - \left(\sum_{j=1}^{J-1} w_j \frac{x' \cdot a_j}{x' \cdot a_J} \right) a_J$$

となり, したがって,

$$b^{\top} = \sum_{j=1}^{J-1} w_j a_j + \left(\frac{x' \cdot b}{x' \cdot a_J} - \sum_{j=1}^{J-1} w_j \frac{x' \cdot a_j}{x' \cdot a_J} \right) a_J$$

である. ここで,

$$\frac{x' \cdot b}{x' \cdot a_J} - \sum_{i=1}^{J-1} w_j \frac{x' \cdot a_j}{x' \cdot a_J} \ge 0$$

だから,これは A が条件 1 を満たさないという最初の仮定に反する.ゆえに, $\hat{b}=w^{\intercal}\hat{A}$ となるような $w\in \mathbf{R}_+^{J-1}$ は存在しない.

1.3 分離超平面定理 5

したがって帰納法の仮定から $\widehat{x}\in \mathbf{R}^L$ (列ベクトル)が存在して $\widehat{A}\widehat{x}\in \mathbf{R}_+^{J-1}$ かつ $\widehat{b}^{\top}\widehat{x}<0$ である. x を \widehat{x} の x' に沿った a_J^{\perp} への射影とする.x が A に対して条件 2 を満たすことを示す. $x\in a_J^{\perp}$ から $a_J\cdot x=0$ である.各 $j\leq J-1$ に対して

$$a_j \cdot x = \widehat{a}_j \cdot x = \widehat{a}_j \cdot \widehat{x} \ge 0$$

が成り立つ.ここで,1 番目の等式はある λ に対して $\hat{a}_j-a_j=\lambda a_J$ となることから,そして 2 番目の等式は $\hat{a}_j\in x'^\perp$ かつある λ に対して $x-\hat{x}=\lambda x'$ であることからいえる.同様にして $b\cdot x<0$ なることが示せる.これで証明完了である. ///

1.3 分離超平面定理

1.3.1 定義 C を \mathbf{R}^L の部分集合とする. 任意の $c, c' \in C$ と $\lambda \in [0,1]$ に対して $\lambda c + (1-\lambda)c' \in C$ が成り立つとき, C は凸 (convex) であるという.

厳密な言い方ではないが、C の境界がすべて C 自身に含まれるとき C は閉であるという.

1.3.2 定理 (分離超平面定理) C を閉で凸な \mathbf{R}^L の部分集合とし, $b \in \mathbf{R}^L \setminus C$ とする.このとき,ある $x \in \mathbf{R}^L$ と $d \in \mathbf{R}$ が存在して,すべての $c \in C$ に対して,

$$x \cdot c \ge d > x \cdot b$$

が成り立つ.

練習問題 1.3.1 以下の手順にしたがって分離超平面定理を用い、Minkowski-Farkas の補題を証明しなさい。

1. A の行ベクトルによって張られる錐,

$$\left\{ \sum_{j=1}^{J} z_j a_j \in \mathbf{R}^N \mid z_1 \ge 0, \dots, z_J \ge 0 \right\}$$

が凸であることを示せ.

- 2. 上記の錐を C で表わす。証明なしで C が閉であることを用いてよい。 C と $b \in \mathbf{R}^L \setminus C$ に分離超平面定理を適用し,ある $x \in \mathbf{R}^N$ が存在して $x \cdot b < 0$ かつすべての $c \in C$ に対して $x \cdot c \geq 0$ が成立することを示せ(ヒント:分離超平面定理により,ある $x \in \mathbf{R}^N$ と $d \in \mathbf{R}$ が存在してすべての $c \in C$ に対して $x \cdot c \geq d > x \cdot b$ が成立する。そこで そのような $x \in C$ に対して $x \cdot c \geq d > x \cdot b$ が成立する。そこで そのような $x \in C$ に対して $x \cdot c \geq 0$ となることを示せばよい)。
- 3. 手順2の結果から Minkowski-Farkas の補題を示しなさい.

1.4 頂点付き錐の強支持可能性

- 1.4.1 補題 $A \in \mathbb{R}^{J \times L}$ とする. このとき以下の 2 条件のうち 1 つのみが必ず成立する.
 - 1. ある $z \in \mathbf{R}_{\perp}^{J} \setminus \{0\}$ (列ベクトル) が存在して $z^{\mathsf{T}}A = 0$ が成り立つ.
 - 2. ある $x \in \mathbf{R}^L$ (列ベクトル) が存在して $Ax \in \mathbf{R}_{++}^J$ が成り立つ.

補題 1.4.1 の証明 上の 2条件が同時に成立しないことを示すのは練習問題とする.

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^J$$

とし、また $\widetilde{A}=\left[\begin{array}{cc}A&e\end{array}\right]\in {\bf R}^{J imes(L+1)}$ と定義する.このとき条件 1 が、ある $z\in {\bf R}_+^J$ (列ベクトル)が存在して、

$$z^{\top}\widetilde{A} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{L \text{ (II)}}, 1)$$

となることと同値であることは簡単にわかる. したがって Minkowski-Farkas の補題により, この条件が成り立たないならば, ある $\widetilde{x}\in \mathbf{R}^{L+1}$ (列ベクトル) が存在して, $\widetilde{A}\widetilde{x}\in \mathbf{R}_+^J$ かつ $(0,\dots,0,1)\widetilde{x}<0$ が成立する.

$$\widetilde{x} = \left[\begin{array}{c} x \\ x_{L+1} \end{array} \right]$$

と表記する.ここで $x \in \mathbf{R}^L$ (列ベクトル) である.このとき $\widetilde{A}\widetilde{x} = Ax + x_{L+1}e$ かつ $(0,\ldots,0,1)\widetilde{x} = x_{L+1}$ である.したがって, $x_{L+1} < 0$ かつ $Ax \in \mathbf{R}_{++}^J$ である.ゆえに,条件 2 が成立する. ///

1.5 複数の目的関数に関する制約付き最大化問題

以下の複数個の目的関数に関する制約付き最大化問題 (constrained maximization problem) の定式化は Smale による.

N,M,L を正の整数とする。N 個の目的関数に関する制約付き最大化問題は $(X,f_1,\ldots,f_N,g_1,\ldots,g_M)$ によって定義される。ここで X は \mathbf{R}^L の部分集合で, f_n $(n=1,\ldots,N)$ と g_m $(m=1,\ldots,M)$ は X 上で定義された実数値関数である。X を定義域, f_n を目的関数, g_m を制約関数と呼ぶ。この問題は,

$$\max_{x \in X} \quad (f_1(x), \dots, f_N(x))$$
 subject to
$$g_1(x) \ge 0$$

$$\vdots$$

$$g_M(x) \ge 0$$

と表記される。すべての m に対して $g_m(x^*) \ge 0$ であり、さらにすべての m に対して $g_m(x) \ge 0$ かつすべての n に対して $f_n(x) \ge f_n(x^*)$ かつある n について $f_n(x) > f_n(x^*)$ であるような $x \in X$ が存在しないとき、 $x^* \in X$ を解 (solution) という。

本章では、以後 X を開集合とし、 f_n と g_m は連続微分可能とする.

1.6 Kuhn-Tucker 必要条件

1.6.1 定理 (Kuhn-Tucker 必要条件) $x^* \in X$ が制約付き最大化問題の解ならば,N+M 個の非負の実数を成分に持つベクトル $(\mu_1,\ldots,\mu_N,\lambda_1,\ldots,\lambda_M) \in \mathbf{R}_+^{N+M}$ が存在して,

- 1. N + M 個の非負の実数のうち少なくとも 1 つが厳密に正.
- 2. $\forall x \in \mathcal{C}$ 2. $\forall x \in \mathcal{C}$ 2. $\exists x \in \mathcal{C}$ 3. $\exists x \in \mathcal{C}$ 4. $\exists x \in \mathcal{C}$ 3. $\exists x \in \mathcal{C}$ 4. $\exists x \in \mathcal{C}$ 3. $\exists x \in \mathcal{C}$ 4. $\exists x \in \mathcal{C$

3.
$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n \nabla f_n(x^*) + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla g_m(x^*) = 0.$$

定理 1.6.1 の略証

- 1. 必要ならば制約関数の番号をつけかえることにより、最初の K 個の制約条件が等式で成立して いると仮定してよい. ただし, K < M である. このとき背理法により, すべての n について $\nabla f_n(x^*) \cdot v > 0$, かつすべての $m \leq K$ について $\nabla g_m(x^*) \cdot v > 0$ なる $v \in \mathbf{R}^L$ は存在しないことを
- 2. 補題 1.4.1 により, N+K 個の非負実数のベクトル $(\mu_1,\ldots,\mu_N,\lambda_1,\ldots,\lambda_K) \in \mathbf{R}_+^{N+K}$ が存在して, N+K 個の非負実数のうち少なくとも 1 つが厳密に正で、

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n \nabla f_n(x^*) + \sum_{m=1}^{K} \lambda_m \nabla g_m(x^*) = 0.$$

3. 最後に、各 m>K に対して $\lambda_m=0$ とおく、このとき、ベクトル $(\mu_1,\ldots,\mu_N,\lambda_1,\ldots,\lambda_M)$ は Kuhn-Tucker 必要条件の3条件を満たす.

///

Kuhn-Tucker 十分条件

- **1.7.1** 定義 X が凸集合で $h: X \to \mathbf{R}$ とする. 以下の条件が満たされるとき, h を準凹 (quasi-concave) で あるという. 任意の $x,y \in X$ と $\alpha \in [0,1]$ について, $h(y) \ge h(x)$ ならば $h(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge h(x)$.
- **1.7.2** 補題 X が凸集合, $h: X \to \mathbf{R}$ が連続微分可能であるとする. このとき h が準凹であることと. $x,y \in X$ かつ $h(y) \ge h(x)$ ならば $\nabla h(x) \cdot (y-x) \ge 0$ であることは同値である.
- **1.7.3** 定義 X が凸集合, $h: X \to \mathbf{R}$ が連続微分可能であるとする. このとき $x,y \in X$ かつ h(y) > h(x)ならば $\nabla h(x) \cdot (y-x) > 0$ であるとき、h は擬凹 (pseudo-concave) であるという.
- **1.7.4 補題** X が凸集合, $h: X \to \mathbf{R}$ が連続微分可能であるとする. h が擬凹関数ならば. h は準凹関数で ある.
- **1.7.5** 補題 X が凸集合, $h: X \to \mathbf{R}$ が連続微分可能であり,さらにすべての $x \in X$ に対して $\nabla h(x) \neq 0$ であるとする. このとき h が準凹関数であることと擬凹関数であることは同値である.
- 1.7.6 定理 (Kuhn-Tucker 十分条件) X が凸集合, f_n が擬凹関数, そして g_m が準凹関数であるとする. $x^* \in X$ であり、かつ N + M 個の非負実数ベクトル $(\mu_1, \ldots, \mu_N, \lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in \mathbf{R}^{N+M}_{\perp}$ が存在して、
 - 1. $\forall x \in \mathcal{C}(x^*) \geq 0$,
 - 2. $(\mu_1, \ldots, \mu_N) \in \mathbf{R}_{++}^N$,

 - 3. すべての m について, $g_m(x^*) > 0$ ならば $\lambda_m = 0$, 4. $\sum_{n=1}^{N} \mu_n \nabla f_n(x^*) + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla g_m(x^*) = 0$,

が成立するとする. このとき x^* は解である.

定理 1.7.6 の略証

1. 必要ならば制約関数の番号をつけかえることにより、最初の K 個の制約条件が等号で成立してい ると仮定してよい. ただし $K \leq M$ である. このときもし x^* が解でないならば, すべての n に

ついて $\nabla f_n(x^*) \cdot v \geq 0$, かつある n について $\nabla f_n(x^*) \cdot v > 0$, かつすべての $m \leq K$ について $\nabla g_m(x^*) \cdot v \geq 0$ となるような $v \in \mathbf{R}^L$ が存在する.

2. Kuhn-Tucker 十分条件の条件 2,3 を用いて,

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n \nabla f_n(x^*) \cdot v + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla g_m(x^*) \cdot v > 0$$

が示せる.

3. 上の不等式の左辺は,

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \nabla f_n(x^*) + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla g_m(x^*)\right) \cdot v$$

に等しいから、これは Kuhn-Tucker 十分条件の条件 4 に矛盾する.

///

練習問題 1.7.1 Kuhn-Tucker 十分条件の条件 2.3 が必要であることを示す例を挙げなさい.

練習問題 1.7.2 2 つの財が存在すると仮定する.それぞれの財の価格は\$1 である. $u(x_1,x_2)=x_1^{1/2}e^{x_2}$ なる効用関数 $u:\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}$ を持つ消費者を考える.彼の所得は w (> 0) である.予算制約のもとでの標準的な効用最大化問題を考えよう.ここで効用関数 u の定義域は \mathbf{R}_+^2 であり, \mathbf{R}^2 の開部分集合ではないこと,そして u は $x_1=0$ であるような $x\in\mathbf{R}_+^2$ において微分可能でないことに注意せよ.本章では,一貫して目的関数と制約関数の定義域は \mathbf{R}^L の開部分集合であること,そして目的関数と制約関数は連続微分可能であると仮定してきた.

本問では、これらの仮定を満たすためにどのようにして制約条件を追加し、目的関数の定義域を修正するかを示す.

1. $x \in \mathbb{R}^2_+$ が元の効用最大化問題の解であるならば $x_1 > 0$ であることを示せ、このことから、定義域 を $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ and } x_2 \geq 0\}$ に制限しても解が変化しないことがわかる.

関数 e^{x_2} がどのような x_2 の値に対しても定義できることから、関数 u を $X=\{x\in \mathbf{R}^2\mid x_1>0\}$ 上に拡張できることに注意せよ。また X が \mathbf{R}^2 の開部分集合であることにも注意せよ。 $g_1:X\to\mathbf{R}$ を $g_1(x)=w-x_1-x_2$ と定義する。これは予算制約である。

2. 制約関数 $g_2: X \to \mathbf{R}$ を,元の効用最大化問題が以下の制約付き最大化問題と同値になるように定義しなさい.

$$\max_{x \in X} u(x)$$
subject to $g_1(x) \ge 0$

$$g_2(x) \ge 0$$

(x は新たな定義域 <math>X から選ばれることに注意せよ)

3. Kuhn-Tucker 十分条件を用いて異なる w の値に対して解を見つけなさい.

1.8 包絡線定理

K,M,L を正の整数とする。X を \mathbf{R}^L の開部分集合,P を \mathbf{R}^K の開部分集合とする。また f と g_m ($m=1,\ldots,M$) を $X\times P$ 上で定義された 2 回連続微分可能な実数値関数とする。各 $p\in P$ に対して,以下の 1 目的関数に関する制約付き最大化問題を考える。

1.8 包絡線定理 9

$$\max_{x \in X} \quad f(x,p)$$
 subject to
$$g_1(x,p) \ge 0$$

$$\vdots$$

$$g_M(x,p) \ge 0$$

p を P 上で変化させることによって、制約付き最大化問題の集合を考えることができる。集合 P をこの制約付き最大化問題の集合のパラメータ空間 (parameter space) と呼ぶ。

以後本章では、すべての $p \in P$ に対してパラメータ p の制約付き最大化問題の解が一意に存在すると仮定する。その解を $a(p) \in X$ とする。これは写像 $a: P \to X$ を定め、政策関数 (policy function) と呼ばれる。また $b: P \to \mathbf{R}$ を b(p) = f(a(p), p) と定める。これを価値関数 (value function) と呼ぶ.

1.8.1 政策関数の連続微分可能性

以下の命題では、勾配ベクトルは行ベクトルとして扱う.

1.8.1 命題 $(x^*,p^*)\in X\times P$ とし、パラメータ p^* に対して x^* が Kuhn–Tucker 十分条件を、厳密に正な 乗数ベクトル $(1,\lambda_1,\ldots,\lambda_M)\in \mathbf{R}^{1+M}_{++}$ について満たすと仮定する。また $(L+M)\times (L+M)$ 行列、

$$\begin{bmatrix} \nabla_x^2 f(x^*, p^*) + \sum_{m=1}^M \lambda_m \nabla_x^2 g_m(x^*, p^*) & \nabla_x g_1(x^*, p^*)^\top & \cdots & \nabla_x g_M(x^*, p^*)^\top \\ \nabla_x g_1(x^*, p^*) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_x g_M(x^*, p^*) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

に逆行列が存在すると仮定する. このとき p^* を含む P の開部分集合 Q が存在し, a と b の Q 上の制限は連続微分可能となる.

証明には陰関数定理を直接用いればよい.

1.8.2 包絡線定理

1.8.2 定理 (包絡線定理) $(x^*, p^*) \in X \times P$ とし, x^* がパラメータ p^* について Kuhn-Tucker 十分条件を厳密に正な乗数ベクトル $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in \mathbf{R}^{1+M}_{++}$ について満たすとする.また a と b は連続微分可能とする.このとき,

$$\nabla b(p^*) = \nabla_p f(x^*, p^*) + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla_p g_m(x^*, p^*)$$

Theorem 1.8.2 の略証

1. すべての $p \in P$ と m に対して $g_m(a(p), p) = 0$ であることを用いて

$$\nabla_x g_m(x^*, p^*) \nabla a(p^*) + \nabla_p g_m(x^*, p^*) = 0$$

を得る.

2. 上式の両辺に λ_m をかけて m について和をとり、Kuhn–Tucker 十分条件を適用することによって

$$-\nabla_x f(x^*, p^*) \nabla a(p^*) + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla_p g_m(x^*, p^*) = 0$$

を得る.

3. すべての p に対して b(p) = f(a(p), p) となることから

$$\nabla b(p^*) = \nabla_x f(x^*, p^*) \nabla a(p^*) + \nabla_p f(x^*, p^*)$$

を得る.

4. 上の2式を合わせれば証明が完了する.

///

参考文献

- [1] David Gale, Theory of Linear Economic Models, University of Chicago Press
- [2] Stephen Smale, Global analysis and economics, in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 1, edited by Kenneth Arrow and M. Intrilligator, North Holland.

第2章

選好と選択

2.1 イントロダクション

本章では抽象的な設定における選好と選択の基本的な性質を学ぶ.特に消費者行動を念頭におくが,本章の議論はより一般的に成り立つ.個人一人の選好について語るとき本章の議論は当たり前に聞こえるかもしれないが,集団の意思決定問題や行動ファイナンス,実験経済学等の問題を議論するとき有用である.集団の意思決定問題は,しばしば議会や委員会などでみられ,制度設計の理論とも密接な関係がある.個人の選好や選択を抽象的に学ぶことで,集計的な選好や選択が個人の場合ではあまり見られない性質を持っている場合の理解を深められる.また,選好と選択の一般論の重要性はさらに強調される.経済学で想定されているほど現実の消費者は合理的ではないことが,近年の実験経済学の発展によりわかってきた.合理性などに整合的でない性質が実際のデータでたびたび観察される.それらを正しく捉えるために抽象的な議論の理解が必要である.

本章の内容は Mas-Colell, Whinston and Green, *Microeconomic Theory* (以下, MWG と略記) の第 1章に相当するが、顕示選好の強公理は第 3 章第 J 節で論じられている.

選択肢 (alternatives) の集合を X で表そう。ただし,X は非空だと仮定する。選好 (preference) は X の元に対して持つ望ましさの順序付けを,選択 (choice) は実際に選択肢の中から選ぶ行動およびその結果を指す。選択肢について何らかの選好(道徳的判断や確率的な評価などを表すこともある)を持ち,選択肢の集合 X から選択する経済主体(消費者,企業,投資家,経済計画者など)を考えていこう。この問題を論じる方法としては,「二項関係」を用いる方法と,「選択構造」を用いる方法の 2 つのアプローチがあり,以下ではこれらを順に見ていくことにする。

2.2 選好関係

集合 X 上の二項関係 (binary relation または relation) R は任意の $x,y \in X$ に対し関係 xRy が成立するか否かが定義されている数学的対象と見なすことができる。厳密には、関係 xRy を $(x,y) \in R$ と見なすことで R を集合 $X \times X$ の部分集合と同一視できる。また、xRy が成り立たないときに xR^cy と書くことにすれば、R を $X \times X$ の部分集合と見なしたとき R^c は R の補集合である。

次に、二項関係 R に関する性質を定義する.

2.2.1 定義 集合 X 上の二項関係 R が

- 1. 反射的 (reflexive) であるとは、任意の $x \in X$ に対して xRx が成り立つことをいう.
- 2. 非反射的 (irreflexive) であるとは, R^c が反射的であることをいう.
- 3. 完備 (complete) であるとは、任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して xRy または yRx が成り立つ

14 第 2 章 選好と選択

ことをいう.

4. 対称的 (symmetric) であるとは、任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して xRy なら yRx が成り立 つことをいう.

- 5. 非対称的 (asymmetric) であるとは、任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して xRy なら yR^cx が成り立つことをいう.
- 6. 非循環的 (acyclic) であるとは、任意の $n \leq N-1$ に対して $x_n R x_{n+1}$ が成り立ち、かつ $x_N R x_1$ が 成り立つような自然数 N と $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X^N$ が存在しないことをいう.
- 7. 推移的 (transitive) であるとは、任意の $x \in X$ 、任意の $y \in X$ と任意の $z \in X$ に対して xRy かつ yRz ならば xRz が成り立つことをいう.
- 8. 負に推移的 (negatively transitive) であるとは, R^c が推移的であることをいう.

また、経済学では、R が完備かつ推移的であるとき R は合理的 (rational) ともいわれる.

非循環性と推移性はいずれも二項関係の一貫性を要請しているが、非循環性は集合 $R \subseteq X \times X$ の大きさの上限を、推移性はその下限を示しているという点でその性質が異なる。推移性は R のある程度の大きさを要請している点で、完備性に似た性質を持つ。これらの性質の間には様々な関係がある。その一例を命題として挙げておく。

2.2.2 命題 選択肢の集合は非空だと仮定する.

- 1. 任意の完備な二項関係は反射的である.
- 2. いかなる反射的な二項関係も非対称的ではない.
- 3. 任意の非循環的な二項関係は非対称的である.
- 4. 任意の非対称的な二項関係は非反射的である.
- 5. 任意の非対称的かつ負に推移的な二項関係は推移的である.
- 6. 任意の非反射的かつ推移的な二項関係は非循環的である.

命題 2.2.2 の証明 5 のみを背理法で示す。任意の $x \in X$,任意の $y \in X$ および任意の $z \in X$ に対し,xRy, yRz かつ xR^cz が成立するとする。前提の非対称性より yR^cx である。これは,負の推移性より yR^cz を意味するが,これは前提条件と矛盾するので,xRz でなければならない。 ///

2.2.3 命題 非空な集合 X 上の二項関係を R で表す. 以下を証明せよ.

- 1. R が負に推移的であるとき、かつそのときに限り、任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対してある $z \in X$ が存在して、xRy なら xRz または zRy が成り立つ.
- 2. R が完備であるとする. このとき R が推移的であるなら, R は負に推移的である.
- $3.\ R$ が非対称的であるとき、かつそのときに限り、 R^{c} は完備である.

命題 2.2.3 の証明 2 のみを示す。任意の $x \in X$,任意の $y \in X$ および任意の $z \in X$ に対し, xR^cy と yR^cz が成立するとする。完備性より yRx と zRy が言える。もし xRz を仮定すれば推移性より yRz と xRy である。これは推移性より xRz が成立するが,これは前提条件に矛盾する。よって xR^cz でなければならない。

この逆は成り立たない。つまり、完備性と負の推移性をみたす二項関係が推移的とは限らない。反例を挙げることでそれを示す。 $X=\{x,y,z\}$ とする。X上の二項関係 R が次のように定義されるとき、R は完

2.2 選好関係 15

備性と負の推移性を持つが推移性を持たない: $R = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,z),(z,x),(y,x),(z,y)\}$. このとき $R^c = \{(x,z)\}$ なので,負の推移性は明らかである。xRy,yRz,zRx なので,完備性も確認できる。しかし,xRy,yRz は成立するが xR^cz なので,この二項関係は推移性を持たない.

二項関係 R は経済主体の選好を表すものだと解釈すると、xRy の解釈には次の 3 通りがある:

二項関係が持つ性質によってこれらの中でどの解釈を採用するかを決めなければいけない。たとえば、Rが非反射的であるときは 2 、3番目の通りには解釈できない。具体的には、Rが反射的か非反射的かによって異なる。Rが反射的なら、2または 3 の解釈を採り、R の代わりに \succsim で表すことがある。R が非反射的なら、1 の解釈を採り、R の代わりに \succ で表すことがある。

この解釈を踏まえて,反射的な R の定義を再考してみよう.集合 X 上の二項関係 R は任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対し関係 xRy が成立するか否かが定義されている数学的対象であると見なせるとは,「x は y と少なくとも同程度に好ましい」か否かがわかっているという意味である.もし,「x は y と少なくとも同程度に好ましい」なら xRy であり,そうでないなら xR^cy である.ここで, xR^cy だからといって yRx とは限らないことに注意して欲しい.つまり,「x は y と少なくとも同程度に好ましくない」からといって「y は x と少なくとも同程度に好ましい」とは限らないということである.ただし,もし x が完備性を満たしていれば, xR^cy なら yRx が成り立つことに注意されたい.

- 練習問題 **2.2.1** 1. $X = \mathbb{R}^2$ とする. 任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して, $x_1 \ge y_1$ と $x_2 \ge y_2$ が 同時に成り立つとき、かつそのときに限り $x \succsim y$ と書く. このとき、二項関係 \succsim は推移的であることを示し、さらに完備でないことを例を挙げて示せ.
 - 2. $X=\mathbf{R}^3$ とする. 任意の $x\in X$ と任意の $y\in X$ に対して、少なくとも 2 つの $n\in\{1,2,3\}$ について $x_n\geq y_n$ が成り立つとき、かつそのときに限り $x\succsim y$ と書く. このとき、二項関係 \succsim は完備であることを示し、さらに推移的でないことを例を挙げて示せ.

次に、二項関係 R^s を、xRy と yR^cx が成り立つときに xR^sy と書くことで定義する。この R^s を R の厳密な部分 (strict part) や非対称な部分 (asymmetric part) という。また、二項関係 R^i を、xRy と yRx が成り立つときに xR^iy と書くことで定義する。この R^i を R の無差別な部分 (indifference part) や対称な部分 (symmetric part) という。これらの定義は任意の二項関係 R について意味をなすが、特に R が反射的であるときに有用である。経済学では、反射的な二項関係 C に対して、C は、C は、C と書かれることが多い。

- 二項関係 R と、その厳密な部分 R^{s} 、無差別な部分を R^{i} に関して次の関係が知られている.
- **2.2.4** 命題 集合 X 上の二項関係を R とする. R の厳密な部分を $R^{\rm s}$, 無差別な部分を $R^{\rm i}$ と書く.
 - 1. $R^{s} \cup R^{i} = R$
 - 2. R が対称的であること, $R^{\rm i}=R$ となること, $R^{\rm s}=\varnothing$ となることはいずれも同値である
 - 3.~R が非対称的であること, $R^{\mathrm{s}}=R$ となること, $R^{\mathrm{i}}=\varnothing$ となることはいずれも同値である

命題 2.2.4 の証明 2 と 3 は定義から明らかだろう.1 のみ示す.定義から $R^s \subseteq R$ かつ $R^i \subseteq R$ だから, $R^s \cup R^i \subseteq R$ が成り立つ.したがって,逆の包含関係を示せば良い.任意の xRy について,yRx あるいは yR^cx が成り立つ.yRx なら,定義より xR^iy を得る. yR^cx なら,定義より xR^sy を得る.これより $R \subseteq R^s \cup R^i$ を得る.

命題 2.2.4 から、なぜ R^s が非対称な部分と、 R^i が対称な部分と呼ばれるかがわかるだろう.

練習問題 2.2.2 集合 X 上の二項関係を R と表す. 以下を証明せよ.

- 1. R^i は対称的である. また, R が推移的ならば R^i も推移的である.
- 2. R^s は非対称的である. また、R が推移的ならば R^s も推移的である.

練習問題 2.2.3 任意の二項関係 R に対して,R が推移的であることと, $R^{\rm s}$ と $R^{\rm i}$ が推移的であることは同値か.もしそうなら証明し,そうでないなら反例を挙げ,さらに同値性が満たされるための追加的な条件を示せ.

練習問題 2.2.4 集合 X 上の二項関係を R と表す.二項関係 R^t を,任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して yRx が成り立つときに xR^ty と書くことで定義する.このとき,以下を証明せよ.

- 1. R が完備ならば, $R = ((R^s)^c)^t$ である.
- 2. R が非対称ならば、 $R = ((R^c)^t)^s$ である.

2.3 効用関数

次に、二項関係を効用関数を用いて表すことを考える。二項関係を用いた選好の表現は最も原理的 (primitive) ではあるが微分可能性、凸性や凹性など、数学的性質ツールは適用できない。そのため、選好 を実数を用いて表すことで選好を解析する上の利点が生まれる。そもそもどのようなときに二項関係が効用 関数によって表現されているという問題から考えよう。

2.3.1 定義 集合 X 上の二項関係を R と表す。関数 $u: X \to R$ は,次の条件を満たすとき R を表現する 効用関数 (utility function representing R) であるといわれる。任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ について, $u(x) \ge u(y)$ であるとき,かつそのときに限り xRy である。また,R を表現する効用関数が存在するとき,R は表現可能 (representable) であるといわれる。

任意の二項関係 R について、それを表現するような効用関数が必ず存在するわけではないことに注意してほしい。また、R を表現するような効用関数がひとつでも存在すれば、そのような効用関数は無数に存在する (MWG, Exercise 1.B.3 参照).

二項関係が効用関数によって表現されることと,二項関係の合理性の間には次のような関係があることが 知られている.

2.3.2 命題 二項関係が効用関数によって表現されれば、その選好関係は完備かつ推移的である.

命題 2.3.2 の証明 効用関数によって表現される二項関係 R が完備かつ推移的であることを示そう.まず,完備性から示す.集合 X 上で定義された効用関数 u は,任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して $u(x) \geq u(y)$ または $u(y) \geq u(x)$ を満たす.したがって,任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して xRy または yRx を満たされる.

次に、推移性を示す。 xRy かつ yRz を仮定して、 xRz を示せばよい。 xRy かつ yRz より $u(x) \geq u(y)$ かつ $u(y) \geq u(z)$ が成り立つから、 $u(x) \geq u(z)$ を得る。 これは、 xRz に他ならない。 ///

命題 2.3.2 の逆は一般には成立しない. つまり,二項関係が完備かつ推移的であっても,その二項関係を表現する効用関数は存在するとは限らない. では,どのような二項関係が効用関数によって表現されないの

2.3 効用関数 17

だろうか、その例として辞書式選好 (lexicographic preference) が知られている。辞書式選好 R とは,たとえば $X=R_+^2$ の上で," $x_1>y_1$ "あるいは " $x_1=y_1$ かつ $x_2\geq y_2$ "のときに xRy とする二項関係のことである。辞書式選好は完備や推移的等の条件を満たすものの,これを表現する効用関数は存在しないことが知られている。

ここでそれを簡単に示していく.まず,辞書式選好の定義より,完備性は明らかである.任意の $x \in X$,任意の $y \in R$ および任意の $z \in R$ が xRy と yRz を満たすとき,定義より, $x_1 > y_1$ か, $x_1 = y_1$ かつ $x_2 \ge y_2$ である.同様に, $y_1 > z_1$ か, $y_1 = z_1$ かつ $y_2 \ge z_2$ である. $z_1 > x_1$ にはならないことは明らかな ので, $z_1 = z_1$ であれば $z_2 \ge z_2$ が成立することを見せれば推移性の証明は十分である. $z_1 = z_1$ が成立するとき, $z_1 = z_1$ である.すると $z_2 \ge y_2$ および $z_2 \ge z_2$ が成立し, $z_2 \ge z_2$ が成立する.

次に辞書式選好を表現する効用関数 $u: X \to \mathbf{R}$ を持つと仮定し、矛盾を導く、任意の $a \in \mathbf{R}_+$ を固定し、x = (a,1), y = (a,0) とする、xRy が成立し、u は R を表現しているので $u(x) \geq u(y)$ である。辞書式選好の定義より、任意の x と同程度に好ましいものは x 自身しかないので、u(x) > u(y) である。u(x) と u(y) の間にはある $q(a) \in \mathbf{Q}$ が存在し u(x) > q(a) > u(y) が成り立つ(練習問題 2.3.3 参照)。a は任意なので、関数 $q: \mathbf{R} \to \mathbf{Q}$ を定義することができる。ただし、a は無限集合 \mathbf{R}_+ の元なので、ここでは選出公理を仮定する。

ここで、 $a' \in R_+$ を定め、 $a' \neq a$ であるとする.一般性を失うことなく、a' > a とする.q の定義より u(x') > q(a') > u(y'),u(x) > q(a) > u(y) であり、また,u(y') > u(x) のため,q(a') > q(a) が成立する. つまり,任意の $a \in \mathbf{Q}$ と任意の $a' \in \mathbf{Q}$ に対し, $a \neq a'$ であれば $q(a) \neq q(a')$ である. しかし,加算集合である \mathbf{Q} から連続集合である \mathbf{R} への単射関数は存在しないので,矛盾である.

しかし、もしXが有限集合なら、逆も成立することが帰納法で証明できる。

練習問題 2.3.1 X の元の個数に関する数学的帰納法を用いて次を示せ. X が有限集合であるとき、つまり有限個の元からなるとき、X 上の任意の完備かつ推移的な二項関係はある効用関数によって表現可能である.

完備な二項関係は反射的だから、命題 2.3.2 は、二項関係が定義 2.3.1 の意味で効用関数によって表現されるとき、その二項関係は「少なくとも同程度に好ましい」関係を表していると解釈できる。また、あまり標準的ではないが、二項関係の効用関数による表現は次のように定義されることもある。

2.3.3 定義 集合 X 上の選好関係を R と表す。効用関数 $u: X \to R$ は、次の条件を満たすとき R を厳密 に表現する効用関数 (utility function strictly representing R) であるといわれる。任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ について,u(x) > u(y) であるとき,かつそのときに限り xRy である。また,R を強く表現する効用関数が存在するとき,R は厳密に表現可能 (strictly representable) であるといわれる。

任意の非対称的な二項関係は非反射的であることに注意すれば、次の命題は、二項関係が定義 2.3.1 の意味で効用関数によって表現されるとき、その二項関係は厳密に好ましい関係を表すと解釈できることを示している.

2.3.4 命題 二項関係が効用関数によって強く表現されるとき、その二項関係は非対称的かつ推移的である.

命題 2.3.4 の証明 推移性は命題 2.3.2 と全く同様にして示されるので、非対称性のみを示す。任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して、xRy なら yR^cx を示せば良いが、これは u(x) > u(y) としたときに u(y) > u(x) でない、 $u(x) \le u(y)$ と同値であるからである. ///

18 第2章 選好と選択

1. 二項関係 R が効用関数 u によって表現されるなら、二項関係 R^s は u によって厳密に表現される.

2. 二項関係 R が効用関数 u によって厳密に表現できるなら、二項関係 $(R^c)^t$ は u によって表現できる.

練習問題 2.3.3 (難しい) X 上の二項関係 R が効用関数 u によって厳密に表現されるとする.このとき, X の高々可算個の元からなる部分集合 Z が存在して,任意の $x \in X \setminus Z$ と任意の $y \in X \setminus Z$ に対して, xRy なら,ある元 $z \in Z$ が存在して xRz かつ zRy とできることを示せ.同様の主張は, R が効用関数によって表現されるときにも成り立つか.

練習問題 2.3.4 R を辞書的選好の厳密な部分とする. 命題 2.3.3 が成立するような $X=\mathbf{R}_+^2$ の高々可算な部分集合 Z は存在しないことを示せ.

面白い点は,表現可能な選好から導かれる需要関数と,異なる表現不可能な選好から導かれる需要関数(次章で扱う)は等しいことがあり得ることである.例えば,厳密な凹性を持つ,表現可能な選好 R を考える.辞書的選好を表す二項関係を R^l とするとき,新しい選好 R^* を考えることができる:任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ について xRy,または,xRy,yRx かつ xR^ly のとき xR^*y .このように作られた二項関係 R^* は,本質的に辞書的選好を変形した形であり,表現不可能である.しかし R^* が示す需要曲線は,R より示される需要曲線と全く同様の形を持つことが確認できる.

2.4 選択構造

いわゆる限界革命を主導した L. Walras, C. Menger, W. Jevons 等は、効用関数の存在を前提として理論を構築した。しかし人の選好や効用関数は目に見えないものである。そこで P. Samuelson は、市場で観察可能な消費者の行為、すなわち実際の選択に立脚し理論を構築することを提案した。

集合 X 上の**選択構造** (choice structure) とは,X の非空な部分集合の集合 \mathcal{B} と, \mathcal{B} から X の非空な部分集合の集合への写像 C の組 (\mathcal{B},C) のことである.但し,写像 C は \mathcal{B} の任意の元 B に対して $C(B)\subseteq B$ を満たすとする.このとき,C(B) は B が与えられたときに選択される選択肢の集合であると解釈できる.

2.4.1 定義 (\mathcal{B},C) を集合 X 上の選択構造とする. 集合 X 上の二項関係 R を、次のように定義する. 任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して、ある集合 $B \in \mathcal{B}$ が存在して $\{x,y\} \subseteq B$ と $x \in C(B)$ を満たすとき、xRy とおく. この二項関係 R を、 (\mathcal{B},C) の直接顕示弱選好関係 (the-directly-revealed-to-be-at-least-asgood-as relation) という.

上の定義において、 $y \notin C(B)$ とは限らないことに注意して欲しい. 特に $y \notin C(B)$ のとき、R は顕示的に強く好ましい関係といわれることもある.

次に、顕示選好の弱公理・強公理を定義しよう.これらは、選好関係と選択構造の二つのアプローチの関係を論じるときに重要な役割を果たす.

2.4.2 定義 (\mathcal{B},C) を集合 X 上の選択構造とする. (\mathcal{B},C) の直接顕示弱選好関係を R で表すとする. 自然数 $N\geq 2$ に対して次の条件を考える.

任意の $n \leq N$ に対して $x_n \in X$ であり、任意の $n \leq N-1$ に対して $x_n R x_{n+1}$ が成立し、なおかつ、 $\{x_1, x_N\} \subseteq B \in \mathcal{B}$ と $x_N \in C(B)$ が成立するなら、 $x_1 \in C(B)$ が成立する。

顕示選好の弱公理 選択構造 (\mathcal{B},C) が顕示選好の弱公理 (weak axiom of revealed preference) を満たすと は、上記の条件が N=2 に対して成り立つことをいう.

2.4 選択構造 19

顕示選好の強公理 選択構造 (\mathcal{B}, C) が顕示選好の強公理 (strong axiom of revealed preference) を満たすとは、上記の条件が任意の $N \geq 2$ に対して成り立つことをいう*1.

顕示選好の弱公理に関して直観的に説明しておこう。顕示選好の弱公理は,N=2のときに上の条件が成り立てばよいから,次のように書き直すことができる。

 $x_1, x_2 \in X$ について $x_1 R x_2$ が成立するとする. このとき, $\{x_1, x_2\} \subseteq B \in \mathcal{B}$ と $x_2 \in C(B)$ が成立するなら $x_1 \in C(B)$ も成立する.

この条件の前半部は、 x_1 と x_2 が選択肢として与えられたとき、 x_1 が選ばれることを意味している(ただし、 x_2 が選ばれなかったとは限らないことに注意). 顕示選好の弱公理は、 x_1 と x_2 を選択肢として含むどのような $B \in \mathcal{B}$ についても x_2 が選ばれて x_1 が選ばれないということはないと述べていると説明できる.ある意味で当然のことであるがゆえにむしろわかりにくいかもしれないが、じっくり確認してほしい.

顕示選好の弱公理・強公理に関する命題として,次が知られている.

練習問題 **2.4.1** (\mathcal{B},C) を集合 X 上の選択構造とする. (\mathcal{B},C) の直接顕示弱選好関係を R で表すとする. R の推移的閉包を Q と表す(すなわち,ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ と $(x_1,x_2,\ldots,x_N) \in X^N$ が存在して,任意の $n \leq N$ に対して $x_1 = x, x_N = y$,かつ $x_{n-1}Rx_n$ が成り立つとき,xQy と表す). このとき,以下を示せ.

- 1. 選択構造 (\mathcal{B},C) が顕示選好の弱公理を満たすとき、かつそのときに限り、任意の $x\in X$ と任意の $y\in X$ に対して、 xR^iy かつ $\{x,y\}\subseteq B$ なら $C(B)\cap \{x,y\}\in \{\varnothing,\{x,y\}\}\}$ が成り立つ.
- 2. R が推移的であるとき、 $Q \subseteq R$ である ($R \subseteq Q$ であることは明らかである.).
- 3. 選択構造 (\mathcal{B}, C) が顕示選好の強公理を満たすとき、かつそのときに限り、選択構造 (\mathcal{B}, C) が顕示選好の弱公理を満たし、さらに $R^s \subseteq Q^s$ (つまり、任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対して、 xR^sy なら xQ^sy が成り立つ)が成り立つ.

Q を (\mathcal{B},C) の間接顕示弱選好関係という。練習問題 2.4.1 からわかるように,直接顕示選好関係は間接選好関係に拡張できる。しかし元の直接顕示選好関係を間接顕示選好関係で弱めることはできない。つまり, $xR^{\mathrm{s}}y$ のとき, $xQ^{\mathrm{i}}y$ は決して成立しない。

最後に, 顕示選好の弱公理・強公理が満たされない例を確認しておこう.

練習問題 **2.4.2** $X = \{x, y, z\}$ とする. X 上の選択構造を (\mathcal{B}, C) と表し、特に、

$$\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\},\$$

$$C(\{x, y\}) = \{x\}, C(\{y, z\}) = \{y\}, C(\{x, z\}) = \{z\}$$

と定める.このとき、 (\mathcal{B},C) は顕示選好の弱公理を満たすが、顕示選好の強公理は満たさないことを示せ.

練習問題 **2.4.3** $X = \{x, y, z\}$ とする. X 上の選択構造を (\mathcal{B}, C) と表し、特に、

$$\begin{split} \mathcal{B} &= \{\{x,y\},\{y,z\},\{z,x\},\{x,y,z\}\}, \\ &C(\{x,y\}) = \{x\},C(\{y,z\}) = \{y\},C(\{x,z\}) = \{z\} \end{split}$$

と定める. このとき、 $(C(\{x,y,z\}))$ に関係なく (\mathcal{B},C) が顕示選好の弱公理を満たさないことを示せ.

^{*1} MWG では、顕示選好の強公理はワルラス需要関数(定義は後述)に対して定義されている。これは任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して C(B) は 1 価であるときに相当する。しかし、ここではより一般的に C(B) が対応である場合にも定義している。この点に関しては Varian, *Microeconomic Analysis* も役に立つだろう。

20 第2章 選好と選択

2.5 選好関係と選択構造の関係

この節では、これまでに見た 2 つのアプローチの関係を論じる。 \mathcal{B} を、集合 X の非空な部分集合の集合とする。ただし、 \mathcal{B} が X の全ての非空な部分集合を含むとは仮定しない。

2.5.1 定義 R を X 上の二項関係とする.任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して,ある元 $x \in B$ が存在して任意の $y \in B$ に対して xRy が成り立つとする. \mathcal{B} から X の非空な部分集合への写像 C を, $C(B) = \{x \in B \mid \text{任意の } y \in B \text{ に対して } xRy\}$ と定義する.このとき, (\mathcal{B},C) を R から構成された選択構造 (choice structure) という.

 \mathcal{B} は所与なので、実際に構成されるのは C のみである.定義 2.5.1 が有用であるのは R が反射的である ときのみである.なぜなら、もしそうでなければ、xRx が成り立たないからである.非反射的な R に対しては、次の定義を用いればよい.

2.5.2 定義 R を X 上の二項関係とする.任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して,ある元 $x \in B$ が存在して任意の $y \in B$ に対して yR^cx が成り立つ(つまり,yRx は成り立たない)とする. \mathcal{B} から X の非空な部分集合への写像 C を, $C(B) = \{x \in B \mid \text{任意の } y \in B \text{ に対して } yR^cx\}$ と定義する.このとき, (\mathcal{B},C) を R から構成され た厳密な選択構造(strict choice structure)という.

定義 2.5.1 と 2.5.2 からわかるように、任意の \mathcal{B} と選択肢集合上の任意の二項関係 R から選択構造 (\mathcal{B},C) を一意に構成することができる。それでは、任意の選択構造 (\mathcal{B},C) においても任意の $B\in\mathcal{B}$ に対し $C(B)\neq\emptyset$ が成立するとき (\mathcal{B},C) より二項関係を定義できるだろうか。残念ながら一般には成立しないが、顕示選好の強公理が満たされるときには可能である(顕示選好の弱公理だけでは一般に保証されない。).

また,二つ以上の異なる二項関係から同じ選択構造をもつことが可能であることにも注意されたい. 選好関係の性質と,その選好関係から構成された選択構造の性質の間には重要な関係がある.

2.5.3 命題 任意の推移的な二項関係から構成された選択構造は顕示選好の強公理を満たす.

命題 2.5.3 の証明

任意の $n\leq N$ に対して $x_n\in X$ であり、任意の $n\leq N-1$ に対して x_nRx_{n+1} が成立するような x_1,x_2,\ldots,x_N が存在するとする.このとき $\{x_1,x_N\}\subseteq B$ になるような $B\in\mathcal{B}$ が存在して $x_N\in C(B)$ が成立するなら、 $x_1\in C(B)$ であることを示せばよい.

C(B) の定義よりすべての $x \in C(B)$ に対し, x_NRx .R の推移性より x_1Rx_N ,したがってすべての $x \in C(B)$ に対し, x_1Rx .これと $x_1 \in B$ を合わせると $x_1 \in C(B)$

ここでは証明しないが、選出公理 (axiom of choice) を使えば次の定理によって逆も成立することがわかる.

2.5.4 定理 (Richter) 顕示選好の強公理を満たす任意の選択構造 (\mathcal{B}, C) に対して,ある完備かつ推移的な選好関係 R が存在して, (\mathcal{B}, C) は R から構成される.

これを証明することは難しい.例えば,任意の $x \in X$ と任意の $y \in X$ に対し, $\{x,y\} \in B$ のような $B \in \mathcal{B}$ が存在し,かつ $x \in C(B)$ のとき xR^*y となる二項関係 R^* を考えることはできるだろう.もし (\mathcal{B},C) を構成する R が存在するなら, $R^* \subseteq R$ であることは明らかである.しかしこの方法では R の存在 を言うには不十分である.なぜなら, xR^*y ,または yR^*x をいうためには $\{x,y\} \in B$ が存在しなければならないからである. R^* の完備性を保証する全てのペアに対しそれを含む部分集合が \mathcal{B} の中に必ず存在する

2.6 Afriat の方法 **21**

必要がある.このことは, $\mathcal B$ がある程度の大きさを持たないとならないことを意味する.一方,C(B) は非空であることを要請されている.これは $\mathcal B$ の大きさを制限する結果になる.これら二つの相反した要請は完備かつ推移的な R^* の構築を難しくする.また,X が無限集合であり得ることを否定していないことも,証明を難しくする一つの要素である.

練習問題 2.4.2 で見たように,一般に顕示選好の弱公理は Richter の定理の結論を示すには十分ではない. つまり,完備かつ推移的な選好関係の存在を示すには十分ではない. しかし, \mathcal{B} が X の 3 つ以下の元からなるすべての部分集合を含めば,顕示選好の弱公理が完備かつ推移的な選好関係の存在を示すのに十分であることが知られている. *2 さらに,このような選好関係が一意的に定まることも示される.

練習問題 2.5.1 $\mathcal B$ が X の 3 つの元からなるすべての部分集合を含み,X 上の選好関係 \succsim が完備かつ推移的であるとする.選好関係 \succsim の選択構造を $(\mathcal B,C)$ とし, $(\mathcal B,C)$ の直接顕示弱選好関係を R で表す.このとき, $\succsim = R$ を証明せよ.

2.6 Afriat の方法

本節では、Afriat (1967) によって提示された、観測された選択から元となる選好関係を復元するための代替的な方法を簡単に見ておこう。問題は、任意の $B \in \mathcal{B}$ 、任意の $x \in C(B)$ 、および任意の $y \in B$ に対して $x \succsim y$ を満たすような X 上の完備かつ推移的な選好関係 R が存在するか否かである。C(B) の元は B が利用可能であるときに実際に選ばれるものを表していると解釈できる。

この方法は前述の方法に比べ得られる情報が少ない.というのも,たしかに C(B) の元が B の最も好ましい選択肢だとわかるが B の中にそれらと同程度に好ましい他の選択肢があるかどうかはわからないからである.この違いは元の選好関係の概念を比較することでより鮮明になる.前述の方法では, $C(B) = \{x \in B \mid \text{任意の } y \in B \text{ に対して } xRy\}$ であるときに選好関係は選択構造 (\mathcal{B},C) を基礎づける.一方,Afriat (1967) の方法では $C(B) \subseteq \{x \in B \mid \text{任意の } y \in B \text{ に対して } xRy\}$ であるときに選好関係は選択構造 (\mathcal{B},C) を基礎づける.

Afriat (1967) の方法は前述の方法よりも実証研究には向いているだろう。なぜなら,家計の消費行動などのデータを手に入れることはできても,家計が同程度に好ましいと考えている他の消費が予算の中であったかどうかまではわからないからである。また,Afriat (1967) の方法の方が選好関係の存在を保証し易い。実際, $R=X\times X$ とすると,R は Afriat (1967) の意味で選択構造 (\mathcal{B},C) を構成する。したがって,Afriat (1967) の方法では,X 上で定義された完備かつ推移的であり,されに,単調性など追加的な性質をもつ二項関係が選択構造 (\mathcal{B},C) を構成するものがあるかどうかを論じることが多い。というのは,Afriat (1967) の方法は一般的な選択肢の集合ではなく,次章で取り扱うような消費集合(ユークリッド空間の非負限定など)を考察する対象とするからである.

^{*2} MWG, Proposition 1.D.2

参考文献

- [1] S. N. Afriat, The construction of utility functions from expenditure data, *International Economic Review* 8 (1967) 67–77.
- [2] John S. Chipman and others, (1971), Preferences, Utility and Demand, Harcourt Brace Jovanovic.
- [3] Peter C. Fishburn, (1970), Utility Theory for Decision Making, John Wiley and Sons.
- [4] David M. Kreps, (1988), Notes on the Theory of Choice, Westview Press.
- [5] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green, (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.
- [6] Hal R. Varian, (1992), Microeconomic Analysis, Second Edition, W. W. Norton.

第3章

消費者理論

3.1 イントロダクション

本章では古典的な消費者理論を扱う. 内容は MWG の第 2, 3 章に相当する. Debreu では以下で導入される概念のうちのいくつかについて簡潔な解説が与えられている. Kreps には、数学的な技巧も詳しく記されており、有益である.

3.2 財と財空間

財 (commodity) はその物理的な特性,またそれが消費・生産される時間や場所,そして不確実性が存在する場合にはその状態によっても区別される.

本章では L 種類の財を考える。物理的に実現可能とみなされる L 財の個数の組み合わせを財ベクトル (commodity vector),または,財バンドル (commodity bundle) といい,財バンドルの集合を財空間 (commodity space) という。全ての財の消費量を実数で表すことができると仮定すると,財空間は \mathbf{R}^L の部分集合であり,実際には財空間として \mathbf{R}^L をとることが多い。しかし,もしすべての財が非分割財であるときには財空間として \mathbf{Z}^L をとることがある。ここで \mathbf{Z} はすべての整数の集合である。実際世の中には非分割財もたくさんあるが,集団の消費の平均量を考えるときや,財そのものではなく財から得られるサービスに焦点を当てるときは非分割財でも整数でない数で表すことがしばしばある。簡単化のため,ここでは財空間は \mathbf{R}^L とする。この仮定は無限期間や連続な確率変数を排除する。

3.3 消費集合

ある消費者の消費集合 (consumption set) とは,その消費者の生存を保証することのできる財バンドルの集合である.消費集合をXで表わし,X上で消費者の選好関係が定義される.消費集合は財空間の部分集合であり, \mathbf{R}_+^L とされることが多い.しかし,ときには \mathbf{Z}_+^L や他の \mathbf{R}_+^L の部分集合とされることもある.簡単化のため,特に断らない限り $X = \mathbf{R}_+^L$ とする.消費集合上の財バンドル(財ベクトル)を消費バンドル (consumption bundle)(消費ベクトル (consumption vector))という.

3.4 選好と効用

消費者の選好関係は、今は第 2 章 2.2 節で抽象的に定義された二項関係にすぎない。そこで、ユークリッド空間 X の構造に依存する他の性質を利用する。以下の定義では、消費集合は \mathbf{R}_+^L であると仮定する。

3.4.1 定義 \succsim を消費集合 R_+^L 上の二項関係とし、その厳密な部分を \succ , 無差別な部分を \sim で表す. x と y

を任意の消費バンドルとし、 α を [0,1] 上の任意の実数とする.

単調性 $y-x \in \mathbf{R}_{++}^L$ のとき $y \succ x$ ならば、 \gtrsim は単調 (monotone) であるという.

強単調性 $y-x\in \mathbf{R}_+^L$ かつ $y-x\neq 0$ のとき $y\succ x$ ならば、 \succsim は強単調 (strongly monotone) であるという.

局所非飽和性 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $z \in X$ が存在して $||z - x|| \le \varepsilon$ と $z \succ x$ が成立するとき, \succeq は局 所非飽和 (locally non-satiated) であるという (ただし, $||\cdot||$ はユークリッドノルムを表す).

凸性 $z \in X, x \succsim z$ かつ $y \succsim z$ のとき $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim z$ が成立するならば、 \succsim は凸 (convex) であるという.

厳密な凸性 $z \in X, x \succsim z, y \succsim z, x \neq y$ かつ $\alpha \in (0,1)$ のとき $\alpha x + (1-\alpha)y \succ z$ が成立するならば, \succsim は 厳密に凸 (strictly convex) であるという.

連続性 X 上の点列 $(x^n)_{n=1}^\infty$ 、 $(y^n)_{n=1}^\infty$ に対して、すべての n について $x^n \gtrsim y^n$ を満たし、さらに $n \to \infty$ のとき $x^n \to x$ かつ $y^n \to y$ とする。もし $x \succsim y$ が成立するならば \succsim は連続 (continuous) であると いう。(ただし論文等によって用語法が違いある)

直感的に言うと、(強)単調性はより多い消費を好むことを、局所非飽和性は財空間が開集合であるとき任意の財バンドルに対してもそれより好ましい財の存在を語っている.また、(強)凸性は単一財よりも財の混合を好むことを、連続性は財の列における選好関係ははその極限においても保たれることを語っている.連続性の持たない選好関係の例の一つは、2章で勉強した辞書的選好である.任意の自然数 n において $x_n>0$ の満たし 0 に収束する数列 $\{x_n\}_n$ を定め、 $a_n=(x_n,0)$ 、 $b_n=(0,1)$ とし、 $n\to\infty$ のとき $a_n\to a$ とする.このとき、任意の自然数 n において $a_n \gtrsim b$ であるが、 $a \gtrsim b$ は成り立たない.

- **3.4.2** 注意 ここで,定義 3.4.1 についていくつか補足する.
 - 1. \succeq が凸であることは任意の $z \in X$ に対して集合 $\{x \in X : x \succeq z\}$ が凸であることと同値である.
 - 2. \succsim が効用関数 u によって表現されるとき, \succsim が凸であることは効用関数 u が準凹関数であることと同値である.
 - $3. \succeq$ が連続であることは \succeq が $X \times X$ の閉部分集合であることと同値である.
 - 4. \succsim が連続でも, \succ が連続であるとは限らない.特に,任意の自然数 n に対して $x_n \succ y_n$ でも $x \succ y$ とは限らない.
- ${f 3.4.3}$ 命題 $X={m R}_+^L$ 上の強単調な選好関係は単調であり、単調な選好関係は局所非飽和である.

命題 3.4.3 の証明 選好関係が強単調ならば単調であることは定義から直ちに従うので,単調ならば局所非飽和であることを示せばよい.任意の $x\in \mathbf{R}_+^L$ と任意の $\varepsilon>0$ について,ある $z\in X$ が存在して $\|z-x\|<\varepsilon$ かつ $z\succ x$ となることを示せばよい. $z=(x_1+\frac{\varepsilon}{L+1},x_2+\frac{\varepsilon}{L+1},\cdots,x_L+\frac{\varepsilon}{L+1})$ とおくと, $z\in X$, $\|z-x\|=\frac{\varepsilon}{\sqrt{L+1}}<\varepsilon$ が成立し,さらに $z-x=(\frac{\varepsilon}{L+1},\frac{\varepsilon}{L+1},\cdots,\frac{\varepsilon}{L+1})\in \mathbf{R}_{++}$ だから, $z\succ x$ が成り立つ. ///

命題 3.4.3 の性質は消費集合の取り方に依存している.実際,消費集合を $X=\mathbf{Z}_+^L$ と取ると単調だが,局所非飽和でない選好関係が存在する.

練習問題 $3.4.1~X=Z_+^L$ 上では単調であるが局所非飽和でない選好関係が存在することを示せ、適当に拡張を行うことによって命題 3.4.3 が真となるように単調性と強単調性を一般の消費集合 X について定義しなさい。

3.4 選好と効用 27

練習問題 3.4.2 連続な効用関数によって表現される任意の選好関係は完備,推移的,連続であることを示せ.

我々は、第2章で効用関数によって表現可能な選好関係は完備かつ推移的であるが、その逆は必ずしも成り立たないことを学んだ。では、どのようなときに逆が成り立つのだろうか。ここでは証明しないが、次の命題がこの疑問への答えである。

3.4.4 命題 任意の完備、推移的、連続な選好関係はある連続な効用関数によって表現される。

誤解しないでほしいのは、この命題は完備、推移的かつ連続な選好関係は連続な効用関数「でも」表現できることを意味しているのであって、そのような選好関係を表現する不連続な効用関数も存在しうることである。

また、選好関係に以下の仮定をおくことで効用関数の形状を限定することができる.

- **3.4.5** 定義 \gtrsim を $X = \mathbf{R}_+^L$ 上の選好関係とする. 任意の $x,y \in X$ と任意の $\alpha > 0$ に対して $x \succsim y$ ならば $\alpha x \succsim \alpha y$ が成り立つとき \succsim は相似的 (homothetic) であるという.
- 3.4.6 命題 \succeq を $X = \mathbf{R}^L_+$ 上の選好関係とする.
 - 1. u を \succeq を表現する効用関数とする. u が m 次同次ならば \succeq は相似的である.
 - 2. \succsim が相似的ならば、 \succsim は 1 次同次な効用関数によって表現される.
 - 3. \succsim が相似的ならば,任意の $x\in X$,任意の $\alpha>0$ と任意の $l\in\{1,2,\ldots,L\}$ に対して,x と $y=\alpha x$ の第 l 財の限界代替率は等しい.
- 3.4.7 定義 \succsim を $X=\mathbf{R}\times\mathbf{R}_{+}^{L-1}$ 上の選好関係とする.任意の $x,y\in X$ と任意の $\alpha\in\mathbf{R}$ に対して, $x\succsim y$ ならば $x+\alpha e^1\succsim y+\alpha e^1$ が成り立つとき, \succsim は第 1 財について準線形(quasi-linear)であるという*1.ある関数 $\phi:\mathbf{R}_{+}^{L-1}\to\mathbf{R}$ が存在し,任意の x について

$$u(x) = x^1 + \phi(x^2, \dots, x^L)$$

が成立するとき、u は第1財に関して準線形であると言う.

3.4.8 命題 消費集合 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^{L-1}$ 上の任意の選好関係 \succsim について,u を表現する第 1 財に関して準線形な効用関数が存在するとき,およびそのときに限り, \succsim は第 1 財に関して準線形である.

消費集合が $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}_{\perp}^{L-1}$ のときは、この命題は成り立たないことに注意せよ.

消費集合 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{+}^{L-1}$ 上の第 1 財に関して準線形で単調な選好関係 \succeq について, \succeq から導出されるワルラス需要を x,ヒックス需要関数を h とする.このとき任意の $p \in \mathbf{R}_{++}^{L}$, $w \in \mathbf{R}$, $\bar{u} \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ について $x(p,w+\alpha) = x(p,w) + \alpha e^{1}/p^{1}$ が成立し,ある関数 $f: \mathbf{R}_{++}^{L-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{+}^{L-1}$ が存在して任意の $p^{-1} \in \mathbf{R}_{++}^{L-1}$ と $w \in \mathbf{R}$ に対し, $x^{-1}(1,p^{-1},w) = h^{-1}(1,p^{-1},\bar{u}) = f(p^{-1})$ が成立する.ただし, $a \in \mathbf{R}^{L}$ とすると, $a^{-1} = (a^{2},\cdots,a^{L}) \in \mathbf{R}^{L-1}$ とする.

 $^{^{*1}}$ e^1 は第 1 成分が 1,それ以外の成分が 0 である L 次元ベクトルである.また,必ず一つの財に限定される概念ではない.任意 の $e\in R_+^L$ についても同様の概念が言え,そのとき消費ベクトル e について準線形という.

第3章 消費者理論

3.5 価格,富,予算集合

ここでは各財 ℓ ($\ell=1,\ldots,L$) に対して価格 p_ℓ が存在していると仮定する. p_ℓ からなる L 次元列ベクトルを p と表し、価格ベクトルと呼ぶ. 消費者の富水準 (wealth level) は(多くの場合、非負または厳密に正の)実数 w によって表される. 価格ベクトル p と富水準 w のもとで、消費者の消費集合 (budget set) は $\{x\in X\mid p\cdot x\leq w\}$ となる.

この定式化は一見単純であるが、背後には重要な仮定がおかれている。第1に、選好関係と効用関数に関係するすべての財に価格が定められている。第2に、市場は完備であり、制約となっている不等式は1本だけであるため、ある財に対する支出を減らすとその支出減少分を用いて他の財への支出を増やすことができる。特に異時点間の消費を考える場合、これは借り入れ制約が存在しないことを意味する。第3に、割り当て (rationing) が存在しない。すなわち、購入できる財の量に上限や下限が存在しない。第4に、各財の価格は財バンドルxの選び方に影響を受けないため、市場は完全競争で、消費量の選択が価格に影響を及ぼすことはないと仮定されている。

3.6 効用最大化問題

本節では,選好関係 \succsim は,連続な効用関数 u で表現されるとしよう.私達の興味の対象は, $C(\{x \in X \mid p \cdot x \leq w\}) = \{x \in X \mid \text{任意の } y \in X \text{ に対し, } p \cdot y \leq w \text{ ならば } x \succ y\}$ である.この集合の要素は以下の問題の解として特徴づけられる:

価格ベクトル p と富水準 w の下での効用最大化問題 (utility maximizing problem) は,

 $\max_{x \in X} u(x)$
subject to $p \cdot x \le w$.

と定義される.

3.6.1 命題 $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ かつ $w \ge 0$ ならば、効用最大化問題に少なくとも 1 つの解が存在する. さらに、 \succsim が厳密に凸ならば解が一意である.

命題 3.6.1 の証明 価格ベクトル p と富水準 w の下で,予算集合 $\{x \in X \mid p \cdot x \leq w\}$ は有界な閉集合,したがってコンパクト集合である.連続関数はコンパクト集合上で最大値を持つから,最大化問題の解は存在する.

次に, \succsim が厳密に凸であると仮定する.解の一意性を背理法で示そう.効用最大化問題の解 $x,x' \in X$ $(x \neq x')$ が存在すると仮定する. \succsim が厳密に凸であるから,任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して $\alpha x + (1-\alpha)x' \succ x$ かつ $\alpha x + (1-\alpha)x' \succ x'$ が成り立つ.これは $u(\alpha x + (1-\alpha)x') > u(x)$ かつ $u(\alpha x + (1-\alpha)x') > u(x')$ に他ならない.これは $x \succeq x'$ が効用最大化問題の解であることに矛盾する. ///

つまり、効用最大化問題は前章で学んだ選択構造の特集ケースである。以後では、少なくとも 1 つの解が存在すると仮定しすべての解の集合を x(p,w) と表わそう。対応 $(p,w)\mapsto x(p,w)$ を**ワルラス需要対応** (Walrasian demand correspondence) という(今後登場するヒックス需要関数と区別するためにワルラス 需要関数という。))。 \succsim が厳密に凸のとき、命題 3.6.1 よりワルラス需要対応は関数なので、**ワルラス需要関数** (Walrasian demand function) という。

3.6.2 命題 ワルラス需要対応x は以下の性質を持つ.

3.6 効用最大化問題 29

同次性 任意の $\alpha>0$ について $x(\alpha p,\alpha w)=x(p,w)$ が成立する.つまり, 0 次同次である. 余剰予算の非存在 \succsim が局所非飽和ならば,任意の $\bar{x}\in x(p,w)$ について $p\cdot \bar{x}=w$ が成立する. 顕示選好の強公理 x は顕示選好の強公理を満たす.

命題 3.6.2 の略証

同次性 価格ベクトル αp と富水準 αw の下での効用最大化問題の目的関数も予算集合も元の効用最大化問題のそれと同じだから、解も同じである.

- 余剰予算の非存在 背理法で示す. ある $\bar{x} \in x(p,w)$ が存在して $p \cdot \bar{x} < w$ となるとしよう. このとき,局所 非飽和性より \bar{x} に十分近い $y \in X$ が存在して,u(y) > u(x) かつ $p \cdot y < w$ が成立するから,矛盾を 得る.

///

- 3.6.3 命題 \succsim が厳密に凸ならば、ワルラス需要関数 x は任意の $(p,w) \in \mathbf{R}_{++}^L \times \mathbf{R}_+$ において連続である.
- **3.6.4 命題** 選好関係 \succeq とそれを表現する効用関数 u において以下が成り立つ.
 - 1. \succeq が厳密に凸ならば、任意の (p,w) において x(p,w) の元は高々一つ存在する.
 - 2. $p \in \mathbb{R}_{++}^{L}$ と $w \ge 0$ を満たし、かつ、u が連続ならば、x(p,w) は非空である.

練習問題 3.6.1 ワルラス需要関数 x が p=(0,1), w=0 において連続でないような、厳密に凸で局所非飽和な(ただし、単調でなくてもよい)消費集合 \mathbf{R}_+^2 上の選好関係の例を挙げよ.

練習問題 $3.6.2 X \neq R_{+}^{2}$ ならば、上述の連続性命題が成立しない例を挙げよ.

効用最大化問題の価値関数を**間接効用関数** (indirect utility function) といい, v で表わす. つまり, 任意の $\bar{x} \in x(p,w)$ に対して $v(p,w) = u(\bar{x})$ である.

3.6.5 命題 間接効用関数 v は以下の性質を持つ.

同次性 任意の (p, w) および任意の $\alpha > 0$ について $v(\alpha p, \alpha w) = v(p, w)$ である.

- 単調性 v は各 p_ℓ に関して非増加的であり、w に関して非減少的である. \succsim が局所非飽和ならば、v は w に関して厳密に増加的である.
- 準凸性 v は準凸である。すなわち任意の (p,w),(p',w'),(q,b) について, $v(p,w) \leq v(q,b),v(p',w') \leq v(q,b)$ かつ $\alpha \in [0,1]$ ならば $v(\alpha p + (1-\alpha)p',\alpha w + (1-\alpha)w') \leq v(q,b)$ が成立する.

命題 3.6.5 の略証

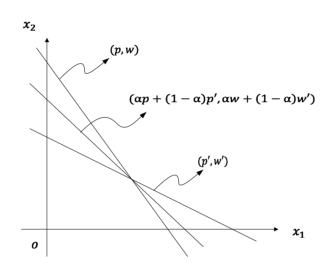
同次性 x の (0 次) 同次性から明らかである.

第3章 消費者理論

単調性 第 1 財の価格のみが上昇したときに効用水準が下がることを示せばよい。第 1 財の価格が p_1 から p_1' (> p_1) に上昇したとする。価格ベクトルを $p=(p_1,p_2,\ldots,p_L)^\top, p_1'=(p_1',p_2,\cdots,p_L)$ と書く と,予算集合について $\{x\in X\mid p_1'\cdot x\leq w\}\subseteq \{x\in X\mid p_1'\cdot x\leq w\}$ が成り立つ。したがって,間接 効用関数の定義より $v(p,w)\geq v(p_1',w)$ を得る。

富水準に関しても、同様に示せる。富水準がwからw'(>w)に上昇したとすると、予算集合について $\{x \in X \mid p \cdot x \leq w\} \subseteq \{x \in X \mid p \cdot x \leq w'\}$ が成り立つ。したがって、間接効用関数の定義より $v(p,w') \geq v(p,w)$ を得る。 \succsim が局所非飽和のときには、命題 3.6.2 のワルラス法則から厳密に増加することがわかる。

準凸性 $\bar{x} \in x(\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha w + (1-\alpha)w')$ とすると、 $u(\bar{x}) = v(\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha w + (1-\alpha)w')$ が成立する。 予算制約から $(\alpha p + (1-\alpha)p')\cdot \bar{x} \leq \alpha w + (1-\alpha)w'$, すなわち $\alpha p \cdot \bar{x} + (1-\alpha)p'\cdot \bar{x} \leq \alpha w + (1-\alpha)w'$ を得るから、 $p \cdot \bar{x} \leq w$ あるいは $p' \cdot \bar{x} \leq w'$ が成り立つ。もし $p \cdot \bar{x} \leq w$ なら、 $u(\bar{x}) \leq v(p,w)$ だから仮定 $(v(p,w) \leq v(q,b)$ とあわせて $u(\bar{x}) = v(\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha w + (1-\alpha)w') \leq v(q,b)$ が成り立つ。



v(q,b) を達成するような消費バンドルは (p,w) の下でちょうど購入できるか,もしくは購入できないので,(p,w) の予算線の境界を含む上側に存在する.同様に,v(q,b) を達成するような消費集合は,(p',w') の予算線の境界を含む上側に存在する.したがって v(q,b) を達成するような消費集合は,(p,w) と (p',w') の予算集合の和集合の境界上か,もしくは外側に存在する. $(\alpha p + (1-\alpha)p',\alpha w + (1-\alpha)w')$ の予算線は,(p,w) の予算線と,(p',w') の予算線の交点を通り,傾きはそれらの線の間にあるので,(p,w) と (p',w') の予算集合の和集合の内部に存在する.よって,v(q,b) を達成するような消費集合は, $(\alpha p + (1-\alpha)p',\alpha w + (1-\alpha)w')$ の予算線の境界を含む上側に存在する.

 $p' \cdot \bar{x} \leq w'$ の場合も同様にして示せる.

///

u が準凹でなくても v は必ず準凸であることに注意せよ.

練習問題 **3.6.3** 間接効用関数 v が準凸であることは, 任意の (q,b) について集合 $\{(p,w) \mid v(p,w) \leq v(q,b)\}$

3.7 支出最小化問題 31

が凸であることと同値であることを示せ.

3.7 支出最小化問題

前節に引き続き、本節でも効用関数 u は連続で、完備かつ推移的な選好関係 \gtrsim を表現するとしよう. 私達の興味の対象は、消費ベクトル y を所要として、以下の問題を解くことである.

$$\min_{x \in X} p \cdot x,$$
subject to $x \succeq y$.

これが費用最小化問題であるが,効用関数を使えば以下のように書かれる.

価格ベクトル p と効用水準 \bar{u} のもとでの支出最小化問題 (expenditure minimization problem) は以下のようになる.

$$\min_{x \in X} p \cdot x,$$

subject to $u(x) \ge \bar{u}.$

支出最小化問題は必ずしも消費者の現実の行動を描写するものとして考えられているわけではないが、企業行動と類似する点があり、また社会厚生の評価に使いやすいので、有用である.

3.7.1 命題 $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ かつ $u(\bar{x}) \geq \bar{u}$ なる $\bar{x} \in X$ が存在するならば,支出最小化問題の解が少なくとも 1 つ存在する. さらに \succeq が厳密に凸ならば,解は一意である.

命題 **3.7.1** の証明 命題 3.6.1 と同様にして示される.

 \bar{x} は制約条件を満たしており $(u(\bar{x}) \geq \bar{u})$, $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ であることから,支出最小化問題の解の集合の上界の一つである.また,制約条件より,下に有界であることは直ちに従う.なお,局所非飽和性の仮定より,支出最小化問題の解の集合は閉集合である.よって,支出最小化問題の解の集合はコンパクト集合である.目的関数は連続関数だから,最小化解は必ず存在する.

 \gtrsim が厳密に凸であるときに解が一意であることは、背理法で示される。支出最小化問題の解が複数存在すると仮定し、x と x' がそのうち 2 つとする。 \gtrsim が厳密に凸であるから、任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して $u(\alpha x + (1-\alpha)x') > u(x) \geq \bar{u}$ かつ $u(\alpha x + (1-\alpha)x') > u(x') \geq \bar{u}$ に他ならない。ここで、 $\beta \in (0,1)$ として、さらに β を 1 に十分近くとれば u の連続性より $u(\beta(\alpha x + (1-\alpha)x')) > \bar{u}$ かつ $p \cdot \beta(\alpha x + (1-\alpha)x') となる。これは <math>x$ と x' が支出最小化問題の解であることに矛盾する。

以後では、少なくとも 1 つの解が存在すると仮定し、すべての解の集合を $h(p, \bar{u})$ と表わす。対応 $(p, \bar{u}) \mapsto h(p, \bar{u})$ をヒックス需要対応 (Hicksian demand correspondence) という。 \succsim が厳密に凸のとき、命題 3.7.1 よりヒックス需要対応は関数なので、ヒックス需要関数 (Hicksian demand function) という。ヒックス需要関数は補償需要関数ともいう。価格の変化につれて予算集合の変動を暗に仮定し、価格の変化を"補って"基準となる効用水準を与えるような消費バンドルのセットを提示するからである。

3.7.2 命題 ヒックス需要対応 h は以下の性質を持つ.

同次性 任意の (p,\bar{u}) および任意の $\alpha>0$ に対して $h(\alpha p,\bar{u})=h(p,\bar{u})$ である。 余剰効用の非存在 $p\in \mathbf{R}_{++}^L$ かつ $\bar{u}\geq u(0)$ ならば,任意の $\bar{x}\in h(p,\bar{u})$ について $u(\bar{x})=\bar{u}$ が成立する。 補償需要法則 任意の 2 つの価格ベクトル p,p' と任意の $\bar{x}\in h(p,\bar{u})$, $\bar{x}'\in h(p',\bar{u})$ について $(p'-p)\cdot(\bar{x}'-\bar{x})\leq 0$ が成立する。

命題 3.7.2 の略証

同次性 制約条件を変えずに目的関数を定数倍しても最適解は変わらないから、明らかだろう.

余剰効用の非存在 背理法で示す.支出最小化問題の解 $x \in X$ が $u(x) > \bar{u}$ を満たすとする.このとき, $\alpha \in (0,1)$ として, α を 1 に十分近くとれば u の連続性より $u(\alpha x) > \bar{u}$,かつ $p \cdot (\alpha x) だから,<math>x$ が支出最小化していることに矛盾する.

補償需要法則(定義により) $\bar{p} \cdot \bar{x} \leq \bar{p} \cdot \bar{x}'$. よって, $\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x}) \geq 0$. 同様に, $\bar{p}' \cdot \bar{x}' \leq \bar{p}'\bar{x}$. よって, $\bar{p}' \cdot (\bar{x}' - \bar{x}) < 0$. よって, $(\bar{p}' - \bar{p}) \cdot (\bar{x}' - \bar{x}) < 0$.

///

3.7.3 注意 補償需要法則は,価格が変化したときに価格変化のベクトルと需要変化のベクトルが「反対」を向いていることを意味する.特に,ある ℓ について $p'^{\ell} > p^{\ell}$,かつ任意の $m \neq \ell$ について $p'^m = p^m$ なら,

$$(p'-p)\cdot(\bar{x}'-\bar{x}) = (p'^{\ell}-p^{\ell})(\bar{x}'^{\ell}-\bar{x}^{\ell}) \le 0$$

となるから $\bar{x}'^{\ell} \leq \bar{x}^{\ell}$ であり、ある 1 つの財の価格が上昇したとき、その財に対するヒックス需要が増加することはない、ワルラス需要では、所得効果が存在するためにこのような法則は一般に成立しない。

支出最小化問題の価値関数を支出関数 (expenditure function) といい,e で表わす.すなわち任意の (p,\bar{u}) および任意の $\bar{x}\in h(p,\bar{u})$ について $e(p,\bar{u})=p\cdot\bar{x}$ が成立する.

3.7.4 命題 支出関数 e は以下の性質を持つ.

同次性 任意の (p, \bar{u}) および任意の $\alpha > 0$ について $e(\alpha p, \bar{u}) = \alpha e(p, \bar{u})$ である.

単調性 e は各 p^{ℓ} に関して非減少的であり、 $([u(0),\infty)$ 上で) \bar{u} に関して厳密に増加的である.

凹性 e は p に関して凹である。すなわち,任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して $e(\alpha p + (1-\alpha)p', \bar{u}) \geq \alpha e(p,\bar{u}) + (1-\alpha)e(p',\bar{u})$ が成立する.

特に,支出関数の単調性は効用関数が単調性を持たなくても成立することに注意せよ.

命題 3.7.4 の略証

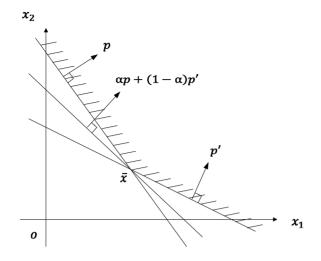
同次性 h の同次性から直ちに従う.

単調性 各 p^ℓ に関して非減少であることを示す.第 1 財の価格のみが上昇したときに支出が減少しないことを示せば良い.第 1 財の価格が p^1 から p'^1 (> p^1) に上昇したとする.価格ベクトルを $p=(p^1,p^2,\cdots,p^L)^\top, p'=(p'^1,p^2,\cdots,p^L)^\top$ と書く. $x'\in h(p',\bar{u})$ とおくと, $e(p',\bar{u})=p'\cdot x'\geq p\cdot x'\geq e(p,\bar{u})$ となる.

任意の二つの効用水準 u,u' と任意の $p \in \mathbf{R}_+^L +$ について一般性を失うことなく u' > u とし、 $x \in h(p,u)$, $x' \in h(p,u')$ とする。ヒックス需要対応の解が非空だと仮定しているので,そのような x,x' は必ず存在する。局所非飽和性より,u' = u(x') > u(x) = u である。u は連続なので,ある $\alpha \in (0,1)$ が存在し, $u(x') > u(\alpha x') > u$. ヒックス需要対応と支出関数の関係より $e(p,u) = p \cdot x$, $e(p,u') = p \cdot x'$ であり, $p \cdot x' > p \cdot \alpha x'$. また,支出関数の定義より $p \cdot \alpha x' \geq p \cdot x$. 以上より,e(p,u') > e(p,u) である.

凹性 価格 p, p' に対して $\alpha \in [0,1]$ として $\bar{x} \in h(\alpha p + (1-\alpha)p', \bar{u})$ とすると,

$$e(\alpha p + (1 - \alpha)p', \bar{u}) = (\alpha p + (1 - \alpha)p') \cdot \bar{x} = \alpha p \cdot \bar{x} + (1 - \alpha)p' \cdot \bar{x} \ge \alpha e(p, \bar{u}) + (1 - \alpha)e(p', \bar{u})$$
 を得る.これは e の p に関する凹性の定義に他ならない.



 \bar{x} によって達成される効用水準は \bar{u} なので,任意の $u(x) \geq \bar{u}$ を満たす x と任意の価格ベクトル $p,\ p'$ に対し, $p\cdot x \geq e(p,\bar{u}),\ p'\cdot x \geq e(p',\bar{u})$ が成立する。 $p\cdot x \geq e(p,\bar{u})$ より, \bar{u} の上方位集合は $(p,e(p,\bar{u}))$ より示される予算線の境界を含む上側に含まれる。同様に, \bar{u} の上方位集合は $(p',e(p',\bar{u}))$ より示される予算線の境界を含む上側に含まれる。よって, \bar{u} の上方位集合はその共通部分(図の斜線で示される部分)に含まれる。他方,価格ベクトル $\alpha p + (1-\alpha)p'$ の下で \bar{u} を達成するためには少なくとも図で $\alpha p + (1-\alpha)p'$ の法線で示される線以上の富を持たなければならない。しかし,この線は, $(p,e(p,\bar{u}))$ の予算線と $(p',e(p',\bar{u}))$ の予算線の凸結合に他ならない。

///

3.8 ワルラス需要とヒックス需要の特徴づけ

本節ではヒックス需要と支出関数、ワルラス需要と間接効用関数の間の関係について論じる。これらはそれぞれ支出最小化問題、効用最大化問題の政策関数と価値関数であるが、本節の記述から支出関数、間接効用関数はそれぞれヒックス需要、ワルラス需要の情報を含んでいることがわかるだろう。以下では、それぞれの最適化問題の解は一意に決り、そのゆえ、ヒックス需要とワルラス需要はともに関数であるとする。次の命題はこの過程を正当化する。

3.8.1 命題 任意の価格ベクトル p と任意の効用水準 \bar{u} に対して、偏関数 $e(\cdot,\bar{u})$ は p において微分可能であるとき、かつそのときに限り $h(p,\bar{u})$ は一点よりなり、

$$h(p,\bar{u}) = \nabla_p e(p,\bar{u}) \tag{3.1}$$

が成り立つ*2.

以下の証明の方法は MWG の p. 68, 69 にある 3 通りのどの方法とも異なる.

^{*2} $h(p,\bar{u})$ は一点集合だから, $h(p,\bar{u})=\{\nabla_p e(p,\bar{u})\}$ と書くべきかもしれない.しかし,一般に一点集合はその元と一対一に対応し,また記法が繁雑になることを避けるため,この記法を採用する.

第3章 消費者理論

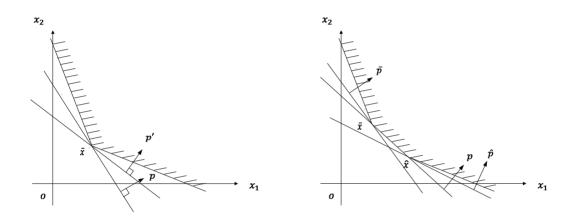
命題 3.8.1 の証明 価格ベクトル \bar{p} と効用水準 \bar{u} について,以下の最大化問題を考えよ.

$$\max_{p} \quad e(p, \bar{u})$$
 subject to
$$p \cdot h(\bar{p}, \bar{u}) \le e(\bar{p}, \bar{u}).$$

 \bar{p} がこの最大化問題の解である。Kuhn-Tucker 必要条件より, ある $\lambda>0$ が存在して $\nabla_p e(\bar{p},\bar{u})-\lambda h(\bar{p},\bar{u})=0$ である。e が p に対し 1 次同次である性質を使えば,両辺の \bar{p} との内積は $e(\bar{p},\bar{u})-\lambda e(\bar{p},\bar{u})$ である。よって $\lambda=1$ に定まり,式 (3.1) を得る. ///

3.8.2 注意 任意の価格ベクトル p と任意の効用水準 \bar{u} に対して, $h(p,\bar{u})$ が 1 価であるとき,かつそのとき限り $e(p,\bar{u})$ は p に関して微分可能である.

無差別曲線がキンク (kink) の形をしていると仮定する。キンクが一つの場合 (左図), p や p' の近傍の任意の価格ベクトルに対しても $\nabla_p e(p,\bar{u}) = \bar{x}$ がなりたつ。 $(h(p,\bar{u}) = \bar{x}, h(p',\bar{u}) = \bar{x})$ なので, $e(p,\bar{u}) = p \cdot \bar{x}, e(p',\bar{u}) = p' \cdot \bar{x}$.



キンクが複数である場合(右図)にも e が微分可能であると仮定してみよう.消費ベクトル \bar{x} に注目して考えると, $h(\bar{p},\bar{u})=\bar{x}$ なので, $e(\bar{p},\bar{u})=\bar{p}\cdot\bar{x}$ であることから $\nabla_p e(\bar{p},\bar{u})=\bar{x}$ である.この関係は \bar{p} を p に近づけても成立するので, $\nabla_p e(p,\bar{u})=\bar{x}$ が導かれる.しかし \hat{x} に注目して同様に議論を進めると $\nabla_p e(\bar{p},\bar{u})=\hat{x}$ が導かれる. $\nabla_p e(p,\bar{u})$ が一にに定まらないので,e は微分不可能である.

3.8.3 注意 命題 3.8.1 は e の p に関する微分が h に等しいことを主張している. これは価格が \bar{p} から微小な Δp だけ増加したときには,支出の変化は価格の変化分とこれまでの需要量 $h(\bar{p},\bar{u})$ との内積で表されること,すなわち

$$e(\bar{p} + \Delta p, \bar{u}) - e(\bar{p}, \bar{u}) \approx \Delta p \cdot h(\bar{p}, \bar{u})$$

となることを意味している。価格が変化するとそれに応じて需要量も変化するのであるが、pの変化が十分小さなときにはその影響を無視することができ、上の式が成立する。

3.8.4 注意 支出関数 e が p に関して微分可能ならば,e の 1 次同次性から

$$p \cdot \nabla_p e(p, \bar{u}) = e(p, \bar{u})$$

が成立する. また, e が p に関して 2 階微分可能なら, e は凹関数なのでヘッセ行列 $\nabla^2_p e(p,\bar{u})$ は負値半定符号である*3.

^{*3} $\nabla^2_p e(p,\bar{u})$ は負値定符号にはならない。 命題 3.8.1 と命題 3.8.5 から任意の p について $\nabla^2_p e(p,\bar{u})p=0$ が成立する。 $p\neq 0$ より $\nabla^2_p e(p,\bar{u})$ の階数は高々 L-1 となるため,負値定符号ではない。

3.9 双対性 35

注意 3.8.4 の前半部は、支出最小化問題

$$\min_{p} e(p, \bar{u}) \ s.t.p \cdot h(\bar{p} \cdot \bar{u}) \le e(\bar{p}, \bar{u}) \tag{3.2}$$

が $p=\bar{p}$ を解と持つことと,それによって Kuhn-Tucker 条件と e の p に対する 1 次同次性より $\nabla_p e(p,\bar{u})=h(p,\bar{u})$ であることに起因する.

これまでの議論から, 直ちに次の結果が得られる.

3.8.5 命題 偏関数 $h(\cdot,\bar{u})$ が p で連続微分可能ならば, $D_ph(p,\bar{u})$ は対称な負値半定符号行列であり,さらに $D_ph(p,\bar{u})p=0$ を満たす.

次にワルラス需要と間接効用関数の関係について見る. 命題 3.8.1 と同様に v の p に関する微分と x が関係づけられるのであるが、ワルラス需要に所得効果が存在するため、議論を修正する必要がある.

3.8.6 命題 (ロワの恒等式) 間接効用関数 v が (p,w) において微分可能ならば,

$$x(p,w) = -\frac{1}{\nabla_w v(p,w)} \nabla_p v(p,w)$$
(3.3)

が成り立つ*4.

(3.3) の右辺は $-\nabla_p v(p,w)$ と $(\nabla_w v(p,w))^{-1}$ 二つの部分からなっている. $-\nabla_p v(p,w)$ は x(p,x) が p に対して非増加であることを表している. また,(3.3) の左辺は u の選び方によらず一定であるが,v は影響を受けるので, $(\nabla_w v(p,w))^{-1}$ は u の選び方による違いを相殺して右辺が効用水準に無関になるようにしている. 証明は命題 3.8.1 のときと同様にしてできる(練習問題 3.8.1 参照). 練習問題 3.8.1 の方法は MWG の p74 にある 3 通りのどの方法とも異なる.

練習問題 3.8.1 価格ベクトル \bar{p} と富水準 \bar{w} に対し、以下の最小化問題を考えよ.

$$\min_{\substack{(p,w)\\\text{subject to}}} v(p,w),$$
subject to $p \cdot x(\bar{p},\bar{w}) \leq w.$

 (\bar{p},\bar{w}) がこの最小化問題の解であること,また最適化の Kuhn–Tucker 条件から式 (3.3) が導かれることを示せ.

3.9 双対性

本節では効用最大化問題と支出最小化問題の間の関係を見る.この2つの問題は双対問題と呼ばれ、その政策関数と価値関数の間には以下に見るような対応関係がある.

3.9.1 命題 \succsim は局所非飽和であるとする.任意の価格ベクトル $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ と富水準 w>0 に対して,

$$h(p, v(p, w)) = x(p, w),$$

$$e(p, v(p, w)) = w$$

 $^{^{*4}}x(p,w)=\left\{-rac{1}{
abla_wv(p,w)}
abla_pv(p,w)
ight\}$ と書くべきかもしれないが、繁雑さを避けるために本文の記法を参照する.脚注*2 も参照せよ.

第3章 消費者理論

が成立する. \succsim が局所非飽和でない場合でも, $w \ge e(p,v(p,w))$ は常に成立する. また, 任意の価格ベクトル $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ と効用水準 $\bar{u} \ge u(0)$ に対して,

$$x(p, e(p, \bar{u})) = h(p, \bar{u})$$
$$v(p, e(p, \bar{u})) = \bar{u}$$

が成立する. \succeq が局所非飽和でない場合でも, $\bar{u} \leq v(p, e(p, \bar{u}))$ は常に成立する.

練習問題 **3.9.1** \succsim が局所非飽和でないときに h(p,v(p,w))=x(p,w) が成立しないことと, $p\in \mathbf{R}_+^L\setminus \mathbf{R}_{++}^L, p\neq 0$ かつ w=0 だが $x(p,e(p,\bar{u}))=h(p,\bar{u})$ が成立しない例を挙げよ.

3.9.2 命題 (スルツキー分解) x と h が微分可能であるとき, 任意の価格ベクトル $\bar{p} \in \mathbf{R}_{++}^L$ と富水準 $\bar{w} > 0$ に対して, $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{w})$ とすると,

$$D_p x(\bar{p}, \bar{w}) = D_p h(\bar{p}, \bar{u}) - D_w x(\bar{p}, \bar{w}) x(\bar{p}, \bar{w})^{\top}$$

が成り立つ.

これより $D_p x(\bar{p}, \bar{w}) + D_w x(\bar{p}, \bar{w}) x(\bar{p}, \bar{w})^{\mathsf{T}}$ は対称な負値半定符号行列である.

命題 **3.9.2** の略証 双対性の恒等式 $x(p,e(p,\bar{u})) = h(p,\bar{u})$ を p で微分すればよい. ///

3.9.3 注意 スルツキー分解は次のように解釈できる.

$$D_p x(\bar{p}, \bar{w}) = \underbrace{D_p h(\bar{p}, \bar{u})}_{\text{Kffdy}} - \underbrace{D_w x(\bar{p}, \bar{w})}_{\text{Mffdy}} x(\bar{p}, \bar{w})^{\top}$$

価格変化のワルラス需要への影響を代替効果 (substitution effect) と所得効果 (income effect) に分けている.

ある財の価格の変化を考えるとき、その価格の変化が相対価格変化による変化なのか、富水準変化による変化なのかは経済分析においてしばしば重要である。前者は主に、産業構造の変化や技術の発展などによって生じる。近年、パソコンの価格は大きい幅で下がってきたが、自動車の価格はそれほど下がっていない。したがって、パソコンの自動車に対する相対価格の変化は、需要量比の変化につながる。後者の場合は、1国のマクロ的な富水準が上がることによって引き起こされる。これら二つをきれいに分けることは難しい。例えば、パソコンの性能の向上は実質値下がりに等しく、それは実質可処分所得の増加となるので富効果にもつながるからである。しかし一般に、長期経済成長を分析したいときは富効果に、産業構造の変化をみたいときは相対効果に注目する。産業構造を取り扱う産業組織論の文脈では、所得効果を0にする需要関数を用いる場合もしばしばある。

練習問題 3.9.2 $X=R imes R_+^{L-1}$ 上の選好関係 \succsim が第 1 財に関して準線形であるとする.需要関数を微分可能であると仮定して,第 ℓ (\neq 1) 財の所得効果はゼロであることを確認せよ.

3.10 諸性質のまとめ

スカラー倍に関する不変性 x と v は (p,w) に関して 0 次同次である。h は p に関して 0 次同次,e は p に関して 1 次同次である。

増加に関する単調性 v は p に関して非増加かつ w に関して非減少である. e は p, \bar{u} に関して非減少である.

任意の変化に関する合理性 x は顕示選好の強公理をみたし、v は (p,w) に関して準凸である。h は補償需要法則をみたし、e は p に関して凹である。

練習問題 3.10.1 命題 3.9.1 を用いて v の単調性と準凸性から e の単調性と凹性を導け、また e の単調性と凹性から v の単調性と準凸性を導け、ただし、単調性については \succeq の局所非飽和を仮定して良い。

3.11 価格変化による厚生変化の指標

我々は、費用最小化問題を考える際に支出関数について学んだ。本章では、支出関数を使って厚生効果を 分析する。完全競争かつ完備市場であることを仮定してきた環境で分析可能なのものは限られてくるが、そ の限られた環境の中で考えていく。

富水準 w が固定されたもとで現在の価格ベクトル p_0 が p_1 へと変化したとする.この変化は, $v(p_1,w)-v(p_0,w)>0$ が成立するとき,かつそのときに限り好ましいものである.しかし任意の効用関数 u を単調変化することで無数に多い同じ選好を表す効用関数ができるので,効用水準の差の大きさには意味がなく,そのゆえこの差を厚生の指標とすることはできない.そこで,差の大きさ自体に経済学的な意味があるような厚生の指標を考えよう.いろいろな方法があるが,その中で天下り式に一つを次に挙げる.

ここで任意の価格ベクトル \bar{p} をとる。eが効用水準に関して厳密な増加関数ならば、上の不等式は、

$$e(\bar{p}, v(p_1, w)) - e(\bar{p}, v(p_0, w)) > 0$$
 (3.4)

と同値である. 関数 $(p,w)\mapsto e(\bar{p},v(p,w))$ を $(\bar{p}$ の下での) 貨幣尺度(間接)効用関数 (money metric (indirect) utility function) という.

次の練習問題が示すように貨幣尺度効用関数は選好関係の効用関数による表現の仕方から独立である.

練習問題 3.11.1 任意の \bar{p} における貨幣尺度効用関数は,選好関係を表現する効用関数の選び方に依存しないことを示せ. すなわち, u と \hat{u} を同じ選好関係を表現する効用関数としたとき, v,e,\hat{v},\hat{e} を u,\hat{u} から導出される間接効用関数と支出関数とするとき,任意の (p,w) に対して $e(\bar{p},v(p,w))=\hat{e}(\bar{p},\hat{v}(p,w))$ が成立することを示せ.

当然のことであるが、一般に $\hat{v}(p,w)$ と v(p,w) は一致しない。また、 $(\bar{p}$ の下での)貨幣尺度(間接)効用関数は p に依存する.

 $\bar{p} = p_0$ としたとき,式 (3.4)の左辺は

$$e(p_0, \bar{u}_1) - w$$

に等しい、ただし、 $\bar{u}_1=v(p_1,w)$ である。これを富水準 w のもとでの p_0 から p_1 への変化の等価変分 (equivalent variation) といい, $EV(p_0,p_1,w)$ で表す。これは価格変化後の効用を当初の価格のままで達成 するために、消費者に与えなければならない富の値に等しい。この値が負のときは、その絶対値は、消費者 から取り去ることができる富の値に等しい。

また, $\bar{p} = p_1$ としたとき, 式 (3.4) の左辺は

$$w-e(p_1,\bar{u}_0)$$

に等しい、ただし、 $\bar{u}_0=v(p_0,w)$ である。これを富水準 w のもとでの p_0 から p_1 への変化の補償変分 (compensated variation) といい, $CV(p_0,p_1,w)$ で表す。これは当初の効用水準を変化後の価格のもとで ちょうど達成するために、消費者から取り上げることができる富水準の値に等しい*5. この値が負のとき、

^{*&}lt;sup>5</sup> Varian, *Microeconomic Analysis* による「補償は価格変化後になされるから、補償変分は変化後の価格に用いられる」という説明はこれらの定義を混同しないで覚えるのに役立つだろう.

第3章 消費者理論

その絶対値は、当初の効用水準を達成するために消費者に与えられなければならない富の値に等しい. ただし、価格の変化後もとの水準の効用が達成できるように補償をするという意味なので、価格の変化が消費者にとってわるい方向であることが暗に仮定されている.

等価変分と補償変分は一般に異なる値をとり、分析の目的に応じてより望ましい尺度を用いる必要がある.

たとえば p_0 から p_1 と p_0 から p_2 という 2 つの価格変化を考えるとき,価格 p_1 と p_2 の厚生を比較したいときには等価変分を用いる方が望ましい.なぜなら,上の設定のもとでは, $v(p_1,w)>v(p_2,w)$ と $EV(p_0,p_1,w)>EV(p_0,p_2,w)$ は同値だからである.他方,補償変分の場合にはこのような関係は成り立たない.

また、社会全体の厚生変化を見る場合には補償変分の方が望ましいことがある。実際、各自の選好を持つ消費者 $i=1,2,\ldots,I$ について、 $\sum_{i=1}^{I} CV_i(p_0,p_1,w_i)>0$ であるとき、かつそのときに限り、ある富の再配分 (t_1,t_2,\ldots,t_I) が存在し、 $\sum_{i=1}^{I} t_i=0$ かつ任意の i について、 $v_i(p_1,w_i+t_i)>v_i(p_0,w_i)$ が成立する。この結果は、 p_0 から p_1 への変化が貿易の自由化によってもたらされる場合に、それがすべての消費者の効用水準の上昇をもたらし得るかを判定するためにしばしば使われる。

3.11.1 命題 任意の p_0, p_1, w に対して,すべての $\ell \geq 2$ について $p_0^\ell = p_1^\ell$ ならば

$$EV(p_0, p_1, w) = \int_{p_1^1}^{p_0^1} h_1(p^1, p^{-1}, \bar{u}_1) dp^1,$$

$$CV(p_0, p_1, w) = \int_{p_1^1}^{p_0^1} h_1(p^1, p^{-1}, \bar{u}_0) dp^1,$$

が成立する. ただし $p^{-1}=\left(p_0^2,\ldots,p_0^L\right)=\left(p_1^2,\ldots,p_1^L\right), \bar{u}_0=v(p_0,w), \bar{u}_1=v(p_1,w)$ である.

命題 3.11.1 の証明

$$EV(p_{0}, p_{1}, w) = e(p_{0}, \bar{u}_{1}) - e(p_{0}, \bar{u}_{0})$$

$$= e(p_{0}, \bar{u}_{1}) - w$$

$$= e(p_{0}, \bar{u}_{1}) - e(p_{1}, \bar{u}_{1})$$

$$= \int_{p_{1}^{1}}^{p_{0}^{1}} \frac{\partial e}{\partial p^{1}}(p^{1}, p^{-1}, \bar{u}_{1}) dp^{1}$$

$$= \int_{p_{1}^{1}}^{p_{0}^{1}} h_{1}(p^{1}, p^{-1}, \bar{u}_{1}) dp^{1}$$

$$(3.5)$$

最後の等号は命題 3.8.1 による. 同様に,

$$CV(p_{0}, p_{1}, w) = e(p_{1}, \bar{u}_{1}) - e(p_{1}, \bar{u}_{0})$$

$$= w - e(p_{1}, \bar{u}_{0})$$

$$= e(p_{0}, \bar{u}_{0}) - e(p_{1}, \bar{u}_{0})$$

$$= \int_{p_{1}^{1}}^{p_{0}^{1}} \frac{\partial e}{\partial p^{1}}(p^{1}, p^{-1}, \bar{u}_{0}) dp^{1}$$

$$= \int_{p_{1}^{1}}^{p_{0}^{1}} h_{1}(p^{1}, p^{-1}, \bar{u}_{0}) dp^{1}$$

$$(3.6)$$

///

EV の場合と比べて基準となる効用水準が異なることに注意せよ.

他には、領域変分 (area variation) と呼ばれる次の指標も頻繁に利用される.

$$AV(p^0, p^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_0^1} x_1(p_1, p_{-1}, w) dp^1.$$

被積分関数がマーシャル需要関数であることに注意せよ。第 1 財が正常財の場合は EV > AV > CV, 劣等財の場合は CV > AV > EV の関係が成り立つ。第 1 財が正常財でも劣等財でもなく,EV と CV が等しくなるときは,EV = AV = CV となり,EV や CV の代わりに AV を使うことが正当化される.

また、支出関数とヒックシアン需要が与えられているときは CV や EV を使えるが、多くの経済分析においてはワルラス需要関数だけが与えられていることが多く、このとき EV は使えない.このとき AV を用いることがある.

一般にはこれは効用水準の変化として解釈できないが、選好関係が第1財以外のある財に関して準線形ならば、

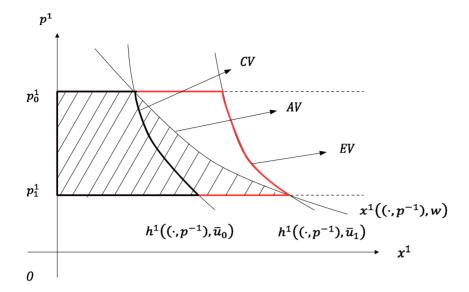
$$AV(p_0, p_1, w) = EV(p_0, p_1, w) = CV(p_0, p_1, w)$$

が成り立つ. これは以下の命題から導出される.

3.11.2 命題 準線形効用関数には所得効果がない.

産業組織論等で社会厚生を論じるときに AV がしばしば用いられるのは,部分均衡アプローチでよく行わるように所得効果をゼロと仮定するからである.第 1 財の価格が p_0^1 から $p_1^1 < p_0^1$ に下がったとする. $\bar{u}_0 < \bar{u}_1$ である.このときもし第 1 財が正常財ならば $h^1(p_1,\bar{u}_1) > h^1(p_0,\bar{u}_0)$ で,変化後のヒックス需要曲線が変化前の曲線の右側に現れる.変化前の価格の下でのヒックス需要とワルラス需要は一致するのでワルラス需要曲線はヒックス需要曲線より滑らかな傾きを持つ.(もし第 1 財が劣等財であれば変化後のヒックス需要曲線は左側に移動し,ワルラス需要曲線は急な傾きを持つ.)したがって CV , AV , EV の大きさを視覚的に表すと下の図になる.

40 第 3 章 消費者理論



参考文献

- [1] Gerard Debreu, (1987), "Theory of Value", John Wiley, and Sons.
- [2] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green, (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.
- [3] Hal R. Varian, (1992), Microeconomic Analysis Second Edition, W. W. Norton.
- [4] David M. Kreps, (2013), Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets, Princeton University Press.

第4章

生産者理論

4.1 イントロダクション

本章では古典的な生産者理論を扱う。本章で学ぶ内容では、消費者理論で使ったことをそのまま使えることが多い。そのとき、似たような議論は反復しない。消費者理論の消費者が (X, \gtrsim) で特徴づけられる選好関係を中心に展開されたように、生産者理論の生産者は生産可能性集合 Y で特徴づけられる。消費者理論の効用最大化問題は本章の利潤最大化問題に対応する。効用最大化問題では複数の無差別曲線における効用最大化を図っていたが、生産者理論では一つの生産可能性集合のみを考えるので、分析技術上より簡単である。また、消費者理論の費用最小化問題で考えた、一定効用水準を達成するための消費バンドルの組み合わせの選択は、一定生産量達成のための生産バンドルの組み合わせに対応される。また、生産可能性集合の集計 (aggregation) について学ぶ。生産集合に関する基本的な定義をいくつか述べ、利潤最大化問題と費用最小化問題を定式化する。

4.2 生産集合

財空間 \mathbf{R}^L での生産活動を描写するため, \mathbf{R}^L 上のベクトルの成分のうち産出量を正の実数,投入量を負の実数で表すという慣習に従う.技術的に可能な \mathbf{R}^L 上のベクトルの集合を生産集合 (production set) という.一つの生産集合は,一つの企業を表すと考えることができる.

任意の生産集合 $Y \subset \mathbf{R}^L$ と任意の生産バンドル $y \in \mathbf{R}^L$ に対し、 $y \in Y$ は、y で表される生産要素の投入および産出が可能であるとき、またそのときに限る。ただし、投入される要素は負の値で、生産される要素は正の値で表すことにする。

L=2のとき, $(-1,1) \in Y$, $(-1,2) \notin Y$ であることは,第1財1単位を使って第2財を1単位は生産できるが,2単位は生産できないことである.また,L=3 のとき, $(-1,-2,3) \in Y$, $(-2,-1,3) \in Y$ とすると,第3財を3単位生産するときの費用最小化問題を考えることができる.もし L=3 で, $(-1,1,1) \in Y$ とするなら,いろいろな解釈の仕方ができる.まず,第1財1単位を使って第2財と第3財を1単位ずつ生産できる結合生産に考えることができる.ここで生産財の1つを人的資本とすれば OJT にも解釈できる.また,生産財の1つを公害などに解釈すると,外部性を表すこともできる.不確実性の存在する環境を考える場面で第2財と第3財がそれぞれ異なるステートの下で与えられるあるものを指すなら,それぞれのステートのどちらでもそのものが使えるという解釈もできる.

生産集合を考えるとき、投入物が利用可能かどうかは問題とならない。例えば L=2 のとき、 $(-100,100) \in Y$ であるということは、もし 100 単位の第 1 財が投入されたならば 100 単位の第 2 財が生産できるということを表しているに過ぎない。必ずしも実際に 100 単位の第 1 財が生産に利用できるということを意味しないのである。

生産集合 Y については以下のいくつかが仮定されることが多い.

非空性 $Y \neq \emptyset$.

閉性 Y は \mathbf{R}^L の閉部分集合である.

フリーランチの不可能性 $Y \cap \mathbf{R}^{L}_{+} \subseteq \{0\}$.

無生産の可能性 $0 \in Y$.

自由可処分 $Y - \mathbf{R}^{L}_{\perp} \subseteq Y$.

不可逆性 $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$.

規模に関する収穫非増加 任意の $\bar{y} \in Y$ と任意の $\alpha \in [0,1]$ について $\alpha \bar{y} \in Y$.

規模に関する収穫非減少 任意の $\bar{y} \in Y$ と任意の $\alpha \ge 1$ について $\alpha \bar{y} \in Y$.

規模に関する収穫一定 任意の $\bar{y} \in Y$ と任意の $\alpha > 0$ について $\alpha \bar{y} \in Y$.

加法性 任意の $\bar{y} \in Y$ と任意の $\bar{y}' \in Y$ について $\bar{y} + \bar{y}' \in Y$.

凸性 Y は \mathbf{R}^L の凸部分集合である.

凸錐 Y は \mathbf{R}^L の凸錐である. すなわち,任意の $\bar{y}\in Y$ と $\bar{y}'\in Y$,任意の $\alpha\geq 0$ と $\alpha'\geq 0$ について, $\alpha \bar{y}+\alpha' \bar{y}'\in Y$ である.

多面錐 Y は \mathbf{R}^L の多面錐である。すなわち, \mathbf{R}^L の有限部分集合 $\{\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_M\}$ が存在し, $Y=\{\sum\limits_{m=1}^M\alpha_m\bar{y}_m\mid(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_M)\in\mathbf{R}_+^M\}$ が成立する.

収穫非減少は、利潤最大化の解は持たないが経済学的に重要なケースである。電気、水道など、固定費用が莫大なインフラなど、規模の経済が働く業界でみられるケースだからである。このような問題は利潤最大化問題は解を持たなくても、費用最小化問題を解くことはできる。収穫非増加は最も一般的にみられる性質である。収穫非減少と収穫非増加を同時に満たしているのが、収穫一定である。この場合、利潤は常に0となり、経済学的に分析しやすい、生産集合の最も妥当な定式化である。

一方、上で述べた、投入物の利用可能性に制限がないという仮定の下なら、加法性は必ず満たされる.任意の $y,y'\in Y$ に対し、別々の生産工程を行うことで、y+y' も生産できるはずだからである.もし工場の立地などの問題があって別々の生産ができないのであれば、それも投入量に入れるべきである.

無生産可能性は、短いスパンを分析するときは満たされないことが多い.土地や建物など長期賃貸契約、設備のリス契約などは、実際生産が行われていなくても消費される投入要素だからである.無生産可能性が満たされているということは、十分長い期間後、残存契約のないゼロベースの状態から生産を始めることができることを言う.

練習問題 4.2.1 以の主張を証明せよ.

- 1. Y が凸で無生産の可能性を満たすとき, Y は規模に関する収穫非増加である. 逆は成立しない.
- 2. Y が凸錐であることと Y が凸, 加法的, かつ無生産が可能であることとは同値である.
- 3. Y が凸錐であることと Y が加法的かつ規模に関して収穫一定であることとは同値である.
- 4. Y が多面錐ならば、Y は凸錐である。逆は L=2 のときに限り成立する。

4.3 変形関数と生産関数

生産集合は生産要素と投入要素を固定しないという点でより一般性を保つ定式化を可能にするが、消費者の選好関係でも見たように、集合そのものを用いて利潤最大化問題を解くことは難しい.

詳細は以下で見るが、企業が利潤を最大化あるいは費用を最小化するとき、生産集合は生産技術を表す方法として都合が悪いときがある。そこで、生産集合以外に次の2つが生産技術を表すときによく用いら

4.4 利潤最大化問題

れる.

4.3.1 定義 *Y* を生産集合とする.

1. 関数 $F: \mathbf{R}^L \to \mathbf{R}$ が $Y = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^L \mid F(\bar{y}) \leq 0\}$ を満たすとき, F を Y の変形関数 (transformation function) という.

45

2. 任意の $\bar{y} \in Y$ と任意の $\ell < L$ について $\bar{y}_l \leq 0$ を満たすとする. 関数 $f: \mathbf{R}_+^{L-1} \to \mathbf{R}_+$ が $Y = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^L \mid \text{任意の } l < L$ に対し, $\bar{y}^l \leq 0$ かつ $\bar{y}^L \leq f(-\bar{y}^1, \dots, -\bar{y}^{L-1})\}$ を満たすとき, $f \in Y$ の生産関数 (production function) という.

生産関数により表現可能な生産可能である生産バンドルの集合は $\mathbf{R}_{-}^{L-1} \times \mathbf{R}$ の部分集合に限られる.これより生産集合を用いた生産技術の表現がより一般的と言えるが,利潤最大化や費用最小化問題の解を求めやすくするために導入する.

4.4 利潤最大化問題

価格ベクトル p の下での利潤最大化問題 (profit maximization problem) は,以下のように定式化される.

$$\max_{\bar{y} \in Y} p \cdot \bar{y}$$

この最大化問題の解の集合を y(p) で表す. y を価格ベクトルから解 (の集合) への対応とみなしたとき、Y の供給対応 (supply correspondence) といい、特に解が一意であるときは供給関数 (supply function) という.

消費者の予算集合の場合と同様,利潤最大化問題の定式化の背後には重要な仮定がおかれている。第 1 に,市場は完備であり全ての投入財と生産財には価格が与えられている。第 2 に,利潤は 1 つの内積で表されており,仮に何期間が経過した後に生産財の売却から収入を得られるとしても期初の利潤に算入される。第 3 に,割り当ては存在せず企業は投入財と生産財を好きなだけ売り買いできると企業は想定している。第 4 に,価格は投入と生産の組み合わせ y の変化の影響を受けず,企業は投入財市場と生産財市場において価格受容的行動をとる。独占市場や寡占市場を描写するときには受け入れられない。実際,独占市場や寡占市場では企業は価格受容的ではない。

以下では利潤最大化問題の解とその価値関数の性質を見るが,効用最大化問題のそれと似ていることに気がつくだろう.性質ばかりでなくその証明も似ていることが多い.そういった性質の証明を省略する.

4.4.1 命題 生産集合 Y が非空かつ閉であり、自由処分を満たすとする. 供給対応 y は以下の性質を持つ.

同次性 任意の p と任意の $\alpha > 0$ について $y(\alpha p) = y(p)$ である.

生産の効率性 任意の $p \neq 0$ について $y(p) \subseteq \partial Y$ が成立する. ただし、 ∂Y は Y の境界とする. 供給法則 任意の p,p' と任意の $\bar{y} \in y(p)$,任意の $\bar{y}' \in y(p')$ について, $(p'-p) \cdot (\bar{y}'-\bar{y}) \geq 0$ が成り立つ.

供給法則は価格の変化と生産ベクトルの変化が同じ方向を向いていることを示している.供給の法則は消費者理論で学んだ需要の法則と似ている.消費者理論のとき,これはヒックス需要に関してしか言えない性質で,より多く使われるワルラス需要では一般に成り立たないため,使うときに注意が必要であった.他方,供給関数は生産セクターの分析で一般的に用いられるもので,使い勝手がよい.なぜ供給の法則と需要の法則で似たような法則が成立するかは,定義に使われる目的関数の形をみればわかる.

命題 4.4.1 の略証 同次性は証明しない. これは効用最大化問題のときと全く同様にして示せる.

第4章 生産者理論

効率性 背理法で示す.第 ℓ 財に関して $p^\ell>0$ とする.ある $p\neq 0$ と $\bar{y}\in y(p), \bar{y}\not\in\partial Y$ が存在するとする. このとき,ある $\bar{y}'\not\in Y$ が存在して $\bar{y}'\geq \bar{y}$ かつ $\bar{y'}^\ell>\bar{y^\ell}$ である. $p\cdot \bar{y'}^\ell>p\cdot \bar{y^\ell}$ となるから,これは \bar{y} が利潤最大化問題の解であることに矛盾する.

供給法則 任意の $\bar{y} \in y(p)$ と任意の $\bar{y}' \in y(p')$ に対して $p' \cdot \bar{y}' \ge p' \cdot \bar{y}$ かつ $p \cdot \bar{y} \ge p \cdot \bar{y}'$ が成り立つ. $p' \cdot \bar{y}' \ge p' \cdot \bar{y} \succeq -p \cdot \bar{y}' \ge -p \cdot \bar{y}$ を辺々足すと題意を得る.

///

利潤最大化問題の価値関数を Y の利潤関数 (profit function) と呼び、 π で表わす。すなわち、任意の $\bar{y} \in y(p)$ について $\pi(p) = p \cdot \bar{y}$ が成立する.

供給対応の元が複数存在するときも, 利潤関数の値は一意に定まる.

4.4.2 命題 生産集合 Y が非空かつ閉であり、自由処分を満たすとする。利潤関数 π は以下の性質を持つ。

同次性 任意の価格ベクトル p と任意の $\alpha > 0$ について $\pi(\alpha p) = \alpha \pi(p)$ が成り立つ.

凸性 π は凸関数である. すなわち, 任意の p,p' と任意の $\alpha \in [0,1]$ について $\pi(\alpha p + (1-\alpha)p') \le \alpha \pi(p) + (1-\alpha)\pi(p')$ が成り立つ.

命題 **4.4.2** の略証 同次性は効用最大化問題のときと同様にして示されるので、ここでは凸性のみ示す。任意の p,p' と任意の $\alpha \in [0,1]$ について $\bar{y} \in y(\alpha p + (1-\alpha)p')$ とする。このとき、 $\pi(\alpha p + (1-\alpha)p') = \alpha p \cdot y + (1-\alpha)p' \cdot y \leq \alpha \pi(p) + (1-\alpha)\pi(p')$ が成り立つ。 ///

4.4.3 補題 (ホテリングの補題) y(p) が p で微分可能ならば,

$$y(p) = \nabla \pi(p)$$

が成り立つ *1 .

この性質は命題 3.8.1 と同様にして示されるため、ここでは証明しない. 命題 3.8.1 と同様に、供給関数についてわかっているとき利潤関数を知ることが簡単であるが、利潤関数より供給関数を知ることができるのがこの補題のありがたみである.

4.4.4 命題 y が p で微分可能ならば, Dy(p) は対称な正値半定符号行列であり, Dy(p)p=0 を満たす.

もしy がp で微分可能ならば, $\nabla^2\pi(p)=Dy(p)$ が成立する。左辺の ∇^2 はヘッセ行列で、対称行列かつ正値半定符号である.*2軽量経済学の観点から解釈すると、右辺の生産関数を推定するとき、これらの性質を満たさない生産対応を使ってはいけないことを意味する。

同様に、ヒックス需要がpで微分可能ならば、 $\nabla_p^2 e(p,\bar{u}) = D_p h(p,\bar{u})$ の関係が成立する。この場合ヘッセ行列は対称かつ負値半定符号である。しかし、 $D_p x(p,\bar{w})$ は一般に、正値半定符号や負値半定符号ではない。その理由はスルツキー分解を吟味することでわかる。スルツキー分解によると $D_p x$ は代替効果と所得効果に分かれるが代替効果を表す $D_p h(p,\bar{u})$ は負値半定符号であっても所得効果の項については一般に成立しないからである。よって複数解が存在するなど、均衡分析において難しい点が生じる。

4.4.5 注意 任意の価格ベクトル p について、y(p) が 1 点より成るとき、かつそのときに限り π は p で微分可能である.

 $^{^{*1}}$ $y(p)=\{
abla\pi(p)\}$ と書くべきかもしれないが,繁雑さを避けるために本文の記法を参照する.第 3 章の脚注*2 も参照せよ.

 $^{^{*2}}$ 微分可能性度合いが低いとき、すなわち偏微分の順序交換ができないときには成り立たないが、成り立つと仮定する

4.5 費用最小化問題 47

4.5 費用最小化問題

Y は任意の $\bar{y} \in Y$ と任意の $\ell < L$ について $\bar{y}^{\ell} \le 0$ を満たすとし, $f: \mathbf{R}_{+}^{L-1} \to R_{+}$ を Y の生産関数とする.生産要素価格ベクトル $w \in \mathbf{R}^{L-1}$ と生産量 q の下での費用最小化問題(cost minimization problem) は以下のように定式化される.

$$\min_{\bar{z} \in \mathbf{R}_{+}^{L-1}} w \cdot \bar{z}$$
subject to $f(\bar{z}) \ge q$

費用最小化問題の解の集合を z(w,q) で表す. z を要素価格ベクトルと生産量のペア解(の集合)への対応とみなしたとき、Y への条件付要素需要対応 (conditional factor demand correspondence) という. 費用最小化問題は、生産関数が与えられたときに限って考えることが多い.

 $Y=\{ar{y}\in \mathbf{R}^L\mid ar{y}^L\leq f(-ar{y}^1,\dots,-ar{y}^{L-1})\}$ とする。 $ar{y}\in y(p)$ ならば $(-ar{y}^1,\dots,-ar{y}^{L-1})\in c(p_1,\dots,p^{L-1},y^L)$ である。つまり、利潤が最大化されているなら費用は最小化されている。しかし逆は一般に成り立たない。すなわち、 $ar{z}\in z(w,q)$ だったとしても $(-ar{z},q)\in y(w,p^L)$ が成立するような p^L が存在するとは限らない。費用最小化は利潤最大化よりも弱い条件であるが、利潤を最大化する投入ベクトル、生産ベクトルが存在しないときでも費用を最小化する投入、生産ベクトルは存在し得るという点に分析上の強みがある。

練習問題 4.5.1 Y が規模に関して収穫非減少かつ $y(p) \neq \emptyset$ のとき, $\pi(p) = 0$ を示せ.

4.5.1 命題 生産集合 Y が非空かつ閉であり、自由可処分を満たすとする.条件付要素需要対応 z は以下の性質を持つ.

同次性 任意の要素価格ベクトル w と任意の $\alpha > 0$ について $z(\alpha w, q) = z(w, q)$ である.

余剰生産物の非存在 f が連続かつ f(0)=0 を満たし, $w\in \mathbf{R}_{++}^{L-1}$ かつ q>0 ならば,任意の $\bar{z}\in z(w,q)$ について $f(\bar{z})=q$ が成立する.

条件付要素需要法則 任意の要素価格ベクトル w,w' と任意の $\bar{z}\in z(w,q)$ と任意の $\bar{z}'\in z(w',q)$ について $(w'-\bar{w})\cdot(\bar{z}'-\bar{z})\leq 0$ が成り立つ.

これらは命題 3.7.2 のときと同様にして示されるため、ここでは証明しない.

費用最小化問題の価値関数を Y の費用関数 (cost function) といい,c で表す.したがって,任意の $\bar{z} \in z(q,w)$ について $c(w,q) = w \cdot \bar{z}$ が成立する.

4.5.2 命題 生産集合 Y が非空かつ閉であり、自由処分を満たすとする. 費用関数 c は以下の性質を持つ.

同次性 任意の価格ベクトル p と任意の $\alpha>0$ について $c(\alpha w,q)=\alpha c(w,q)$ が成り立つ.

単調性 c は q と任意の w_{ℓ} について非減少である.

凹性 c は w に関して凹である。 すなわち,任意の $\alpha \in [0,1]$ と任意の q,q' について $c(\alpha w + (1-\alpha)w',q) \ge \alpha c(w,q) + (1-\alpha)c(w',q)$ が成り立つ。

これらも命題3.7.4のときと同様にして示されるため、ここでは証明しない.

4.5.3 補題 (シェファードの補題) c(w,q) が (w,q) において w に関して微分可能ならば

$$z(w,q) = \nabla_w c(w,q)$$

48 第4章 生産者理論

が成り立つ*3.

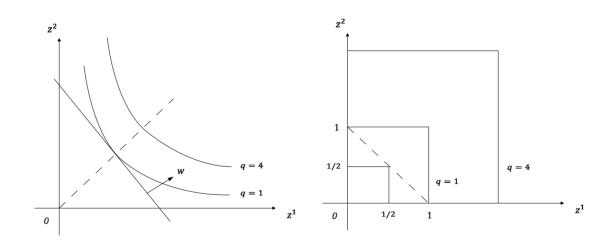
この性質は命題3.8.1と同様にして示されるため、ここでは証明しない.

4.5.4 命題 z(w,q) が (w,q) で w に関して微分可能ならば, $D_w z(w,c)$ は対称な正値半定符号行列であり, $D_w z(w,q)w=0$ を満たす.

4.5.5 注意 任意の (w,q) について,z(w,q) が 1 点集合であるとき,かつそのとき限り π は (w,q) において w に関して微分可能である.

4.5.6 例 L=3 とする. 任意の $\alpha>0$, $\beta>0$ に対して生産関数を $f(z)=f(z^1,z^2)=(z^1)^\alpha(z^2)^\beta$ とする. f は任意の γ に対して $f(\gamma z)=\gamma^{\alpha+\beta}f(z)$ を満たす. f は $\alpha+\beta>1$ のとき収穫逓増, $\alpha+\beta=1$ のとき収穫一定, $\alpha+\beta<1$ のとき収穫逓減である. f が収穫逓増であれば,この生産関数における利潤最大化の解は決して存在しない. もし \bar{y} を利潤最大化の解とすると,任意の $\gamma\geq1$ について $\gamma y\in Y$ が成立するので, $p\cdot(\gamma y)=\gamma p\cdot y$ より,利潤を無限大にすることができるので矛盾が導かれる. しかしこの場合でも,等量曲線を描いた下の図(左)からわかるように,価格ベクトル w において費用最小化の解は存在できる. この等量曲線の形は α と β の比によって決まるので, α と β が比を保ったまま変化したときは投入量をスカラ倍したとき収穫物の増加倍数が変わるだけで,等量曲線の形は変わらない.

4.5.7 例 L=3 とする. 任意の $\alpha>0$ に対して生産関数を $f(z)=f(z^1,z^2)=(\max z^1,z^2)^{\alpha}$ とする. f は $\alpha=1$ のとき収穫一定, $\alpha<1$ のとき収穫逓減, $\alpha>1$ のとき収穫逓増である. 生産財 1 単位を生産するための費用最小化解は (1,0) か (0,1) である. 両方の投入量が正の値を持つベクトルは決して解になり得ない. また,明らかに, $(1,0,1)\in Y$, $(0,1,1)\in Y$ である. この二つのベクトルの任意の凸結合,例えば(1/2,1/2,1) を考えるとき, $f(1/2,1/2)=1/2^{\alpha}<1$ なので, $(1/2,1/2,1)\notin Y$ である. したがって Y は決して凸集合にはできない.



最後に、Y が凸集合であるとき、次の二つが言えることを述べておく。第 1 に、Y は収穫非逓増である。第 2 に、生産要素平面上の等量曲線は原点に対し凸である。 2 つ目の性質は、カジュアルにいうと、同じ等量曲線上の 2 点に対し、投入要素を混ぜ合わせることが好ましいことを意味する。

^{*3} $z(w,q)=\{\nabla_w c(w,q)\}$ と書くべきかもしれないが、繁雑さを避けるために本文の記法を参照する。第 3 章の脚注*2 も参照せ よ。

4.6 生産集合集計 49

4.6 生産集合集計

J人の生産者が要る生産セクターを考える。第j番目の生産者は Y_j でで表され、各 Y_j に対し供給対応、利潤関数が定義できる。自動車業界に例えると、トヨタ、日産のみならずその下請け、孫請け会社もすべて含まれる。例えば車用エアコンを生産しトヨタに納品するデンソーも自動車業界の生産集合集計に含まれる。

この生産セクター全部の生産集合は, $Y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_J=\{\bar{y}_1+\bar{y}_2+\cdots\bar{y}_J\mid$ 任意のjに対し, $\bar{y}_j\in Y_i\}\subset \mathbf{R}^L$ で表される.一般に, $Y_1+Y_2\neq 2Y$ であることに注意せよ.

4.6.1 命題 各 Y_j と Y において供給対応を非空にする価格ベクトルの集合を P_j , P とする. すなわち $P_j = \{p \in \mathbf{R}^L \mid y_j(p) \neq \emptyset\}$, $P = \{p \in \mathbf{R}^L \mid y \neq \emptyset\}$ である. このとき以下が成立する.

- 1. $P = \bigcup_{j} P_j$
- 2. 任意の $p \in P$ に対し、 $y(p) = \sum_{i} y_{i}(p)$
- 3. 任意の $p \in P$ に対し、 $\pi(p) = \sum_{j} \pi_{j}(p)$

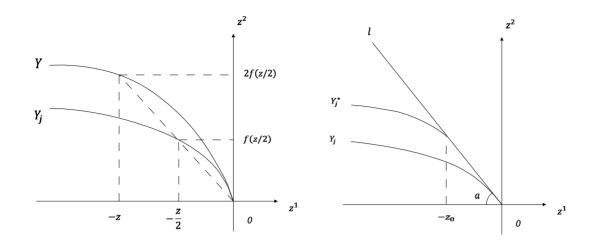
この命題において最も重要な意味を持つのは二つ目のものである。つまり,経済(生産セクター)に実際には J 社が存在するときでも生産集合 Y をもつ代表的生産者 (representative producer) が 1 社存在すると仮定したうえでの均衡の分析と大差ない。利潤最大化解の一つを \bar{y} とすると実際にはこれを $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_J$ に分解されるので全く同じではないが,経済全体の均衡を分析するときには役に立つ。

この生産集合において生産関数 f(x) は次の問題の価値関数で定義される.

$$\max_{(z_1, \dots, z_j) \in \mathbf{R}_+^J} \sum_j f_j(z_j) \quad s.t. \quad \sum_j z_j \le z$$
任意の j に対し, $z_j \ge 0$

一般に、 $f(z) \neq \sum_j f_j(z)$ であることに注意せよ. 以下では対称な生産集合の特殊ケース 3 つを挙げる.

4.6.2 例 $f_1=f_2=\cdots=f_J$ かつ $f_j''<0$ とする.また, $f_j(0)=0$ と $f_j>0$,z>0 を仮定する. f_j は凹関数なので,1 階条件が解の必要十分条件になっている.投入量の合計の上限に関する制約のラグランジュ乗数を λ_0 ,各投入量の非負制約のラグランジュ乗数を λ_j で表す.このとき任意の j に対し $f_j'(z_j)-\lambda_0+\lambda_j=0$ が成立する.まず任意の j に対し $\lambda_j=0$ であることを示す.もしある j が存在し $\lambda_j>0$ とすると $z_j=0$.よって $f_j'(0)=\lambda_0-\lambda_j<\lambda_0$.他方,z>0 なので,ある j' が存在し, $z_j>0$.相補性条件より, $\lambda_{j'}=0$ が成立し, $f_{j'}'(z_{j'})=\lambda_0$ しかしこれは f_j は凹関数であることに矛盾である.したがって任意の j に対し $\lambda_j=0$ で, $f_j'(z_j)=\lambda_0$ が成立し, $f_j'(z_j)=\lambda_0$ が成立。 でわることを示す。



J が無限大に近づくときはどうなるか。 f_j は凹関数なので $z_j=0$ のとき最大の限界生産性を持ち, z_j が大きくなるにつれ減少する。 z>0 である限り z_j は近づいていくが 0 にはならない。したがって J が無限大にいくとき生産集合は右図の半直線 l の下の部分を含むが l は含まない。このとき生産集合は閉集合でない。

ここである z_0 が存在し, $z_j < z_0$ の領域においては収穫一定な生産集合の場合を考える.そのときは J が十分大きくなるにつれ各企業は $z_j < z_0$ 以下の投入量で生産を行うので,集計生産集合は l を含む閉集合になる.

4.6.3 例 $f_1 = f_2 = \cdots = f_J$ かつ $f_j'' = 0$ の場合を考える. すなわち収穫一定の場合である. j に対し $\lambda_j = 0$ で, $f_j'(z_j) = \lambda_0$ というところまでは前の議論と同様だが,収穫一定なので $\sum_j z_j = z$ を満たす任意の (z_1, z_2, \cdots, z_J) が解である. このとき $f = f_j$, $Y = Y_j$ が成立つ.

4.6.4 例 $f_1=f_2=\cdots=f_J$ かつ $f_j''>0$ の場合を考える. すなわち収穫逓増の場合である. このときは任意の j と任意の $j'\neq j$ に対し $z_j=z$, $z_{j'}=0$ が解になる. このとき $f=f_j$, $Y=Y_j$ が成り立つ.

上記の3つのケースの中でYが拡張するケースは収穫逓減の場合のみである。企業の数が大きくなるにつれ競争が激しくなり、その結果生産量や価格が変化することはあるかもしれないが、生産技術は変わらない。非対称な生産集合の集計は難しい、その簡単な例を以下に示す。

4.6.5 例 J=2 で, $f_1''=0$ < f_2'' とする.まず任意の z>0 に対し $f_1(z)>f_2(z)$ の場合を考える.これは,ある $z_2>0$ が存在し, $f_1'=a$ とするとき $a>f_2'(z_2)$ のケースである.この時の最大化解は (z,0) となり, $f(z)=f_1(z)$, $Y=Y_1$ である.次に,任意の z>0 に対し $f_1(z)<f_2(z)$ の場合を考える.これは,ある $z_2>0$ が存在し, $f_1'=a$ とするとき $a\leq f_2'(z_2)$ のケースである.この時の最大化解は (0,z) となり, $f(z)=f_2(z)$, $Y=Y_2$ である.難しいのは,ある $z_1>0$ に対し $f_1(z_1)\leq f_2(z_1)$,ある $z_1'>0$ に対し $f_1(z_1')\geq f_2(z_1')$ の場合である.つまり,ある $z_2>0$ と $z_2'>0$ が存在し, $a<f_2'(z_2)$, $a>f_2'(z_2')$ のケースである.このとき,ある $z^*>0$ が一意に存在し, $f_1(z^*)=f_2(z^*)$ である.この時の最大化解は 2 つ存在する.まず $z>z^*$ のときは (z,0) が, $z<z^*$ のときは (0,z) が最大解である. $z=z^*$ のときは (z,0) と(0,z) がどれも最大解である.両方の投入量が正になる最大解は存在しない.このケースで特集なのは上でみてきたケースとは違く生産の割り当てに連続性が満たされていない点である. $z<z^*$ の領域では規模の経済が働く程の生産量にはなっていないからである.このように収穫逓増性が存在する生産集合を扱うときは,価格を限界費用に等しくする均衡(marginal cost pricing equilibrium)の形成ができなかったり複数均衡が存在したりするので均衡分析に困難が出る.

それでは生産者を集計するように消費者を集計することは可能だろうか、生産者 j が Y_j で表されるように、消費者 i は (\succsim_i, w_i) より表される、もし各々の消費者の総需要量を自らの需要量と一致させる消費者、つまり、 $\sum_i x_i(p,w_i) = x(p,\sum_i w_i)$ が成立する消費者が存在するならその消費者を代表的消費者 (representative consumer) と呼んで良いだろう、ダイナミックマクロ経済モデルではこのような消費者の存在を前提に議論を進めることが多い、しかし一般には、そのような代表的消費者は存在しない。

ワルラス需要でなくヒックス需要を考えるときには、消費者の集計は生産者の集計とほぼ同様である。 \bar{u}_i を固定した上でヒックス需要より消費者の需要を集計する場合、各消費者の上方位集合 $A_i = \{x \in X_i \mid u_i(x) \geq \bar{u}_i\}$ は生産者の生産集合に対応する。生産集合の集計の場合と同様に、 $A = \sum_i A_i = \{\sum_i x_i \in \bigcup_i X_i \mid \text{任意の } i \text{ に対し}, u_i(x_i) \geq \bar{u}_i\}$ とする。もし個々の A_i が凸集合ならば集計した A も、凸集合である。この場合全体のヒックス需要量は $\sum_i h(\cdot, \bar{u}_i)$ に一致する。

しかしワルラス需要を用いるとこの議論は適用できない。ターゲットとなる効用水準 \bar{u}_i が変わると A_i が変わり,したがって A の形が変わる.問題は,他の基準効用水準における A とその境界が交わるときに生じる.その場合は無差別曲線が交わることになるので,代表的消費者を定義できない.逆に言うと,個人個人が個々の \bar{u}_i を変えても無差別曲線が交わらない選好を持っていれば代表的消費者は存在する.その十分条件を次に記す.

- 1. 消費者 I 人全員の選好関係が第1財について準線形である.*4
- 2. 消費者 I 人全員が同一な相似的選好を持つ.

任意の i の選好は $u_i: \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^{L-1} \to \mathbf{R}$, $u(x) = x^1 + \phi(x^2, \cdots, x^L)$ の形で表現できる. 初期の効用水準 $\bar{u}_{i0} = 0$ とし,それに対応する上方位集合を A_{i0} とする.上方位集合の集計を A_0 とする.ある別の効用水準 \bar{u}_i に対応する上方位集合は,準線形効用関数の性質より $A_i = A_{i0} + \{\bar{u}_i e\}$ で表すことができる.これら \bar{u}_i に対応する上方位集合の集計は, $\sum_i A_i = \sum_i (A_{i0} + \{\bar{u}_i e\}) = (\sum_i A_{i0}) + \{(\sum_i u_i)e\}$ である.右辺の第 2 項のみが \bar{u}_i に依存していることに注目してほしい. A は A_0 を第 1 財の軸に沿って $\sum_i \bar{u}_i$ だけ平行移動したものである.したがって任意の二つの集計した上方位集合は必ず一方が他方の部分集合になる.

共通の 1 次同次な効用関数を u で表す。u(0)=0 とする。A を $\bar{u}=1$ に対応する上方位集合とすると, $A=\{x\in \mathbf{R}_+^L\mid u(x)\geq 1\}$ である。任意の \bar{u}_i に対応する上方位集合は $\{x\in \mathbf{R}_+^L\mid u(x)\geq u_i\}=\bar{u}_iA$ である。これら \bar{u}_i に対応する上方位集合の集計は, $\sum_i A_i=\sum_i \bar{u}_iA=(\sum_i \bar{u}_i)A$ が成立し,A を $(\sum_i \bar{u}_i)$ 倍した集合である。したがって任意の二つの集計した上方位集合は必ず一方が他方の部分集合になる。

4.7 企業は利潤を最大化するか

消費者が選好や効用を最大化するという仮定に比べ、企業が利潤を最大化するという仮定は疑わしい部分がある。実際、企業を保有あるいは経営する人もまた消費者であり彼らは彼らの効用を最大化しているため、利潤最大化は必ずしも目的とされない.*5では、どのようなときに利潤最大化という仮定は正当化されるのだろうか。次の命題は利潤最大化と効用最大化が同じになるための条件を与えている。

4.7.1 命題 企業の生産集合を Y とし、消費者の間接効用関数 v は富水準に関して厳密に単調増加し、消費者は企業の利潤に対するシェア $\theta \in (0,1)$ を保有しているとする。生産計画 $\bar{y} \in Y$ が選ばれれば、価格ベクトル \bar{p} と企業の利潤から得られる富を除いた消費者の資産 \bar{w} の下での消費者の効用水準は $u(\bar{p},\bar{w}+\theta\bar{p}\cdot\bar{y})$

^{*4} 当然のことであるが,必ず第1財である必要はない.消費者全員が共通の財について準線形な選好を持つことで十分である.

^{*5} 例えば、企業の株主が利潤最大化を望んだとしても、経営者が株主と異なるときには経営者は利潤を最大化するとは限らないことが知られている。不確実性などの要因により、利潤が要素投入量、経営者の努力水準(これも生産要素の一種と考えられる)のみでは決まらない場合、もし実際に投入された努力水準ンを株主など直接には経営に携わらない人々が観察(認知)できないならば、経営者は利潤を最大化する努力を怠り、利潤を最大化させるとは限らないからである。この問題はプリンシパル・エージェント問題として知られている。

第4章 生産者理論

に等しい. もし \bar{p} と \bar{w} が生産計画 $\bar{q} \in Y$ の選び方に依存しないなら,2つの最大化問題

$$\max_{\bar{y}\in Y}\bar{p}\cdot\bar{y},$$

および

 $\bf 52$

$$\max_{\bar{y} \in Y} v(\bar{p}, \bar{w} + \theta \bar{p} \cdot \bar{y}) \tag{4.2}$$

の解は一致する.

命題 4.7.1 の証明 間接効用最大化問題 $\max_{\bar{y}\in Y}v(\bar{p},\bar{w}+\theta\bar{p}\cdot\bar{y})$ を考えよう。仮定より生産計画 \bar{y} の選び方は \bar{p} に影響せず,さらに v は富水準に関して厳密に単調増加するから,間接効用の最大化は $\bar{w}+\theta\bar{p}\cdot\bar{y}$ の最大化と同値である。さらに,生産計画 \bar{y} の選び方は \bar{w} にも影響せず,シェア θ は 0 より厳密に大きいから,これは結局 $\bar{p}\cdot\bar{y}$ の最大化と同値である。 ///

次に,価格ベクトル \bar{p} が生産計画 $\bar{y} \in Y$ の選び方に依存し,さらに富水準 \bar{w} は価格ベクトル \bar{p} に依存する場合を考えよう.この関係をp(y) と $w(\bar{p})$ によって表そう.生産計画 $\bar{y} \in Y$ が選ばれたとき,消費者は効用水準

$$u(p(\bar{y}), w(p(\bar{y})) + \theta p(\bar{y}) \cdot \bar{y})$$

を得るから、消費者にとって最も望ましい生産計画は次の最大化問題の解である.

$$\max_{\bar{y} \in Y} v(p(\bar{y}), w(p(\bar{y})) + \theta p(\bar{y}) \cdot \bar{y}). \tag{4.3}$$

ここで、vが、

$$v(\bar{p}, \bar{w}) = \frac{\bar{w}}{\beta^1 \bar{p}^1 + \dots + \beta^L \bar{p}^L}$$

と表され, 任意の \bar{p} について $w(\bar{p}) = 0$ であるとしよう. このとき,

$$v(p(\bar{y}), w(p(\bar{y})) + \theta p(\bar{y}) \cdot \bar{y})$$

$$= \theta \frac{p(\bar{y}) \cdot \bar{y}}{\beta^1 p^1(\bar{y}) + \dots + \beta^L p^L(\bar{y})}$$

$$= \theta \left(\frac{1}{\beta^1 p^1(\bar{y}) + \dots + \beta^L p^L(\bar{y})} p(\bar{y}) \right) \cdot \bar{y}$$

$$(4.4)$$

が成り立つ. したがって、消費者は企業が消費ベクトル $(\beta_1, \ldots, \beta_L)$ が価値基準財となるような価格ベクトルについて利潤を最大化することを望む. 一般に、最大化問題 (4.3) の解は $(\beta^1, \ldots, \beta^L)$ の選び方に依存する.

練習問題 4.7.1 以下を間接効用関数とする直接効用関数を求めよ.

$$v(\bar{p}, \bar{w}) = \frac{\bar{w}}{\beta^1 \bar{p}^1 + \dots + \beta^L \bar{p}^L}$$

$$(4.5)$$

同一の企業の株を保有している 2 人の消費者がいるとしよう.株の保有率は異なっていても構わないが,企業の利潤とは関係なく得られる富水準 w は等しいとしよう.また,前節で定義された (β_1,\ldots,β_L) に関して 2 人は異なるとしよう.この場合には,消費者はそれぞれ異なる生産計画を好むかもしれず,利害が対立し得る.

たとえば、L=2 で、第 1 財を投入財、第 2 財を生産財とし、生産集合 Y は生産関数 f で表されるとしよう。 さらに、第 1 消費者の間接効用関数を w/p_1 とし、第 2 消費者の間接効用関数は w/p_2 とする。つま

り,第 1 消費者の (β_1,β_2) は (1,0) であり,第 2 消費者の (β_1,β_2) は (0,1) である。このとき,式 (4.4) にこれらを代入すれば,第 1 消費者は企業が以下の問題を解く投入量を選ぶことを好むことがわかる。

$$\max_{z_1 \ge 0} \frac{p_2(-z_1, f(z_1))}{p_1(-z_1, f(z_1))} f(z_1) - z_1$$

一方,第2消費者は企業が以下の問題を解く投入量を選ぶことを望む.

$$\max_{z_1 \ge 0} f(z_1) - \frac{p_1(-z_1, f(z_1))}{p_2(-z_1, f(z_1))} z_1$$

これらの解は一般に異なるため、2人の間で利害が対立することがわかる*6.

^{*6} このように複数の株主がいる場合は、複数のプリンシパルがいるときのプリンシパル・エージェント問題に相当する.

参考文献

[1] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

第5章

不確実性下の意思決定

5.1 イントロダクション

本章では不確実性下での消費者の選好と選択を定式化する.ここでは独立性公理,期待効用関数,リスク回避度,確率支配などの概念を導入する.

証券市場や金融市場では株式や債券などが取引の対象になる.しかし財を消費することで効用を得た,今までの設定とは違く,一般的に株式や債券そのものからは効用を得られない.多くの場合選好の対象になるのは,それらから得られる利回りである.それらのリターンには不確実性が存在するため,不確実な確率変数についての選考について学ぶ必要がある.

本章の内容は MWG の第6章, Rubinstein の第8章, Kreps[3] の第5-6章に対応する.

なぜ第3章に加えてこの章が必要なのか?例えば証券市場ではトヨタ株価日本国債などが取引の対象だが、それらそのものに効用があるとは考えにくい。それから得られる所得(収入)が効用を生むのだが、その額は往々にして不確実である。そこで、「不確実な消費量」に対する選好を定式化・分析する必要がある。それが本章の目的である。

5.2 くじの定義

5.2.1 定義 (単純くじ) $C=\{1,\ldots,N\}$ を帰結 (consequence) の集合とする。このとき,C 上の任意の確率分布,すなわち各 $n=1,\ldots,N$ に対して $p_n\geq 0$ が成り立ち,かつ $\sum_n p_n=1$ を満たす N 次元ベクトル (p_1,\ldots,p_N) を単純くじ (simple lottery または単にくじ lottery) と呼ぶ。また,単純くじの集合を $\mathcal L$ で表す.

簡単のためここで C は R 上の有限集合を仮定する.この仮定により,正規分布などの連続的な確率分布は排除される.我々の興味の対象は L 上で定義される選好関係である. 2 章では扱われなかった性質を吟味したい.

すなわち、単純くじとは有限個の値に確率 1 を与える確率測度 *1 である。もし $C \subseteq \mathbf{R}$ ならば、これは累

5.2.2 定義 集合 Ω の部分集合からなる集合 $\mathcal F$ が以下の性質を満たすとき, $\mathcal F$ を σ -加法族 (σ -algebra) という.

- 1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
- 2. 任意の $F \in \mathcal{F}$ について $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}$.
- 3. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $F_n \in \mathcal{F}$ なる任意集合列 $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ について $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$.

5.2.3 定義 Ω 上の σ -加法族 $\mathcal F$ 上で定義された非負実数値関数 $P:\mathcal F\to \mathbf R_+$ が以下の条件を満たすとき, P を確率測度 (probability measure) という.

^{*1} この講義ノートでは測度論の知識は要求しない. 測度論になじみのない読者は確率測度空間を確率の定義された空間, 確率測度を確率分布などに置きかえて理解してほしい. 測度論については Billingsley[1] などを参照せよ. 以下では確率測度の定義を述べておく.

積分布関数で表される.

有限個の単純くじを商品とするようなくじは複合くじと呼ばれる.

5.2.4 定義 (複合くじ) *L* の任意の有限部分集合上の確率分布を複合くじ (compound lottery, または逐次くじ sequential lottery, 二段階くじ two-stage lottery) と呼ぶ.

たとえば、K を正の整数, $L_1, L_2, \ldots, L_K \in \mathcal{L}$ を K 本の単純くじ, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$ を各 $k=1, \ldots, K$ に対して $\alpha_k \geq 0$,かつ $\sum_k \alpha_k = 1$ となるような K 次元ベクトルとする.

このとき、任意の $k=1,\ldots,K$ に対して L_k に確率 α_k を付与する確率 分布は複合くじである。この複合くじを、

$$\begin{array}{c|c} p_1^p & \square \\ \hline \\ L_2 & \vdots \\ \hline \\ p_N^2 & \square \\ \hline \\ L_K & \vdots \\ \hline \\ p_N^K & \square \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_K \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_K \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

と書く.

以下で詳しく説明するが単純くじの確率分布 (p_1, \dots, p_N) と複合くじの確率分布はいずれも(主観的でななく)客観的に与えられていると解釈するのが一般的である。

5.2.5 定義 (単純化くじ) 複合くじ (5.1) において,

$$L_k = (p_1^k, p_2^k, \dots, p_N^k)$$

と書くと、 $\left(\sum_k \alpha_k p_1^k, \dots, \sum_k \alpha_k p_N^k\right)$ は単純くじである.これを $\alpha_1 L_1 \oplus \dots \oplus \alpha_K L_K$ と書き、複合くじ (5.1) の単純化くじ (reduced lottery) と呼ぶ.

 α_k はくじ L_k が選ばれる条件なし確率, p_n^k はもしくじ k がもらえた場合帰結 n が選ばれる条件付確率である.帰結 n が選ばれる条件なし確率は $\sum_k \alpha_k p_n^k$ で表される.当然のことであるが任意の n において $\sum_k \alpha_k p_n^k$ は [0,1] 上の値をとり,合計は 1 となる.単純化くじは複合くじから導かれた単純くじであって,複合くじそのものとは異なることに注意されたい.複合くじは 2 段階構造を持つくじで,単純化くじは帰結集合上の確率分布のみに着目したものである.我々が注目するくじに対する選好は $\mathcal L$ 上で定義されていたことを思い出してほしい.複合くじは 2 段階になっていてその選好の定義上では分析できないが,単純化くじに表現することによって既存の枠組みの中で分析できるようになる.

練習問題 **5.2.1** $C = \{1, 2, 3\}$ を帰結の集合とする. 3 つの単純くじ L_1, L_2, L_3 を,

$$L_1 = (1, 0, 0),$$

 $L_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$
 $L_3 = (0, 0, 1)$

と定める. このとき, ある $\alpha \in [0,1]$ とある $\beta \in [0,1]$ に対して,

$$\alpha L_1 \oplus (1 - \alpha)L_2 = \beta L_3 \oplus (1 - \beta)L_4$$

が成立するような単純くじ L_4 が満たすべき必要十分条件を求めよ.

このとき, (Ω, \mathcal{F}) をあわせて可測空間 (measurable space) といい, (Ω, \mathcal{F}, P) をあわせて確率測度空間 (measure space) という. Ω が有限集合であるとき, (Ω, \mathcal{F}, P) を有限確率測度空間と呼ぶ.

^{1.} $P(\emptyset) = 0$.

^{2.} 互いに排反な集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ $(i\neq j$ ならば $E_i\cap E_j=\varnothing)$ について $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(E_n)$.

^{3.} $P(\Omega) = 1$.

5.3 独立性公理 59

練習問題 5.2.2 $S=\{1,2\}$ を状態 (state) の集合, $C=\{1,2,3\}$ を帰結の集合とする.状態 1 と 2 はいずれも確率 1/2 で生起すると仮定する.S から C への関数を行為 (act) と呼ぶことにする.行為 f の下で帰結 n をとる状態の数を $|f^{-1}(n)|$ で表すとすると,f が定める C 上の確率分布は,

$$\left(\frac{|f^{-1}(1)|}{2}, \frac{|f^{-1}(2)|}{2}, \frac{|f^{-1}(3)|}{2}\right)$$

である. これを f が定める単純くじと呼び、 L_f と表すことにする. 行為 f と g に対し、もし $(1/2)f(s)+(1/2)g(s)\in C$ が任意の $s\in S$ に対して成立するならば、この行為を (1/2)f+(1/2)g で表す. このとき、

$$L_{\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g} = \frac{1}{2}L_f \oplus \frac{1}{2}L_g$$

が成立しないような行為 fと gの例を挙げよ.

5.3 独立性公理

以下の分析では、 \succsim を単純くじの集合 $\mathcal L$ 上の完備性と推移性を満たす選好関係とする *2 . また \succsim の連続性を $\mathcal L$ に合わせた形で修正したものを仮定する

特に断らない限り、確率は客観的確率とする. 主観的確率であっても理論を構築することは可能である.

5.3.1 独立性公理の定義

5.3.1 定義 (独立性公理) 任意の $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ と任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して, $L \succsim L'$ が成立することと $\alpha L \oplus (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' \oplus (1-\alpha)L''$ が成立することが同値であるとき, \succsim は独立性公理 (Independence Axiom) を満たすという.

単純くじの集合 $\mathcal L$ の上で定義された選好関係 \succsim に独立性公理を課すことは,以下のように正当化される.独立性公理と同様に $L,L',L''\in\mathcal L$ と $\alpha\in[0,1]$ を考える.次に,複合くじ 1 を $\begin{pmatrix}L&L''\\\alpha&1-\alpha\end{pmatrix}$,複合くじ 2

まず,以下の事実を確認しておこう.

5.3.2 命題 $(u_1, \cdots, u_N) \in \mathbf{R}^N$ とし, $U: \mathcal{L} \to \mathbf{R}$ を $U(L) = \sum_{n=1}^N p_n u_n$ (ただし, $L = (p_1, \cdots, p_n)$)と定義する.もし \mathcal{L} 上の選好関係 \succsim が U で表現されるならば succsim は独立性公理を満たす.

 $^{*^2}$ 単純くじは確率測度(あるいは同じことだが確率分布)であり、したがって単純くじの集合 $\mathcal L$ は確率測度の集合であり、そして集合 $\mathcal L$ の上で定義された選好関係 \succsim は確率測度に対する二項関係である.つまり、第 2 章の定式化における選択肢の集合 X は、ここでは確率分布の集合である.後で見るように、選好関係 \succsim は帰結の分布のみに依存し、各々の帰結がどのような状態で実現するかには依存しない点が重要である

以下の議論では逆を示す. 以上の議論は,以下の前提に基づいている.

- 1. そもそも意思決定者が確率を認知している.
- 2. 単純くじの集合 \mathcal{L} 上で定義された選好関係 \succsim は C に属する各帰結が与えられる確率にのみ依存し、どのような状態や経緯で達成されるかには依存しない.特に,複合くじの好ましさ(効用水準)を評価するにあたり,第 1 段階で選ばれる単純くじに関わる不確実性と第 1 段階で選ばれた単純くじがどの帰結を与えるかという第 2 段階での不確実性は全く同様に考慮される.
- 3. 複合くじの好ましさを評価するにあたり, 第1段階で異なる事象において得られる単純くじの間には, 補完的な関係は存在しない.

以下では、これらの考えかたが妥当かどうかについて例を挙げて検討していこう。実は、これらの前提の それぞれに対して、反例が存在する。上に掲げた順に見ていくことにしよう。

5.3.2 独立性公理に対する反例

5.3.3 例 (エルスバーグのパラドックス (Ellsberg paradox)) 次のような 2 つのつぼを考える. どちらにもボールが 100 個入っているが、つぼ A には赤 50 個、白 50 個のボールが入ってることがわかっている一方で、つぼ B には赤と白がそれぞれいくつ入っているかはわからないとする. ここで仮に意思決定者は、つぼ B には赤 x 個、白 (100-x) 個のボールが入っていると想定しているとしよう.

ここで、次のような実験をする。まず、赤が出たときのみ 1 万円獲得できるとした場合、多くの人はつぼ A を好む(つぼ A \succ つぼ B)という結果が出る。このとき人々は、

$$\frac{50}{100} > \frac{x}{100} \Longrightarrow x < 50$$

と考えているはずである.

次に、白が出たときのみ 1 万円を獲得できるとした場合、このときも、多くの人はつぼ A を好む(つぼ $A \succ$ つぼ B)という結果が出る、つまり人々は、

$$\frac{50}{100} > \frac{100 - x}{100} \implies x > 50$$

と考えているはずである.しかし,もし上述の仮定のように,意思決定者が赤x個,白(100-x)個のボールが入っていると想定しているならば,これは先ほどの結果と同時には起こりえない.

実験では、このような矛盾する結果が観察される。これは、人々が不確実性に直面して選択をする際に、必ずしも確率を念頭に置いていないことを示しており *3 、上述の前提 1 への反例になっている。そのときもちろん独立性公理は成立しない。x は任意なので、主観的確率の場合でも矛盾が導かれる。この例によって、そもそも確率を所与にして考える独立性公理の弱点が示される。確率的洗練の性質も持っていない。

この例でのキーは、つぼ2が持つ曖昧さ (ambiguity) である。上の例ではつぼBの赤に対する信念がただ 1 つ存在すると仮定していた。Gilboa & Schmeidler は、複数の確率的信念をもって実現される利得の最小値をもたらす信念を採用する意思決定者を提案した。その意思決定者は 3 つのシナリオ $(x=49\ mathbb{m}\ x=50\ mathbb{m}\ x=51)$ を持っているとする。今の状況は 4 つのくじで表現できる。 $a\in\{A,B\}$, $b\in\{R,W\}$ とし L_{ab} を つぼ a の中でボールを出して色が b であれば 1 万円がもらえるくじとする。ただし b=R は赤のボールに、b=W は白のボールに対応する。何ももらえなかったときに得られる効用を u(0)=0 とし、 1 万円を獲得したときに得られる効用を u(10) とする L_{BR} を選ぶ時の期待効用は、 $\min_{x\in\{49,50,51\}}\frac{x}{100}u(10)=\frac{49}{100}u(10)$ である。 L_{BW} を選ぶ時の期待効用も同様に、 $\min_{x\in\{49,50,51\}}\frac{x}{100}u(10)=\frac{49}{100}u(10)$ である。くじ L_{AR} と L_{AW} の期待効用はどれも $\frac{1}{2}u(10)$ なので、このような信念体系は $L_{AR} \succ L_{BR}$ かつ $L_{AW} \succ L_{BW}$ を表す

 $^{^{*3}}$ すると、そもそも選好 \succsim をくじの集合上に定義するのが不適切であることになる.

5.3 独立性公理 61

選択を正当化する. しかし以下で示すように合理性にかけている. コインを投げ,表がでたら L_{AR} がもらえ,裏がでたら L_{AW} がもらえる複合くじ CL_A と,表がでたら L_{BR} がもらえ,裏がでたら L_{BW} がもらえる複合くじ CL_B を考える. L_{AR} を L_{BR} より好み, L_{AW} を L_{BW} より好む人なら CL_A を好むはずである. この複合くじの単純化くじを考えると, CL_A は 1/2 の確率で 1 万円がもらえるくじになる. 一方, CL_B の単純化くじで 1 万円をもらえる確率は $\frac{1}{2}\frac{x}{100}+\frac{1}{2}\frac{100-x}{100}=1/2$ である. つまり, CL_A の単純化くじとと CL_B の単純化くじは同程度に好ましいはずではる. このような合理性の欠如のためこの信念体系は政策の決定や厚生経済の分析には向いていない.

5.3.4 例 (状態依存効用関数 (state-dependent utility)) 前提 $2 \land 0$ 反例として,効用関数が状態に依存する場合は,独立性公理が満たされないことを確認するために,次の $2 \lor 0$ の例を見ていこう.

はじめの例は、かさやアイスクリームに対する効用は天気という状態に依存するために、独立性公理が満たされない状況を示すものである.明日の天気の確率が、

$$\left\{\begin{array}{cc} \textbf{晴れ} & 50\,\% \\ \textbf{雨} & 50\,\% \end{array}\right.$$

で与えられているものとする.帰結の集合は $C = \{ \text{ かさ}, \text{アイスクリーム} \}$ とし,次のような状態依存くじ L_1, L_2 を考える.

$$L_1 = \left\{ egin{array}{ll} {\it T} {\it T}$$

通常われわれは晴れの日にアイスクリームを、雨の日にかさを欲しがると考えられるから、 $L_1 \succ L_2$ が成立する。ところが、2 つの確率変数が導入する単純くじは同じで、ともに (0.5,0.5) である。もし選好関係 \succsim が独立性公理を満たすなら、 $L_1 \sim L_2$ が成立するはずである。したがって \succsim は独立性公理を満たさない。かさやアイスクリームに対する効用が状態依存的であるためである。

帰結に財のみではなく翌日の天気という状態まで含むべきだという意見もある. 論理的に正しい主張だが、帰結の集合を広げすぎると経済学的分析に難しい点が生じるので、独立性公理についての弁論として強いとは言えない.

次に、くじの賞金に対する効用が雇用状態によって変わるために独立性公理が満たされない例を見ていこう. 労働者は来期に 50 % の確率で解雇されるとし、2 つのくじを、

$$L_1 = \left\{ egin{array}{ll} 20\ {
m eta} & ({
m FR}\ {
m can}
ight. \end{array}
ight. , \quad L_2 = \left\{ egin{array}{ll} 0\ {
m P} & ({
m FR}\ {
m can} {
m c$$

とする. いずれのくじからも確率 50% で賞金 20 万円が得られ、確率 50% で何も得られないにもかかわらず、通常は $L_1 \succ L_2$ が成立すると考えられ、独立性公理が満たされない. ここで独立性公理が満たされないのは、くじ以外から得られる所得が雇用状態によって異なるためであり、そのためくじから得られる賞金に対する効用もまた雇用状態によって異なるからである.

もし雇用されたときに受け取る賃金をw万円とすると, L_1 と L_2 はそれぞれ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 20\ \mathrm{万円} & (\mathbf{m}\mathbf{R}$$
されたとき) $\left\{ \begin{array}{ll} 0\ \mathrm{H} & (\mathbf{m}\mathbf{R}$ されたとき) $\left\{ \begin{array}{ll} 0\ \mathrm{H} & (\mathbf{m}\mathbf{R}$ されないとき) \\ \left(20+w\right)\ \mathrm{5H} & (\mathbf{m}\mathbf{R}されないとき) \\ \end{array} \right.

という総所得を与える。何も持っていないときに獲得できる 20 万円は,w 万円持っているときに獲得できる 20 万円よりも効用を大きく増加させる。つまり,限界効用の観点からも L_1 が L_2 より望ましい。収入の一部のみを表すくじについては独立性公理は成立しないが,このように総所得を表すくじについては独立性公理が満たされる可能性がある。

5.3.5 例 (帰結主義 (consequentialism)) 父と 2 人の娘アリスとバーバラが無人島にいるとする. 娘 2 人が同じ病気にかかったが、その病気に効く薬は 1 人分しかない. このとき、帰結の集合は、

$$C = \{A, B\}$$

である.ここで A はアリスに投薬すること,B はバーバラに投薬することを表す.くじの集合の中には,確率 1 でアリスが助かるくじと確率 1 でバーバラが助かるくじの間で父親は無差別である.つまり,

$$(1,0) \sim (0,1)$$

が成立しているとする. しかし, ここで, 父は運を天にまかせ, どちらの娘に薬を与えるかをコインを投げて決めるほうを好むとする. つまり,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \succ (1, 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \succ (0, 1)$$

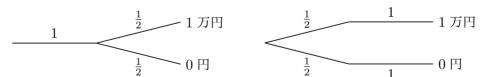
が成立しているとする. このとき, 独立性公理は満たされない. なぜなら,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1, 0) \oplus \frac{1}{2}(0, 1)$$
$$(0, 1) = \frac{1}{2}(0, 1) \oplus \frac{1}{2}(0, 1)$$

が成立するが, $(1,0)\sim(0,1)$ より,独立性公理が満たされるならば $((1/2),(1/2))\sim(0,1)$ が成立するからである.この原因は,上述の独立性公理の依拠する前提 3,すなわちくじを生む手続きが選好には全く影響しないと仮定する点にある.

5.3.6 例 (情報開示のスピード (speed of information revelation)) 帰結の集合を $C = \{1 \text{ 万円}, 0 \text{ 円}\}$ とし、以下のような 2 つの複合くじを考えよう.

複合くじ 1 (下図の左) は実現する単純くじの分布に不確実性がなく,確率 1/2 で 1 万円が獲得でき,確率 1/2 で 0 円になる単純くじが,確率 1 で実現するようなくじとする.複合くじ 2 (下図の右) は実現する単純くじに不確実性がなく,必ず 1 万円が獲得できる退化した単純くじが確率 1/2 で実現し,必ず 0 円になる退化した単純くじが残りの確率 1/2 で実現するようなくじとする.



2つの複合くじから得られる単純化くじは全く同じ (1/2,1/2) であり、独立性公理が成立するならば、2つの複合くじは同程度に好ましい。しかし、くじ 2 はくじ 1 よりも早い段階で、獲得できる賞金の額が明らかになるため、意思決定者によっては、くじ 2 をくじ 1 よりも選好する可能性がある* 4 . このようなときは独立性公理は成立しない。このことは上述の前提 4 への反例になっている。

情報開示のスピードに効用が依存するケースの分析に対しては、再帰的 (recursive) 効用関数が考えられている.

^{*4} これは、ふつうは情報開示は早いほうがありがたいという判断による.一方で、遅いほうがありがたいような例も考えることができて、たとえば夏休みに旅行に行くというときに、期末試験に落第していることがはっきりしてしまったあとで旅行に行くより、わからないほうが楽しめる、ということは考えられるだろう.いずれにせよ情報開示のスピードが問題になるような状況は独立性公理の成立に不利な証拠となっている.

5.3 独立性公理 63

5.3.7 例 (心理的な負の補完性) 前提 3 に関する反例として、補完性のある例を考えてみよう. 帰結の集合が、

$$C = \{ \,$$
ベネチアへの旅行,ベネチアに関する映画を見る,家にいる $\}$

で与えられるとする. 通常は, $(1,0,0) \succ (0,1,0) \succ (0,0,1)$ が成立する. Machina (1987) は,

$$(0.99, 0, 0.01) \succ (0.99, 0.01, 0)$$

という選好を持つ人がいる可能性を紹介し、その場合は独立性公理が満たされないことを指摘した。 単純くじ(0.99,0,0.01)は、

$$\left(\begin{array}{ccc}
(1,0,0) & (0,0,1) \\
0.99 & 0.01
\end{array}\right)$$

という複合くじの単純化くじ $(0.99)(1,0,0) \oplus (0.01)(0,0,1)$ に等しい。同様に、(0.99,0.01,0) は、

$$\left(\begin{array}{ccc}
(1,0,0) & (0,1,0) \\
0.99 & 0.01
\end{array}\right)$$

という複合くじの単純化くじ $(0.99)(1,0,0) \oplus (0.01)(0,1,0)$ に等しい.

2つの複合くじを比較すると、確率 0.99 で単純くじ (1,0,0) が実現する点では共通しており、確率 0.01 でそれぞれ (0,1,0) と (0,0,1) が実現する点で異なっている。 すでに述べたように、通常は (0,1,0) \succ (0,0,1) が成立し、もし独立性公理が満たされるならば、 $(0.99)(1,0,0)\oplus(0.01)(0,1,0)$ \succ $(0.99)(1,0,0)\oplus(0.01)(0,0,1)$,すなわち (0.99,0.01,0) \succ (0.99,0,0.01) が成立するはずである。 したがって、 Machina が紹介した選好は独立性公理を満たしていない。

それでは、Machina が紹介したような選好を持つのはどのような人なのであろうか。 Machina による説明では、その人は、通常は家にいることよりもベネチアに関する映画を見ることのほうが好ましいと考えているが、非常に高い確率 (0.99) で行けるはずだったベネチアへ旅行できなくなったという状況の中では、ベネチアに関する映画を見ることに苦痛を感じ、むしろ家にいるほうが望ましいと考えているのである。

つまり C の要素の間には物理的な補完性は存在しないが,心の中には負の補完性があり,(1,0,0) が実現するかどうかが,(0,1,0) と (0,0,1) の選好に影響を与えているのである.逆に言えば,独立性公理とは,C の要素の間には物理的の補完性が存在しないことに基づき,心理的な補完性もないことを要請するのである.

また、補完性については次のような需要理論の例と対比すると分かりやすいだろう.

2 財を右足用の靴と左足用の靴とする. 効用関数 $u(x)=\min\{x_1,x_2\}$ が表す選好関係を \gtrsim とし, x=(4,4),y=(10,2),z=(2,10) とおく. x では靴は 4 足, y では 2 足できるので, $x \gtrsim y$ (実は $x \succ y$) が成立する.

このとき、2 次元ベクトルの凸結合として (1/2)x+(1/2)z と (1/2)y+(1/2)z を定義すると、(1/2)x+(1/2)z に成立するだろうか。(1/2)x+(1/2)z は成立するだろうか。(1/2)x+(1/2)z にない。(1/2)x+(1/2)z にない。(1/2)x

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(4,4) + \frac{1}{2}(2,10) = \frac{1}{2}(6,14) = (3,7)$$
$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(10,2) + \frac{1}{2}(2,10) = \frac{1}{2}(12,12) = (6,6)$$

となり、前者からは 3 足、後者からは 6 足の靴が得られる。したがって、 $(1/2)x+(1/2)z \gtrsim (1/2)y+(1/2)z$ は成立せず(実は $(1/2)y+(1/2)z \succ (1/2)x+(1/2)z$ が成立する)、独立性公理が満たされない。ここで独立性公理が満たされない原因は、右足用の靴と左足用の靴は同時に消費され、2 財の間に補完的関係が存在する点にある。

5.3.8 例 (アレーのパラドックスの数値を変えた例) 賞品の集合が、

$$C = \{500$$
 万円, 100 万円, 0 円 $\}$

で与えられる場合に、次の4つのくじについて考えてみよう.

$$\begin{cases}
L_1 = (0, 1, 0) \\
L'_1 = (0.1, 0, 0.9)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
L_2 = (0, 0.01, 0.99) \\
L'_2 = (0.001, 0, 0.999)
\end{cases}$$

多くの人の選好関係 \succsim は $L_1 \succ L_1'$ と $L_2' \succ L_2$ を満たすが、このような選好関係は独立性公理を満たさない、実際、 $L_3=(0,0,1)$ とすると、

$$L_2 = 0.01L_1 \oplus 0.99L_3,$$

 $L'_2 = 0.01L'_1 \oplus 0.99L_3.$

よって, $L_1 \succ L_1'$ と $L_2' \succ L_2$ がともに成立するならば,独立性公理は満たされない.

 L_1 と L_1' を比較すると, L_1 は確実に 100 万円を与えるのに対して, L_1' が与える賞金は 500 万円のときもあれば 0 円のときもある. つまり L_1 は L_1' よりもリスクが小さい. 他方, L_2 と L_2' に対応する複合くじは,いずれも確率 0.99 で L_3 を与え,この場合は賞金はゼロである.残りの確率 0.01 で,それぞれ L_1 と L_1' を与える.

 $L_1 \succ L_1' \ \ \, \geq L_2' \succ L_2'$ がともに成立するということは、確率 0.99 で賞金がゼロになることがわかると、人々はより大きなリスクをとることを厭わなくなるということである。このとき、例 5.3.7 で述べた心理的補完性が存在し、したがって独立性公理は満たされない。

この節を終えるにあたって,上のアレーのパラドックスの数値例につけ加える形で,独立性公理を課すことの便利さに触れておこう.上と同じ L_1,L_1' と,新たな単純くじ $L_4=(1,0,0)$ との混合を考える.その単純化くじはそれぞれ,

$$0.01L_1 \oplus 0.99L_4 = (0.99, 0.01, 0),$$

 $0.01L'_1 \oplus 0.99L_4 = (0.991, 0, 0.009)$

となる.

これが左辺のような混合くじから得られたことをいったん忘れて、右辺の 2 つの単純くじのあいだの比較を考えてみよう。これらはどちらも、99% ないし 99.1% という非常に高い確率で500 万円が得られるが、残りのわずかな確率で少額の帰結が実現するものである。

この解釈としては,わずかな確率で起こる大災害への備えという見方ができる.すなわち,はじめ 500 万円の資産をもっている人が,前者のくじの状況では,1 % の確率で 100 万円になる,すなわち 400 万円の損害を被る.後者のくじの状況では,もう少し小さい 0.9 % の確率で,しかし全財産を失う.つまり,前者では相対的に大きな確率で小さな損失を被るという一方,後者では小さな確率で大きな損失を被る.あるいは,後者の状況から前者の状況に移ることは,場合によって(確率 1% で)は,400 万円の保険料を払って全資産(500 万円)を失う状況を避けることにあたる.

この 2 つの状況のどちらがよいか(全資産を失う確率を引き下げる支出を行うべきか)という判断はこのままでは難しい。ところが,もし意思決定者の選好が独立性公理に従うならば,その選択は,実は L_1 と L_1' とのあいだの選択に等しい,ということを上の計算は示している。すなわち,もし意思決定者が独立性公理を検討してこの公理に従いたいと思うならば,(0.99,0.01,0) と (0.991,0,0.009) とのあいだの比較は,(0,1,0) と (0.1,0,0.9) とのあいだの,より簡単な比較に帰着されるし,またされなければならない,ということである。これは独立性公理の規範的な用いかたであり,独立性公理が有用だと考えられる点である。

5.4 期待効用定理 65

独立性公理で主張しているようなことを需要理論ではどう捉えられるだろうか.ベクトル空間上での独立性公理は次のようになる.「任意の $x,y,z\in \mathbf{R}_+^L$ と任意の $\alpha\in[0,1]$ に対し, $x\succsim y$ ならば,またそのときに限り $\alpha x+(1-\alpha)z\succsim \alpha y+(1-\alpha)z$ が成立する.」しかしこれはあまりもっともらしい仮定ではないのでこのような仮定をおいた経済分析は望ましくない.例えば L=2 としレオンチェフ型の選好を考える.この選好を表す効用関数を $u(x^1,x^2)=\min\{x^1,x^2\}$ とする.x,y,z を 3 つの消費バンドルとし $x=(4,4),\ y=(10,2),\ z=(2,10)$ とする.簡単のため, $\alpha=1/2$ とする.このとき $x\succ y$ である.しかし $u(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z)=u(3,7)=3,\ u(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z)=u(6,6)=6$ なので, $\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\succ\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ で,上の命題は成立しない.なぜくじの世界では妥当にもみえた仮定がここでは成り立たないのか.上記の例では二つの消費ベクトルは一定比率で同時に消費されるのでそれらの間に補完性が存在し得る.しかしくじの場合,一つの帰結がもらえると片方の帰結はもらえないので,複数の帰結の間に補完性が存在しないからである.もちろん,今までのケースでみたように物理的補完性は存在しなくても,心理的補完性が存在する場合は独立性公理が成立しない.

5.4 期待効用定理

5.4.1 定理 (期待効用定理 (Expected Utility Theorem)) \succsim を $\mathcal L$ 上の選好関係とする. \succsim が完備性, 推移性, 連続性, 独立性公理を満たすことと, ある $(u_1,\ldots,u_N)\in \mathbf R^N$ が存在して, 任意の $L=(p_1,\ldots,p_N)\in \mathcal L$ および $L'=(p_1',\ldots,p_N')\in \mathcal L$ に対して, $L\succsim L'$ のときまたそのときに限り,

$$\sum_{n=1}^{N} p_n u_n \ge \sum_{n=1}^{N} p_n' u_n$$

が成立することとは、同値である.

この定理で、 $\sum_{n=1}^N p_n u_n$ は L が定める効用水準の期待値であるから、下記の U は期待効用関数と呼ばれ、その存在を保証するこの定理は期待効用定理と呼ばれる.

ベクトル $(u_1,\ldots,u_N)\in \mathbf{R}^N$ を所与としたとき、関数 $U:\mathcal{L}\to\mathbf{R}$ を任意の $L=(p_1,\ldots,p_N)\in\mathcal{L}$ に関して、

$$U(L) = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n$$

と定義すると, $L \succsim L'$ と $U(L) \ge U(L')$ が成立することは同値なので, \succsim を表す効用関数はくじに関して線形である.線形性を要請しなければ, \succsim を表す連続な効用関数の存在は \succsim の完備性,推移性,連続性のみで保証される.したがって,独立性公理が効用関数に課す条件とは線形性に他ならないことを期待効用定理は意味している.

定理 5.4.1 の略証

- (i) $N<\infty$ かつ \succsim が連続性を満たすことより,ある \bar{L} と \underline{L} とが存在して,それぞれ任意の L に対して $\bar{L}\succsim L, L\succsim \underline{L}$ を満たす. \bar{L} と \underline{L} は,それぞれ最も好ましいくじと最も好ましくないくじである. $\bar{L}\sim \underline{L}$ ならば, $u_1=\cdots=u_N$ とおくことで証明は完了するので, $\bar{L}\succ \underline{L}$ を仮定する.
- (ii) 任意の *L* に対して,

$$L \sim \alpha \bar{L} \oplus (1 - \alpha) \underline{L}$$

となるような唯一の $\alpha \in [0,1]$ が存在する.この α を U(L) と書くことにする.これによって,任意 の L を \bar{L} と L を結ぶ線分上に限定して議論を進めることができる.

 α の存在は連続性から、一意性は $\bar{L} \succ L$ の仮定より言える.

(iii) \succeq が独立性公理を満たすことから、任意の $L, L' \in \mathcal{L}$ および $\alpha \in [0,1]$ について、

$$U(\alpha L \oplus (1 - \alpha)L') = \alpha U(L) + (1 - \alpha)U(L')$$

が成立する.これは性質は U の線形性に類似している.線形性ではない理由は, α の範囲が [0,1] に制約されているからである.

(iv) 任意の n = 1, ..., N に対して,

$$u_n = U((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$$

と定義する.右辺の (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) は,n 番目の要素だけが 1 で他はすべて 0 であるようなベクトルであり,n 番目の帰結を確率 1 で得られるようなくじを表している.このとき,任意の L に対して,

$$U(L) = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n$$

が成立する.

///

各帰結が確率 1 で実現されるときの効用水準 (u_1, \cdots, u_N) は,フォンノイマン・モルゲンシュテルン関数と呼ばれる.金額でなく効用水準の期待値を考えるべきだという主張は, $17\sim18$ 世紀からベルヌーイなどによって言われていた.Hersein と Milnor はより一般的なフレームワークの中で独立性公理から上記略証の (iii) まで導出した.(iii) までの結果を,教科書によっては Mixture theorem とも呼ぶ.彼らは混合空間(を変形したもの)を公理化した.

略証の (iv) は彼らとは違う背景から発展されてきた.ここでは C を有限集合と仮定しているため,議論は簡単に済んだ.

練習問題 5.4.1 以上の証明の各ステップを補い、証明を完成せよ.

練習問題 5.4.2~U が $((p_1,\cdots,p_N)$ に関して)線形ならば, \succsim は完備性,推移性,連続性,独立性公理を満たすことを証明せよ.

期待効用定理によって存在が保証される期待効用関数は,一意ではない.実際,U を期待効用関数, α を任意の正の実数, β を任意の実数としたとき, $V=\alpha U+\beta$ で定める関数 V は,U と同じ選好関係を表現する.すなわち, $U(L)=\sum_n p_n u_n$ とし,任意の n について $v_n=\alpha u_n+\beta$ と定め, $V(L)=\sum_n p_n v_n$ と定義すれば,U と V は同じ選好関係を表現する.逆に, $U(L)=\sum_n p_n u_n$ と $V(L)=\sum_n p_n v_n$ が成立し,なおかつ U と V が同じ選好関係を表すなら, $\exists \alpha>0, \exists \beta\in \mathbf{R}: V=\alpha U+\beta$ が成立する.すなわち, $\forall n: u_n=\alpha u_n+\beta$ が成立する.第 2 章や第 3 章では,同一の選好関係を表す 2 つの効用関数は互いの単調変換であることを主張してきたが,ここでは単なる単調変換ではなく,線形変換であることが重要である.これは U と V に (p_1,\cdots,p_N) による線形性を課したことによる.

5.5 リスク回避度とその比較

5.5.1 確実同値額とリスク回避度の比較

5.5.1 定義 \gtrsim_1 と \gtrsim_2 を \mathcal{L} 上の選好関係とする. \gtrsim_1 が少なくとも \gtrsim_2 と同程度にリスク回避的 (at least as risk averse as) とは,任意の $L, L' \in \mathcal{L}$ に対し,L' が一つの帰結に確率 1 を与えているならば,すなわち $L' = (p'_1, \cdots, p'_N)$ に対しある n が存在し $p'_n = 1$ ならば, $L \gtrsim_1 L'$ は $L \gtrsim_2 L'$ を意味することを言う.

以下では、 \succsim_1 が少なくとも \succsim_2 と同程度にリスク回避的であるとき、 \succsim_1 ALARAA \succsim_2 と表す。 ALARAA は、 \mathcal{L} 上の選好関係の集合上の二項関係である.この二項関係は、反射的かつ推移的であるが、 完備的ではない.しかし経済分析では、完備であるように選好関係の集合を縮約する場合も多い.エクイティプレミアムパズル(Equity premium puzzle)の分析やダイナミックマクロのマーケットデータの推定では、狭い選好関係の集合を選び、選好関係のリスク回避度にランクが可能なように扱っている.

今の ALARAA の定義だと,ある 2 つの選好関係が ALARAA 関係を満たすかを調べるためには任意の $L \in \mathcal{L}$ と任意の退化くじ $L' \in \mathcal{L}$ について成立することを確認しなければならないので,使い勝手が悪いという短所がある.

 $C\subseteq \mathbf{R}$ ならば、くじは累積分布関数と同一視できる.また (u_1,\cdots,u_N) は $u:C\to \mathbf{R}$ と同一視できる.u をベルヌーイ効用(Bernoulli function あるいは felicity function)という.すると,これまで $\sum_n p_n u_n$ と書いてきたものは、積分の形では $\int_C u(x) \, \mathrm{d} F(x)$ と書ける.さらに F が表す C 上の確率測度を P とおくと,これは, $\int_C u(x) \, \mathrm{d} P(x)$ と書ける.もし明示的に確率分布が F で与えられる確率変数 X が存在するならば,これは E(u(X)) とも書ける.u は連続で厳密に増加関数であると仮定する.

 $C \in \{R, R_+, R_{++}\}$ とする.帰結の集合を実数の区間とすれば抽象度は上がり,今まで見たきた Ellsberg の曖昧さの回避の話題にも通用する上に,動学的不整合性 (dynamic inconsistency) の度合いも比較可能である.

連続で厳密に増加関数であるようなすべてのu からなる集合を U^0 で表し,C に含まれるコンパクトな台を持つすべてのボレル確率測度からなる集合を P^* で表す *5 .

5.5.2 命題 (確実同値額) 任意の $u \in \mathcal{U}^0$ と任意の $P \in \mathcal{P}^*$ について,

$$u(x) = \int_C u(z) \, \mathrm{d}P(z)$$

を満たすような $x \in C$ がただ 1 つだけ存在する*6. このとき x は,P の u に対する確実同値額 (certainty equivalent) と呼ばれる.

命題 5.5.2 の証明

$$\bar{c} = \max \operatorname{supp} P \in C$$

$$\underline{c} = \min \operatorname{supp} P \in C$$

$$E[u(z)] = \int_C u(z) \, \mathrm{d}P(z) = \int_C u(z) \, \mathrm{d}F(z) = \int_C u(z) f(z) \, \mathrm{d}z$$

と表される.

^{**5} 測度論になじみのない読者はこの部分については,確率測度 P が表す確率分布の累積分布関数として,C を定義域とし,ある $[\underline{c}, \bar{c}] \subset C$ が存在して $F(\underline{c}) = 0$, $F(\bar{c}) = 1$ となるような F のみを考えるとすれば十分である.

 $[\]mathcal{B}$ を C の開集合を含む最小の σ -加法族とするとき、確率測度空間 (C,\mathcal{B},P) はボレル確率測度空間という。ボレル確率測度空間 (C,\mathcal{B},P) に対して、確率測度 P の台とは $P(C\setminus F)=0$ となる最小の閉集合 F のことである。

 $^{^{*6}}$ P を表す確率分布の累積分布関数を F とし、また密度関数 f が存在するとする. このとき u(z) の期待値は

とする. このとき,

$$u(\underline{c}) \le \int_C u(z) \, \mathrm{d}P(z) \le u(\bar{c})$$

が成立する. u が連続だから、中間値の定理より、 $u(x)=\int_C u(z)\,\mathrm{d}P(z)$ を満たすような $x\in[\underline{c},\bar{c}]$ が存在する. また u は厳密な増加関数であるから、そのような x は C 上でも一意に定まる. ///

確実同値額 x は、c(P,u) と書く. これは $u^{-1}\left(\int_C u(z) \,\mathrm{d}P(z)\right)$ に等しい.

5.5.3 注意 確実同値額は正アフィン変換に関して不変である。すなわち,任意の $u \in \mathcal{U}^0$ と,その $\alpha > 0, \beta \in \mathbf{R}$ による正アフィン変換 $v = \alpha u + \beta$ を考えたとき,任意の $P \in \mathcal{P}^*$ について,c(F, u) = c(F, v) が成立する。実際,正アフィン変換によって写る 2 つの効用関数は同じ選好を表現するのであるから,根本 にある選好が同じであるにもかかわらず,くじ P の確実同値額が同じ選好の 2 つの期待効用表現 u, v で異なると都合が悪いはずであり,それが同一であるという前述の主張はぜひとも成り立っていてほしい性質である。これが実際に成り立っていることを確認しよう。

 $v = \alpha u + \beta \, \tilde{\kappa} h \, \tilde{b}$

$$\int_C v(x) dP(x) = \int_C (\alpha u(x) + \beta) dP(x) = \alpha \int_C u(x) dP(x) + \beta$$

である。ところで,確実同値額の定義から,最右辺では $\int_C u(x)\,\mathrm{d}P(x)=u(c(P,u))$ であり,同じく最左辺は $\int_C v(x)\,\mathrm{d}P(x)=v(c(P,v))$ である。v の定義をふたたび使うと,後者は $\alpha u(c(P,v))+\beta$ に等しい.以上をまとめると,

$$\alpha u(c(P, v)) + \beta = \alpha u(c(P, u)) + \beta$$

が成立することがわかるが,

$$u(c(P, v)) = u(c(P, u))$$

であるが、u が厳密な増加関数であることから、c(P,v)=c(P,u) がしたがう.

5.5.4 定義 $u_1, u_2 \in \mathcal{U}^0$ とする. 任意の $P \in \mathcal{P}^*$ について, $c(P, u_1) \leq c(P, u_2)$ が成立するならば, u_1 は u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的である (u_1 is at least as risk averse as u_2) という.

5.5.5 注意 注意 5.5.3 と関連するが、確実同値額は期待効用表現によらず \succsim から直接に $c(P, \succsim)$ を定義できる. $c(P, \succsim) \sim P$ となるように定義したらよい. したがって期待効用表現が存在しないような選好についても確実同値額を定義することができる. このことは、「少なくとも同程度にリスク回避的」関係の上の定義の長所である.

5.5.6 注意 u_1 と u_2 のうちの一方が,他方よりも必ず少なくとも同程度にリスク回避的であるとは限らない. u_1 が u_2 より少なくとも同程度にリスク回避的ではなく,かつ u_2 が u_1 と少なくとも同程度にリスク回避的でないような状況がありうる.次の例では,そのような状況が成立している.

5.5.7 例 $C = \mathbf{R}_+$ とし、2 つのくじ P_1 と P_2 を、

$$P_1(\{1\}) = P_1(\{3\}) = \frac{1}{2}$$

 $P_2(\{3\}) = P_2(\{5\}) = \frac{1}{2}$

と定義する. また, 効用関数 u_1 と u_2 を,

$$u_1(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 2 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}x + 1 & (2 \le x \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 4 \text{ Obs}) \\ \frac{1}{2}x + 2 & (4 \le x \text{ Obs}) \end{cases}$$

と定義する. このとき、くじ P1 が与える期待効用は、それぞれ

$$\int_C u_1(z) \, dP_1(z) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{7}{4}$$

$$\int_C u_2(z) \, dP_1(z) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

であり、したがって確実同値額はそれぞれ $c(P_1,u_1)=7/4$, $c(P_1,u_2)=2$ であり、 $c(P_1,u_1)< c(P_1,u_2)$ が成立する.

同様にして、くじ P_2 が与える確実同値額を求めると、 $c(P_2,u_1)=4$ 、 $c(P_2,u_2)=15/4$ であり、 $c(P_2,u_1)>c(P_2,u_2)$ が成立する.

 u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であるためには、任意の $P \in \mathcal{P}^*$ について、 $c(P,u_1) \leq c(P,u_2)$ が成立する必要がある。しかしこの例では、 $P = P_1$ のときは $c(P,u_1) < c(P,u_2)$ が成立し、 $P = P_2$ のときは $c(P,u_1) > c(P,u_2)$ が成立している。したがって、 u_1 と u_2 のいずれについても、もう一方と少なくとも同程度にリスク回避的であるとはいえない。

もしuが恒等関数であるならば、

$$\int_C u(z) dP(z) = \int_C z dP(z) = (P$$
の平均) = $c(P, u)$

が成立する*7. より一般に, $u(x)=\alpha x+\beta$ の形をとる任意の効用関数 u に対して, c(P,u) は P の平均である.

5.5.8 命題 u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であることは、以下のことと同値である。任意の $x \in C$ と任意の $P \in \mathcal{P}^*$ について、 $u_1(x) \leq \int_C u_1(z) \, \mathrm{d}P(z)$ ならば $u_2(x) \leq \int_C u_2(z) \, \mathrm{d}P(z)$ が成立する.

この同値条件を少なくとも同程度にリスク回避的であることの定義としてもよい. この条件が定義 5.5.4 よりも優れている点は, u が単調または連続でなかったり, C が区間でなかったりして確実性等価が存在しない場合にも定義できることにある.

練習問題 5.5.1 命題 5.5.8 を証明せよ.

関数 $U_1: \mathcal{P}^* \to \mathbf{R}$ と $U_2: \mathcal{P}^* \to \mathbf{R}$ を次のように定義する.

$$U_1(P) = \int_C u_1(z) \, \mathrm{d}P(z)$$

$$U_2(P) = \int_C u_2(z) \, \mathrm{d}P(z)$$

また δ_x は $\delta_x(\{x\})=1$ を満たす確率測度とする*8. このとき, u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であるならば,命題 5.5.8 より $U_1(\delta_x)\leq U_1(P)$ のときは必ず $U_2(\delta_x)\leq U_2(P)$ が成立する.ここで, $U_1(\delta_x)\leq U_1(P)$ は $P\succsim_1\delta_x$ を, $U_2(\delta_x)\leq U_2(P)$ は $P\succsim_2\delta_x$ をそれぞれ意味している.これは, \succsim_1 と \succsim_2 が期待効用関数から導出されなかった場合にも意味を持つ表現になる.同様に,確実同値額も, $U(\delta_x)=U(P)$ ならば x=c(P,U) と定義される.

$$F_x(z) = \begin{cases} 0 & (z < x \text{ のとき}) \\ 1 & (x \le z \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり、これは確実にxを得られるくじに相当する。したがって $U_1(\delta_x)=u_1(x), U_2(\delta_x)=u_2(x)$ である。

^{*&}lt;sup>7</sup> 恒等関数 $\operatorname{id}:C\to C$ とは、任意の $z\in C$ について $\operatorname{id}(z)=z$ となる関数のことである.

^{*8} δ_x が表す確率分布の累積分布関数を F_x で表すと,

5.5.9 定義 $u \in \mathcal{U}^0$ とする. もし u が恒等関数 id と少なくとも同程度にリスク回避的であるならば、単に u はリスク回避的であるという. つまり、任意の $P \in \mathcal{P}^*$ について、 $c(P,u) \leq (P$ の平均) が成立するならば、u はリスク回避的 (risk-averse) であるという.

また任意の $P \in \mathcal{P}^*$ について、 $c(P,u) \geq (P \text{ oppi})$ が成立するならば、u はリスク愛好的 (risk-loving) であるといい、c(P,u) = (P oppi) が成立するならば、u はリスク中立的 (risk-neutral) であるという.

5.5.2 確実同値額を使わないリスク回避度の比較方法

確実同値額を使ってリスク回避度を比較する場合,たとえば u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であるというためには,すべての $P \in \mathcal{P}^*$ について $c(P,u_1) \leq c(P,u_2)$ が成立することを確かめなければならず,とても大変である.以下では,確実同値額を使わずにリスク回避度を比較するひとつの方法を紹介しよう.以下の議論では期待効用表現が必要である.

 $u_1,u_2\in \mathcal{U}^0$ とし、関数 $\varphi:u_2(C)\to u_1(C)$ を $\varphi=u_1\circ u_2^{-1}$ 、つまり $\varphi(z)=u_1(u_2^{-1}(z))$ と定義する.また, $P\in\mathcal{P}^*$ とする.ここで, $Q=P\circ u_2^{-1}$ と定義する,つまり, $u_2(C)$ の任意のボレル部分集合 A について,

$$Q(A) = P\left(u_2^{-1}(A)\right)$$

が成立すると定義しよう.

練習問題 **5.5.2** Q は $u_2(C)$ 上のボレル確率測度であることを証明せよ.

5.5.10 命題 $f:u_2(C)\to \mathbf{R}$ が Q に関して積分可能であるとする.このとき $f\circ u_2:C\to \mathbf{R}$ は P に関して積分可能であり,

$$\int_{u_2(C)} f(z) \, \mathrm{d}Q(z) = \int_C (f \circ u_2)(x) \, \mathrm{d}P(x)$$

が成立する. ここで $(f \circ u_2)(x) = f(u_2(x))$ である.

命題 **5.5.10** の証明 変数変換の法則による.Billingsley を参照せよ. ///

5.5.11 命題 もし φ が凹関数ならば,

$$\int_{u_2(C)} \varphi(z) \, dQ(z) \le \varphi \left(\int_{u_2(C)} z \, dQ(x) \right)$$
(5.2)

が成立する. また, もし φ が凸関数ならば,

$$\int_{u_2(C)} \varphi(z) \, dQ(z) \ge \varphi\left(\int_{u_2(C)} z \, dQ(x)\right)$$
(5.3)

が成立する.

準備ができたので、確実同値額を使わずにリスク回避度を比較する方法を見ていこう.変数変換の公式より、

$$\int_{u_2(C)} \varphi(z) \, dQ(z) = \int_C (\varphi \circ u_2)(x) \, dP(x)$$
$$= \int_C u_1(x) \, dP(x)$$

である. 次に, 恒等関数 id と変数変換の公式を使って右辺を変形すると,

$$\varphi\left(\int_{u_2(C)} z \, dQ(x)\right) = \varphi\left(\int_{u_2(C)} id(z) \, dQ(x)\right)$$
$$= \varphi\left(\int_C (id \circ u_2)(x) \, dP(x)\right)$$
$$= \varphi\left(\int_C u_2(x) \, dP(x)\right).$$

したがって, (5.2) は,

$$\int_{C} u_1(x) \, \mathrm{d}P(x) \le \varphi \left(\int_{C} u_2(x) \, \mathrm{d}P(x) \right)$$

と同値である. $\varphi = u_1 \circ u_2^{-1}$ より, これは,

$$u_1^{-1} \left(\int_C u_1(x) \, dP(x) \right) \le u_2^{-1} \left(\int_C u_2(x) \, dP(x) \right)$$

と同値である. ここで、確実同値額の定義より、

$$u_1^{-1} \left(\int_C u_1(x) \, dP(x) \right) = c(P, u_1),$$
$$u_2^{-1} \left(\int_C u_2(x) \, dP(x) \right) = c(P, u_2)$$

と書くことができるから、結局 (5.2) は $c(P,u_1) \leq c(P,u_2)$ と同値である。同様に (5.3) は $c(P,u_1) \geq c(P,u_2)$ と同値である。

5.5.12 命題 $u_1 \circ u_2^{-1}$ が凹関数であることと, u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であることは同値である.

命題 5.5.12 の証明 $u_1 \circ u_2^{-1}$ が凹関数のとき, u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であることは上で示した.

 $\varphi=u_1\circ u_2^{-1}$ とおく. 逆が成立することを示すには, u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であるならば, 任意の $z,z'\in u_2(C)$, および任意の $\alpha\in[0,1]$ について,

$$\varphi(\alpha z + (1 - \alpha)z') \ge \alpha \varphi(z) + (1 - \alpha)\varphi(z')$$

が成立することを示せばよい. 今, $x=u_2^{-1}(z), x'=u_2^{-1}(z')$ と定義し、確率測度 P を、 $P(\{x\})=\alpha, P(\{x'\})=1-\alpha$ と定義すると、

$$c(P, u_1) = u_1^{-1} \left(\int_C u_1(x) dP(x) \right)$$

= $u_1^{-1} (\alpha u_1(x) + (1 - \alpha)u_1(x'))$
= $u_1^{-1} (\alpha \varphi(z) + (1 - \alpha)\varphi(z'))$

が得られ, 同様に,

$$c(P, u_2) = u_2^{-1} (\alpha z + (1 - \alpha)z')$$

が得られる.ここで, u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であるならば $c(P,u_1) \leq c(P,u_2)$ が成立するので.

$$u_1^{-1} (\alpha \varphi(z) + (1 - \alpha)\varphi(z')) \le u_2^{-1} (\alpha z + (1 - \alpha)z')$$

である. $\varphi = u_1 \circ u_2^{-1}$ より,

$$\alpha \varphi(z) + (1 - \alpha)\varphi(z') \le \varphi(\alpha z + (1 - \alpha)z').$$

したがって $\varphi = u_1 \circ u_2^{-1}$ が凹関数であることが示された.

///

ALARAA は二項関係のみから定義される性質なので u_1,u_2 をそれぞれ線形変換した v_1,v_2 に置き換えても成立つ。また,効用関数 u がリスク回避的であることは,u が恒等関数 id と少なくとも同程度にリスク回避的であることと同値である。このとき,命題 5.5.12 より, $u \circ \mathrm{id}^{-1} = u$ が凹関数であることになる。よって,次の命題が得られる。

5.5.13 命題 効用関数 u がリスク回避的であることと, u が凹関数であることは同値である.

練習問題 5.5.3 u_1 と u_2 を連続かつ狭義増加な効用関数とする. n=1,2 と消費量 x に対し、

$$u_n(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi\right) u_n(x+1) + \left(\frac{1}{2} - \pi\right) u_n(x-1)$$

を満たす π を $\pi_n(x)$ と表すことにする. もし u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的ならば, $\pi_1(x) \geq \pi_2(x)$ が成立することを証明せよ.

5.5.3 絶対的リスク回避度

 U^2 を 2 回連続微分可能で、1 回微分が厳密に正であるような効用関数の集合とし、 $u_1, u_2 \in U^2$ とする. このとき、 $\varphi = u_1 \circ u_2^{-1}$ も 2 回連続微分可能である.

命題 5.5.12 と命題 5.5.13 より, u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であることは φ が凹関数,つまり $\varphi'' \leq 0$ が成立することと同値である. φ は u_1 と u_2 を使って定義したから, $\varphi'' \leq 0$ という条件を u_1 と u_2 を使って表すことができるはずである.実際, $\varphi'' \leq 0$ は,任意の $x \in C$ について

$$-\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} \ge -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)}$$

が成立することと同値である.このことを以下で確認しよう.まず, $\varphi'(z)$ と $\varphi''(z)$ は次のように u_1 と u_2 を使って表すことができる.

$$\varphi'(z) = (u_1 \circ u_2^{-1})'(z)$$

$$= u_1'(u_2^{-1}(z))(u_2^{-1})'(z)$$

$$= u_1'(u_2^{-1}(z))\frac{1}{u_2'(u_2^{-1}(z))}$$

$$= \frac{u_1'(u_2^{-1}(z))}{u_2'(u_2^{-1}(z))}.$$

両辺を微分して整理すれば,

$$\varphi''(z) = \frac{u_1'(u_2^{-1}(z))}{(u_2'(u_2^{-1}(z)))^2} \left(\frac{u_1''(u_2^{-1}(z))}{u_1'(u_2^{-1}(z))} - \frac{u_2''(u_2^{-1}(z))}{u_2'(u_2^{-1}(z))} \right)$$

ここで $u_1'(u_2^{-1}(z))/\left(u_2'(u_2^{-1}(z))\right)^2 \geq 0$ より, $\varphi'' \leq 0$ のとき,またそのときに限り,任意の $z \in u_2(C)$ について,

$$\frac{u_1''(u_2^{-1}(z))}{u_1'(u_2^{-1}(z))} \le \frac{u_2''(u_2^{-1}(z))}{u_2'(u_2^{-1}(z))}$$

が成立する. この関係は $u_2^{-1}(z) = x$ と置きかえれば、任意の $x \in C$ について、

$$-\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} \ge -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)}$$

が成立することと同値である.

5.5.14 定義 (アロー・プラットの絶対的リスク回避度) $u \in \mathcal{U}^2, x \in C$ とする. このとき,

$$r_{\mathcal{A}}(x,u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

は、u の x におけるアロー・プラットの絶対的リスク回避度 (Arrow-Pratt measure of absolute risk aversion of u at x) と呼ばれる.

今まで以下がそれぞれ同値であることを勉強した.

- 1. 任意の $L'=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\in\mathcal{L}$ と任意の $L\in\mathcal{L}$ に対し $L\succsim_1 L'$ なら $L\succsim_2 L'$
- 2. 任意の確率測度 P に対し $c(u_2, P) \ge c(u_1, P)$
- $3. u_1 \circ u_2^{-1}$ が凹関数

1番目と2番目は、任意のくじや確率測度について成立することを要請している。3番目は、逆関数の存在を要請している。

先の分析により、以下の命題が成立する.

5.5.15 命題 u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であることは、任意の $x \in C$ について、

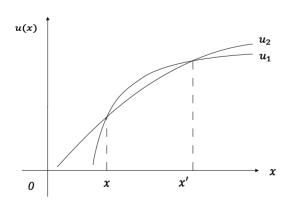
$$r_{\mathcal{A}}(x, u_1) \ge r_{\mathcal{A}}(x, u_2)$$

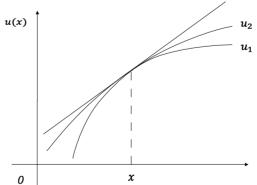
が成立することと同値である.

アロー・プラットの絶対的リスク回避度を用いた方法は,効用関数の 2 回微分可能のみを要求しているので,使いやすい.

これは各点ごとの比較であることに注意されたい. u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であり、したがって任意の $x\in C$ について $r_{\rm A}(x,u_1)\geq r_{\rm A}(x,u_2)$ であっても、相異なる $x,y\in C$ があって $r_{\rm A}(x,u_1)< r_{\rm A}(y,u_2)$ となることはあってよい. ただし、効率的リスク配分を特徴づけるときなどは、任意の x と y について $r_{\rm A}(x,u_1)\geq r_{\rm A}(y,u_2)$ が成立することを要請するのが便利なこともある.

また,効用関数に線形変換を加えても絶対的リスク回避度の大小関係は保たれる.





 u_1 と u_2 をある選好関係を表す効用関数とし、任意の x に対し $r_A(x,u_1) \ge r_A(x,u_2)$ とする.もし任意の x,x' が存在し、 $u_1(x)=u_2(x)$ 、 $u_1(x')=u_2(x')$ が成立するならば、任意の $x''\in [x,x']$ に対し、 $u_1(x'')\ge u_2(x'')$ が成立する.効用関数は線形変換しても元の選好関係を保つので、そのような x,x' が存在するような u_1,u_2 の線形変換は必ず存在する.

ある x が存在し、 $u_1(x)=u_2(x)$ 、 $u_1'(x)=u_2'(x)$ 、 $u_1''\leq 0$ 、 $u_2'\leq 0$ が成立するとする。x での共通接線を l(x) とすると任意の x' で $u_1(x')\leq u_2(x')\leq l(x)$ が成立する。これは、x が増加するにつれ u_1 の限界効用 がより速く減少することを意味するので、 u_2'/u_1' は x 対する単調非減少ともいえる。

u''=0 ならば、任意の x に対し $r_A(x,u)=0$ である.このとき u は線形関数で、適当な線形変換を加えれば $\int u(z)\mathrm{d}P(z)$ は $\int z\mathrm{d}P(z)=(P$ の平均) になる.つまり、任意の P に対し $P\sim\delta_{P\text{ o}$ 平均</sub>.これをリスク中立的という.このときの期待効用は分散及び 2 次以上のモーメントに影響を受けない.

 $u'' \le 0$ ならば、 $r_A \ge 0$ で、 $\int u(z) dP(z) \le u(P \text{ oppi})$. このときリスク回避的という.

練習問題 5.5.4 初期資産 w と効用関数 u を持つ意思決定者が単純くじを売買する状況を考えよう. u は 2 回微分可能で,u' は常に正とする.この意思決定者が当初くじを保有しない場合,くじを獲得するために支払ってもよいと考える最高の価格を p で表す.また,当初(w に加えて)くじを保有する場合,くじを手放す際に必要とする最低の価格を q で表す.もし u の絶対的リスク回避度が消費量の狭義減少関数ならば,p < q であることを証明せよ.

5.5.16 定義 $u \in \mathcal{U}^2, x \in C, x > 0$ とする. このとき,

$$r_{\rm R}(x,u) = -\frac{u''(x)x}{u'(x)}$$

は, u の x における相対的リスク回避度 (Arrow-Pratt measure of relative risk aversion of u at x) と呼ばれる.

練習問題 5.5.5 u は $(0,\infty)$ 上で定義された 2 回連続微分可能な効用関数とする. u' は常に正と仮定する.

- 1. もしある $\overline{x}>0$ が存在して,任意の $x>\overline{x}$ に対し $r_{\mathrm{R}}(x,u)\leq 1$ ならば, $x\to\infty$ のとき $u(x)\to\infty$ であることを証明せよ.
- 2. もしある $\underline{x}>0$ が存在して,任意の $x<\underline{x}$ に対し $r_{\mathrm{R}}(x,u)\geq 1$ ならば, $x\to 0$ のとき $u(x)\to -\infty$ であることを証明せよ.

アロー・プラットの絶対的リスク回避度は、x が 1 単位増えたとき u'(x) が何パーセント上昇しているかを表している。マイナスの符号を考慮すると、 $r_{\rm A}(x,u)$ は、x が 1 単位増えたときに、限界効用が何パーセント減るかを表している。

一方, 相対的リスク回避度は,

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)} = \frac{\mathrm{d}u'(x)}{\mathrm{d}x} / \frac{u'(x)}{x}$$

と変形すると、右辺は u'(x) の弾力性を表していることがわかる。つまり相対的リスク回避度は、x が 1 パーセント増えたときに、限界効用が何パーセント減るかを表している。

また, アロー・プラットの絶対的リスク回避度の逆数

$$t(x,u) = -\frac{u'(x)}{u''(x)}$$

は、リスク許容度 (risk tolerance) と呼ばれる.

5.5.17 定義 $r_A(x,u)$ が x の減少,定値,増加関数であるとき,効用関数 u はそれぞれ,絶対的リスク回避 度減少(一定,増加) (decreasing (constant, increasing) absolute risk aversion) であるという.

5.5.18 命題 任意の貨幣額xとボレル確率測度Pに対して.

$$c_x^{\mathcal{A}}(P, u) = u^{-1} \left(\int_C u(x+z) \, \mathrm{d}P(z) \right)$$

を定義する. このとき u が絶対的リスク回避度減少,一定,増加であることは,

$$x - c_x^{\mathbf{A}}(P, u)$$

がそれぞれxの減少、定値、増加関数であることと同値である.

 $c_x^{\rm A}(P,u)$ は、いわば $P(\cdot + \{x\})$ の確実同値額である。x が 10 万円だけ大きくなったとき, $P(\cdot + \{x\})$ の確実同値額である $c_x^{\rm A}(P,u)$ も 10 万円程度上がるだろうと予想される。そこで上の命題に現れる差 $x-c_x^{\rm A}(P,u)$ は、x の増加につれて第 1 項も第 2 項も増加するものだが,その増加が第 2 項のほうで大きいとき,全体は非増加になる。この差 $x-c_x^{\rm A}(P,u)$ は、x の増加分を無視してリスクに対する態度の変化のみを拾いだしているものと解釈できる。

命題 **5.5.18** の証明 $x_1 > x_2$ なる x_1, x_2 に対して、それぞれ $u_1(z) = u(x_1+z), u_2(z) = u(x_2+z)$ とする。 このとき、P の u_1, u_2 に対する確実同値額をそれぞれ $c_1 = c(P, u_1), c_2 = c(P, u_2)$ とする。 c_1 について、

$$u_1(c_1) = \int_C u_1(z) \, \mathrm{d}P(z)$$

とすると、定義から、

$$u(x_1 + c_1) = \int_C u(x_1 + z) dP(z)$$

であって、u は単調増加関数なので、

$$x_1 + c_1 = u^{-1} \left(\int_C u(x_1 + z) dP(z) \right),$$

したがって,

$$c_1 = u^{-1} \left(\int_C u(x_1 + z) dP(z) \right) - x_1 = c_{x_1}^{A}(P, u) - x_1$$

が成り立つ. 同様に c_2 について $c_2 = c_{x_2}^{\mathrm{A}}(P,u) - x_2$ が成立する. したがって, $c_2 < c_1$ と,

$$x_1 - c_{x_1}^{A}(P, u) < x_2 - c_{x_2}^{A}(P, u)$$

5.5.19 定義 $r_{\rm R}(x,u)$ が x の減少,定値,増加関数のとき,効用関数 u はそれぞれ,相対的リスク回避度減少,一定,増加 (decreasing, constant, increasing relative risk aversion) であるという.

5.5.20 命題 任意の貨幣額 x > 0 と \mathbf{R}_+ 上のボレル確率測度 P について,

$$c_x^{\mathrm{R}}(P, u) = u^{-1} \left(\int_C u(zx) \, \mathrm{d}P(z) \right)$$

と定義する. このとき u が相対的リスク回避度減少,一定,増加であることは,

$$\frac{x}{c_x^{\rm R}(P,u)}$$

がそれぞれxの減少、定値、増加関数であることと同値である.

命題 5.5.18 に関する注意と同様のことがここでも言える。すなわち,手もちの予算 x>0 と,収益率の確率分布(リターンの分布)P があって,Z が P に従う確率変数とすると,収益は xZ である。いわばその xZ の確実同値額が $c_x^{\rm R}(P,u)$ であって,x が 2 倍になったとすると $c_x^{\rm R}(P,u)$ もそのぶん大きくなると考え られるが,それは 2 倍より大きいだろうかということが問題で,そこがリスクに対する態度による部分である。

練習問題 **5.5.6** 命題 5.5.20 を示せ (ヒント: 各 x > 0 に対して $u_x(z) = u(zx)$ とせよ).

命題 5.5.18 と命題 5.5.20 の条件は、u が 2 回微分可能ではなく、したがって $r_{\rm A}$ や $r_{\rm R}$ が定義できない場合にも適用できることに注意せよ。

5.6 さまざまな効用関数

5.6.1 例 (絶対的リスク回避度一定 (CARA) の効用関数) 効用関数 u の絶対的リスク回避度が一定ならば (CARA), 任意の $x \in \mathbf{R}$ について, $r_{\mathbf{A}}(x,u) = \alpha$ となるような $\alpha > 0$ が存在する. つまり,

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha$$

を書きかえた.

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log u'(x) = \alpha$$

の両辺を積分すると,

$$\log u'(x) = -\alpha x + K_0$$

が得られる. ここで K_0 は積分定数である. 両辺の指数をとると,

$$u'(x) = \exp(-\alpha x + K_0)$$
$$= \exp(K_0) \exp(-\alpha x)$$
$$= K_1 \exp(-\alpha x)$$

が得られる. ここで $K_1 = \exp(K_0) > 0$ とした. 両辺を積分すると, K_2 を積分定数として,

$$u(x) = -\frac{1}{\alpha}K_1 \exp(-\alpha x) + K_2$$

が得られる. よって CARA 効用関数 u は,

$$u(x) = -\exp(-\alpha x)$$

の狭義単調増加のアフィン変換である. 特に,

$$u(x) = -\frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha x)$$

と書くことが多い. 限界効用が $u'(x) = \exp(-\alpha x)$ となるために, この表現が用いられる.

練習問題 $\mathbf{5.6.1}\ u$ は一定の絶対的リスク回避度 α を持つ効用関数とする. F を \mathbf{R} 上で定義された任意の累積分布関数とし、効用関数 v を、

$$v(x) = \int u(x+z) \, \mathrm{d}F(z)$$

で定義する. このとき, vも一定の絶対的リスク回避度 α を持つことを証明せよ.

5.6.2 例 (相対的リスク回避度一定 (CRRA) の効用関数) 効用関数 u が、相対的リスク回避度一定 (CRRA) ならば、任意の $x \in \mathbf{R}_{++}$ について、

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)} = \gamma$$

となるような $\gamma > 0$ が存在する. これは,

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{\gamma}{x}$$

と書きかえることができる.このとき,右辺は双曲線を表しているので,CRRAの効用関数は,絶対的リスク回避度が双曲型(Hyperbolic ARA)の効用関数の特殊ケースであるといえる.上の表現を書きかえると,

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log u'(x) = \frac{\gamma}{x}$$

が得られ, 辺々を積分すると,

$$-\log u'(x) = \gamma \log x + K_0$$

が得られる. ここで K_0 は積分定数である. 両辺の指数をとると,

$$u'(x) = \exp(-\gamma \log x - K_0) = K_1 x^{-\gamma}$$

が得られる. ここで $K_1 = \exp(-K_0) > 0$ とした. 両辺を積分すると,

$$u(x) = \begin{cases} K_1 \frac{1}{1 - \gamma} x^{1 - \gamma} + K_2 & (\gamma \neq 1) \\ K_1 \log x + K_2 & (\gamma = 1) \end{cases}$$

が得られる. K_1, K_2 は任意だから,

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \gamma} x^{1 - \gamma} & (\gamma \neq 1) \\ \log \alpha & (\gamma = 1) \end{cases}$$

と書ける. 別の表現としては,

$$u(x) = \begin{cases} x^{1-\gamma} & (\gamma < 1) \\ \log x & (\gamma = 1) \\ -\frac{1}{x^{\gamma-1}} & (\gamma > 1) \end{cases}$$

または,

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

と書くこともできる.

最後の表現は、 $\gamma=1$ のときは分母が 0 になり定義されないが、 $\gamma\to 1$ のとき、 $(x^{1-\gamma}-1)/(1-\gamma)\to \log x$ が成立する*9. また、 $u'(x)=x^{-\gamma}$ だから、 $u(x)=(x^{1-\gamma}-1)/(1-\gamma)$ のとき γ の大きさにかかわらず、u(1)=0 かつ u'(1)=1 である.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^{1-\gamma} \log x}{-1} = \log x.$$

^{*9} ロピタルの定理による. 実際,分母分子をそれぞれ γ の関数とみたとき, $\gamma \to 1$ ではそれぞれ 0 に収束するので,ロピタルの定理より,

5.6.3 例 (アフィンリスク許容度または線形リスク許容度の効用関数) 任意の $\kappa, \eta \in \mathbf{R}$ について, $t(x, u) = \kappa x + \eta$ であるような $x \in C$ が存在するならば、効用関数 u は、アフィンリスク許容度、または、線形リスク許容度 (linear risk tolarance) を持つという.

すぐに確かめることができるように、CARA は $\kappa=0,\eta=1/\alpha$ のケースであり、CRRA は $\kappa=1/\gamma,\eta=0$ のケースである。また、 $t(x,u)=\kappa x+\eta$ ならば $r_{\rm A}(x,u)=1/(\kappa x+\eta)$ であるから、絶対的リスク回避度 が双曲型 (Hyperbolic ARA) の効用関数の一つのケースでもある。

 $\kappa>0$ のとき,t(x,u)>0 と $x>-\eta/\kappa$ は同値である.よって,帰結の集合を $C=(-\eta/\kappa,\infty)$ とするのが自然である.もしさらに $\eta<0$ ならば, $-\eta/\kappa>0$ であり, $-\eta/\kappa$ は最小消費水準 (minimum subsistence level) と呼ばれる.x が $(-\eta/\kappa,\infty)$ に属するとき,相対的リスク回避度は x の減少関数になる.また, $\eta>0$ ならば, $-\eta/\kappa<0$ であり,x が $(-\eta/\kappa,\infty)\cap \mathbf{R}_{++}$ に属するとき,相対的リスク回避度は x の増加関数になる.

練習問題 5.6.2 相対的リスク回避度に関する上述の主張を証明せよ.

 $\kappa < 0$ のとき、t の定義より $\kappa x + \eta > 0$ だから、 $x < -\eta/\kappa$ である。よって、帰結の集合を $C = (-\infty, -\eta/\kappa)$ とするのが自然である。2 次の効用関数 (quadratic utility function) は、このケースに該当する。実際、 $\kappa = -1$ とすると、 $r_A(x,u) = 1/(\eta - x)$ より、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log u'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(\eta - x)$$

で、両辺の積分をとると、

$$\log u'(x) = \log(\eta - x) + K_0$$

が得られる. K_0 は積分定数である. 両辺の指数をとると, $K_1 = \exp(K_0) > 0$ として,

$$u'(x) = K_1(\eta - x)$$

が得られ、限界効用が線形であることが確認できる。さらに両辺の積分をとると、 K_2 を積分定数として、

$$u(x) = -\frac{K_1}{2}(\eta - x)^2 + K_2$$

が得られる. 積分定数は任意だから,

$$u(x) = -(\eta - x)^2,$$

または,

$$u(x) = -\frac{1}{2}(\eta - x)^2$$

と書かれる.

X は消費水準を表す確率変数とし, $X:\Omega \to C$ とする.このとき期待効用水準は,次のように表現することができる.

$$\begin{split} \int_C u(x) \, \mathrm{d}(P \circ X^{-1})(x) &= \int_\Omega u(X(\omega)) \, \mathrm{d}P(\omega) \\ &= E(u(X)) \\ &= E(-X^2 + 2\eta X - \eta^2) \\ &= -E(X^2) + 2\eta E(X) - \eta^2 \\ &= -(E(X))^2 - \mathrm{Var}(X) + 2\eta E(X) - \eta^2. \end{split}$$

よって,期待効用水準は,平均と分散のみに依存する.

5.7 ポートフォリオ決定問題

帰結の集合を $C \in \{R, R_{++}\}$ とし、効用関数を $u \in \mathcal{U}^2$ とする。また、安全資産と危険資産の 2 種類の資産があるとする。安全資産は債券、危険資産は株式などと考えることができる。投資家の初期資産を $w \in C$ とする。

安全資産に 1 単位投資すると、1 期後に収益 1+r 単位が得られるとする。r は利子率で、ここでは簡単化のため r=0 とする。一方、危険資産に 1 単位投資すると、1 期後に収益 Z 単位が得られるとする。Z は確率変数で、Z が定める R 上の確率測度は、コンパクトな台を持つとする。

w のうち a を危険資産に投資し、b を安全資産に投資すると、1 期後には aZ + b を得られる.

ポートフォリオを組む段階での投資家の期待効用は,

$$E\left(u(aZ+b)\right)$$

であり、彼が解く問題は、

$$\max_{a,b} \quad E\left(u(aZ+b)\right)$$
 subject to $a+b=w$

である.ここで a<0 や b<0 であっても構わないが, $aZ+b\in C$ でなければならない*10.簡単化のため,以下の議論では確率 1 で $aZ+b\in C$ が成立すると仮定しよう.

b = w - a を目的関数に代入すると,

$$E(u(aZ + (w - a))) = E(u(a(Z - 1) + w))$$

であるから、上の式をaについて最大化すればよい.

もし $a = a^*$ が最適であるならば,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}E\left(u(a(Z-1)+w)\right)\Big|_{a=a^*} = 0$$
(5.4)

が成り立つ. z が従う \mathbf{R} 上の確率測度の台はコンパクトなので、微分と期待値の順序を入れかえることができる. よって、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}E(u(a(Z-1)+w)) = E(u'(a(Z-1)+w)(Z-1))$$

が成立する. 上式の右辺を $\varphi(a)$ とおく. u'' < 0 かつ $(Z-1)^2 \ge 0$ なので,

$$\varphi'(a) = E\left(u''(a(Z-1) + w)(Z-1)^2\right) < 0 \tag{5.5}$$

である. これより φ は減少関数であり、また (5.4) より $\varphi(a^*)=0$ となることがわかる.

以下の命題は危険資産の期待収益率が安全資産よりも高い(等しい,低い)ならば危険資産の保有量が正 (ゼロ,負)になることを述べており,非常に直観的な結果である.

5.7.1 命題 E(Z) > 1 ならば $a^* > 0$, E(Z) = 1 ならば $a^* = 0$, E(Z) < 1 ならば $a^* < 0$ が成立する.また,それぞれ逆も成立する.

^{*} 10 $C=\mathbf{R}_{++}$ ならば aZ+b>0 であるが, $C=\mathbf{R}_{+}$ のときは $aZ+b\geq0$ なので,正の確率で aZ+b=0 が成立する可能性がある.このときには (5.4) は成立しない.

命題 5.7.1 の証明

$$\varphi(0) = E(u'(w)(Z-1)) = u'(w)(E(Z)-1)$$

だから,E(Z)>1 のとき,そしてそのときに限り $\varphi(0)>0$ である. $\varphi'(a)<0$ と $\varphi(a^*)=0$ から,これは $a^*>0$ であることと同値である.E(Z)=1, E(Z)<1 の場合も同様である. ///

目的関数が期待効用であるときには $a^*=0$ となるのは E[Z]=1 のときのみである.逆にいうと, $E[Z]\neq 1$ のときは,株を買うか空売りすることになる.これは,期待効用理論の極めて堅調な特徴である. Ellsberg の曖昧さ回避傾向を持つ選好の場合は $a^*=0$ となる領域がより広くなる.これを用いてエクイティプレミアムパズルを説明しようとする試みもある.

次にリスク回避度の違いがポートフォリオにどのような影響を与えるのかを見る.

- **5.7.2** 命題 異なる投資家の比較 効用関数 u_1, u_2 に対する最適な危険資産保有量をそれぞれ a_1^*, a_2^* とする. このとき, u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であるならば, $|a_1^*| < |a_2^*|$ が成立する.
- 異なる初期資産における比較 初期資産が w_1,w_2 のときの最適な危険資産保有量をそれぞれ a_1^*,a_2^* とする. このとき $w_1 \leq w_2$ かつ $r_{\rm A}(\cdot,u)$ が単調非増加(非減少)ならば, $|a_1^*| \leq |a_2^*|$ ($|a_1^*| \geq |a_2^*|$)が成立 する.
- 投資割合の選択問題 ポートフォリオ選択問題

$$\max_{a,b} \quad E\left(u(awZ + bw)\right)$$

subject to $a+b < 1$

について、初期資産が w_1, w_2 $(w_1 \le w_2)$ のときの最適な危険資産投資割合をそれぞれ a_1^*, a_2^* とする. このとき $r_{\rm R}(\cdot, u)$ が単調非増加(非減少)ならば、 $|a_1^*| \le |a_2^*|$ ($|a_1^*| \ge |a_2^*|$)が成立する.

まず,以下の補題を証明する.

5.7.3 補題 正値な関数 π_1, π_2 (つまり,任意の z について $\pi_i(z) > 0$,i = 1, 2)について, $\int \pi_1(z) \, \mathrm{d}F(z) = \int \pi_2(z) \, \mathrm{d}F(z) = 1$ が成り立つとする*¹¹. 今, $\pi_2(z)/\pi_1(z)$ が z に関して単調非減少なら,すなわち $\bar{z} > z$ となる任意の z, \bar{z} に対して,

$$\frac{\pi_2(\bar{z})}{\pi_1(\bar{z})} \ge \frac{\pi_2(z)}{\pi_1(z)}$$

なら, 任意の単調非減少関数 h に対して,

$$\int h(z)\pi_2(z)\,\mathrm{d}F(z) \ge \int h(z)\pi_1(z)\,\mathrm{d}F(z)$$

が成立し、任意の単調非増加関数 h' に対して、

$$\int h'(z)\pi_2(z) dF(z) \le \int h'(z)\pi_1(z) dF(z)$$

が成立する.

補題 **5.7.3** の証明 π_i (i=1,2) の累積分布関数を Π_i で表すことにする.

$$\frac{\pi_2(\bar{z})}{\pi_1(\bar{z})} \ge \frac{\pi_2(z)}{\pi_1(z)}$$

 $^{^{*11}}$ この条件は, π_1,π_2 が F が定める確率測度に関して密度関数の条件を満たすことを意味している.

は,

$$\frac{\pi_2(\bar{z})}{\pi_2(z)} \ge \frac{\pi_1(\bar{z})}{\pi_1(z)}$$

と書きかえられる. ここで任意の定数 $y \in \mathbf{R}$ を固定して $\bar{z} \in [y,\infty), z \in (-\infty,y]$ とする. \bar{z},z がこの範囲 にある限りにおいて上の不等式が成立していることに注意せよ. \bar{z} について区間 $[y,\infty)$ 上で積分すると,

$$\frac{\int_{y}^{\infty} \pi_{2}(\bar{z}) \, \mathrm{d}F(\bar{z})}{\pi_{2}(z)} \ge \frac{\int_{y}^{\infty} \pi_{1}(\bar{z}) \, \mathrm{d}F(\bar{z})}{\pi_{1}(z)}$$

すなわち,

$$\frac{1 - \Pi_2(y)}{\pi_2(z)} \ge \frac{1 - \Pi_1(y)}{\pi_1(z)}$$

すなわち,

$$\frac{\pi_2(z)}{1 - \Pi_2(y)} \le \frac{\pi_1(z)}{1 - \Pi_1(y)}$$

が得られる. さらに z を区間 $(-\infty, y]$ において積分することで,

$$\frac{\Pi_2(y)}{1 - \Pi_2(y)} \ge \frac{\Pi_1(y)}{1 - \Pi_1(y)}$$

を得る. 関数 x/(1-x) は x について単調増加であることから,

$$\Pi_2(y) \geq \Pi_1(y)$$

を得る.これは任意の $y\in \mathbf{R}$ について成り立つ.このことは Π_1 が Π_2 を 1 次確率支配することを意味 \mathbb{L}^{*12} ,命題 5.9.1 により証明が完了した. ///

命題 5.7.2 の証明 異なる投資家の比較のみ証明する. i = 1, 2 に対して,

$$\varphi_i(a) = \frac{1}{u_i'(w)} E(u_i'(a(Z-1) + w)(Z-1))$$

とすると、 $\varphi_1(a_1^*)=0, \varphi_2(a_2^*)=0$ である。任意の i について $\varphi_i(0)=E(Z)-1$ が成り立つので、 $\varphi_i(a)$ の 曲線は必ず E(Z)-1 を切片に持つ。 $\varphi_i'(a)<0$ であることと $\varphi_1(a_1^*)=E(u_1'(a_1^*(Z-1)+w)(Z-1))=0$ であることを考えると、命題の証明のためには、 $a_1^*\geq 0$ のときには

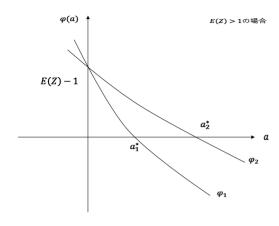
$$\varphi_2(a_1^*) = \frac{1}{u_2'(w)} E(u_2'(a_1^*(Z-1) + w)(Z-1)) \ge 0$$

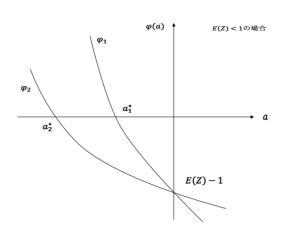
 $a_1^* < 0$ のときには

$$\varphi_2(a_1^*) = \frac{1}{u_2'(w)} E(u_2'(a_1^*(Z-1) + w)(Z-1)) \le 0$$

であることを示せば十分である.

^{*12} 確率支配については後の節で詳しく説明する.





ここで π_1, π_2 を,

$$\pi_1(z) = \frac{u_1'(a_1^*(z-1) + w)}{E(u_1'(a_1^*(Z-1) + w))}$$

$$\pi_2(z) = \frac{u_2'(a_1^*(z-1) + w)}{E(u_2'(a_1^*(Z-1) + w))}$$

とおくと,

$$\int \pi_1(z) \, \mathrm{d}F(z) = \int \pi_2(z) \, \mathrm{d}F(z) = 1$$

と

$$\varphi_i(a_1^*) = \frac{E(u_i'(a_1^*(Z-1)+w))}{u_i'(w)} E((Z-1)\pi_i(Z))$$

が成立する. ここで, $a_1^* \ge 0$ のとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{\pi_2(z)}{\pi_1(z)} \right) \ge 0$$

 $a_1^* < 0 \text{ oz}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{\pi_2(z)}{\pi_1(z)} \right) < 0$$

であることを示せば補題 5.7.3 により証明が完了する. ここで対数をとっても微分係数の符号は変化しないので、

$$\begin{split} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\log \frac{\pi_2(z)}{\pi_1(z)} \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\log (u_2'(a_1^*(z-1)+w)) - \log (u_1'(a_1^*(z-1)+w)) \right. \\ &\left. + \log (E(u_1'(a_1^*(Z-1)+w))) - \log (E(u_2'(a_2^*(Z-1)+w))) \right) \\ &= \left(-\frac{u_1''(a_1^*(z-1)+w)}{u_1'(a_1^*(z-1)+w)} - \left(-\frac{u_2''(a_1^*(z-1)+w)}{u_2'(a_1^*(z-1)+w)} \right) \right) a_1^* \end{split}$$

 u_1 が u_2 と少なくとも同程度にリスク回避的であることより右辺の a_1^* の係数は常に正なので, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\pi_2(z)}{\pi_1(z)}\right)$ の符号は a_1^* の符号に一致する. ///

5.8 予備的貯蓄動機 83

さらに、命題 5.7.2 の投資割合の選択問題では、 $r_{\rm R}(\cdot,u)$ が単調非増加(非減少)ならば、 $|a_1^*|/w_1 \leq |a_2^*|/w_2$ ($|a_1^*|/w_1 \geq |a_2^*|/w_2$)が成立する。特に、 $r_{\rm A}(\cdot,u)$ が一定であるとき a^* は初期資産の規模に関係なく一定である一方、 $r_{\rm R}(\cdot,u)$ が一定であるときは a^*/w が一定であり、初期資産が大きくなるにつれ最適投資額は増加する。実際には富水準が高くなるほどリスクを伴う資産への投資が大きくなる傾向が存在するので、経済成長に伴う株の取り引きの傾向などを調べたいときには、後者が前者より妥当性を持つ。

練習問題 5.7.1 $u_1: \mathbf{R}_{++} \to \mathbf{R}$ および $u_2: \mathbf{R}_{++} \to \mathbf{R}$ が 2 回連続可微分とする. 任意の i=1,2 と $x \in \mathbf{R}_{++}$ に対し, $u_i'(x) > 0$ が成立するとする. 任意の x に対し $r_{\mathbf{A}}(x,u_1) \geq r_{\mathbf{A}}(x,u_2)$ が成立することと $u_2'(x)/u_1'(x)$ の(x に関する)微分が非負であることは同値であることを証明せよ.

練習問題 5.7.2 命題 5.7.2 の残る 2 つの場合を証明せよ.

練習問題 5.7.3 初期資産 w と 2 回連続微分可能な効用関数 u を持つ意思決定者の単純なポートフォリオ決定問題を考えよう。u' は常に正,u'' は常に負と仮定する。安全資産の利回り(利子率)はゼロであるとする。危険資産には 2 種類あり,利回りの分布はいずれも有界区間 $(\underline{z},\overline{z})$ 上でのみ正の値をとる密度関数 f_1 と f_2 によって表されるものとする。 $\int z f_1(z) \mathrm{d}z > 1$ を仮定する。利回りの分布が f_1 で表される危険資産と安全資産に投資できる場合の危険資産への最適投資額を a_1^* ,利回りの分布が f_2 で表される危険資産と安全資産に投資できる場合の危険資産への最適投資額を a_2^* と書くことにする。いずれの資産も空売りができると仮定する。もし $(\underline{z},\overline{z})$ 上で $f_2(z)/f_1(z)$ が z の狭義増加関数ならば, $a_1^* < a_2^*$ が成立することを証明せよ。

練習問題 5.7.4 確率密度関数 f_1 と f_2 はいずれも有界区間 $(\underline{z},\overline{z})$ 上でのみ正の値をとる連続関数であるとする. 対応する累積分布関数を F_1 と F_2 で表す.

- 1. $(\underline{z},\overline{z})$ 上で $f_2(z)/f_1(z)$ は z の狭義増加関数であるならば, $f_1(z^*)=f_2(z^*)$ が成立する $z^*\in(\underline{z},\overline{z})$ がただひとつ存在することを証明せよ.またこのとき,任意の $z\in(\underline{z},z^*)$ に対し $f_1(z)>f_2(z)$ が成立し,任意の $z\in(z^*,\overline{z})$ に対し $f_1(z)< f_2(z)$ が成立することも示せ.
- 2. もし f_1 と f_2 が (a) で述べられた性質を持つならば、任意の $z \in (\underline{z}, \overline{z})$ に対し、 $F_1(z) > F_2(z)$ が成立することを証明せよ。

5.8 予備的貯蓄動機

2 期間の貯蓄決定のモデルを考える。0 期,1 期の消費水準をそれぞれ x_0, x_1 とし,効用関数は $u, v \in \mathcal{U}^2$ を使って $u(x_0) + v(x_1)$ で表されるとする。また,この経済では利回りゼロの債券のみが取引されるものとし,債券の 0 期での購入量を b で表わす。

まずは不確実性の存在しない場合を考える。0 期,1 期の所得の流列 (w_0,w_1) は確定しているとする。このとき、消費者が直面する問題は、

$$\max_{b} \quad u(w_0 - b) + v(w_1 + b)$$

となる. 最適化の1階条件は,

$$u'(w_0 - b) = v'(w_1 + b)$$

となり、これを満たすbを b_1^* とおく.

次に第 1 期の所得に不確実性が存在する場合を考える.このとき所得の流列は確率変数 W_1 を使って (w_0,W_1) と定式化できる.このとき消費者が直面する問題は,

$$\max_{b} u(w_0 - b) + E(v(W_1 + b))$$

であり、最適化の1階条件は、

$$u'(w_0 - b) = E(v'(W_1 + b))$$

である. これを満たす b を b* とおく.

5.8.1 命題 $E(W_1) \leq w_1$ かつ v' が凸関数(すなわち $v''' \geq 0$)ならば $b_1^* \leq b_2^*$ が成立する.

練習問題 5.8.1 上の主張を証明せよ.

5.9 リスクの比較

前節では我々は異なる効用関数間を比較した。本節では異なる確率分布間を比較する。リスクそのものについての比較を勉強することで,リスクに対する態度の比較もしやすくなるので,これらは一種の双対関係にある。前節までと同様,コンパクトな台を持つ確率分布のみを考える。すなわち任意の分布関数 F について,ある $[\underline{x}, \bar{x}] \subset C$ が存在して $F(\underline{x}) = 0$, $F(\bar{x}) = 1$ とする。この仮定を外すことも可能だが,やや面倒である。

5.9.1 1次確率支配

まずは、一方の確率分布がもう一方の確率分布よりも高い収益をもたらす場合を考える.

5.9.1 命題 F,G を累積分布関数とする. このとき,以下の2条件は同値である.

- 1. 任意の $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ に対して $F(x) \leq G(x)$.
- 2. 任意の非減少な効用関数 u に対して $\int_x^{\bar{x}} u(x) \, \mathrm{d}F(x) \ge \int_x^{\bar{x}} u(x) \, \mathrm{d}G(x)$.

これらのうちの一方 (したがって両方) が成り立つとき, F は G を 1 次確率支配 (first-order stochastically dominate) するという.

命題 5.9.1 の証明 まず u が微分可能な場合に、条件 1 がみたされるなら条件 2 もみたされることを示す。 部分積分の公式により、

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(x) dF(x) = \left[u(x)F(x) \right]_{\underline{x}}^{\bar{x}} - \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u'(x)F(x) dx$$
$$= u(\bar{x}) - \int_{x}^{\bar{x}} u'(x)F(x) dx$$

となる.同様にして $\int_x^{\bar x} u(x)\,\mathrm{d}G(x)=u(\bar x)-\int_x^{\bar x} u'(x)G(x)\,\mathrm{d}x$ を得る.ゆえに,

$$\int_{x}^{\bar{x}} u(x) \, dF(x) - \int_{x}^{\bar{x}} u(x) \, dG(x) = \int_{x}^{\bar{x}} u'(x) (G(x) - F(x)) \, dx \ge 0$$

が成り立つ.

u が微分可能でない場合には、微分可能な関数の列 $(u_n)_{n=1,2,\dots}$ であって $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ となるようなものを考えれば、任意の $n=1,2,\dots$ について上の議論が適用でき、連続性から極限をとっても弱い不等号 > は成り立つことが示される.

次に逆を示す.任意の $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ を 1 つとって固定する.u を次で定める:

$$u(y) = \begin{cases} 0 & (y \le x) \\ 1 & (y > x) \end{cases}.$$

5.9 リスクの比較 85

すると,

$$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(y) dF(y) = F(x) \cdot 0 + (1 - F(x)) \cdot 1$$
$$= 1 - F(x)$$

であり、同様に、

$$\int_{x}^{\bar{x}} u(y) \, \mathrm{d}G(y) = 1 - G(x)$$

である. したがって仮定により $1 - F(x) \ge 1 - G(x)$, すなわち $F(x) \le G(x)$ である. ///

この命題の後半の証明は、もとの命題でuの条件として非連続なものも許容したので簡単だった。命題でuとしてはじめから微分可能なものだけを認めるよう要請したならば、条件1から条件2を示すのは容易になる。逆は少し難しくなるが、xでジャンプする関数のかわりに、xの前後で急激に増加する関数をuとしてとってやればやはり証明できる。

条件 1 からわかるように,F が G を 1 次確率支配するとき,F の方が x の高い実現値に対してより高い確率を付与している.特に u として恒等関数 id をとると,条件 2 から (F の平均) $\geq (G$ の平均) である. 逆は真でない.また,1 次確率支配は分布関数に関する順序を定める.この順序は反射性と推移性を満たすが,完備性は満たさないことに注意せよ.

5.9.2 例 確率分布関数 G により表される単純くじと,以下のような複合くじを考えよう.第 1 段階では G に従って帰結 (消費量) を与え,第 2 段階では各実現値 g に対して G に対して G となるような G に従う帰結を与える.この単純くじの帰結はこれら G 段階の帰結の和であるG この「確率的上方シフト」によって得られる分布関数を G とすると,G は G を G 次確率支配する.実際,任意の単調増加関数 G について,

$$\int u(x) dF(x) = \int \left[\int u(y+z) dH_y(z) \right] dG(y)$$

$$\geq \int u(y) dG(y)$$

である *14 . 逆に F が G を 1 次確率支配するような任意の F,G について,ある確率的上方シフトによって G から F を生成することができる.

5.9.3 命題 ある確率空間が存在し、その確率空間上で $X \ge Y$ を確率 1 で満たすような確率変数 $X \sim F$, $Y \sim G$ が存在するとき、F FOSD G.

命題 5.9.3 の証明 確率変数が与えられたとき確率分布を求めることは簡単である。他方のみを示す。F と G が連続で厳密に単調増加すると仮定すると, $[\underline{x}, \bar{x}]$ から [0,1] への全射関数なので,逆関数が存在する。すると, $X = F^{-1}$ と $Y = G^{-1}$ は [0,1] 上の確率変数である.

[0,1] 空間を状態空間とするルベーグ測度を λ とする.X の分布関数は, $\lambda(\{s\in[0,1]\mid X(s)\leq x\})=\lambda(\{s\in[0,1]\mid s\leq X^{-1}x\})=\lambda(\{s\in[0,1]\mid x\leq F(x)\})=\lambda([0,F(x)])=F(x)$ 同様に,Y の分布関数もG である.仮定より $F\leq G$ が確率 1 で成立するので, $X\geq Y$ も確率 1 で成り立つ. ///

5.9.4 命題 次の条件を満たす 2 変数連続同次累積分布関数 $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在するとき,F FOSD G.

 $^{^{*13}}$ 第 1 段階でも帰結を与えるので,複合くじではない.ただし, $(X+Y)_{X\sim F}$ をひとつの複合くじと考えることもできる.

 $^{^{*14}}$ 確率 1 で 0 を与える分布を H_y は 1 次確率支配するから.

- 1. H の第1変数の周辺分布は F
- 2. 任意の x について H の第 2 変数の条件付分布は $H_{2|1}=H_{2|1}(0\mid x)=1$
- 3. 任意の確率変数 $(X,Z) \sim H$ に対し, $X+Z \sim G$

5.9.2 2次確率支配

1次確率支配は利得の大きさの比較を表していた。次に利得のリスクの度合いを比較することを考える。 リスクの比較に集中するために、以下ではF,Gの平均は等しいものとする。すなわち、

$$\int x \, \mathrm{d}F(x) = \int x \, \mathrm{d}G(x)$$

とする. このとき, $\int_x^{\overline{x}} F(x) dx = \int_x^{\overline{x}} G(x) dx$ が成立する.

- 5.9.5 命題 以下の2条件は同値である.
 - 1. 任意の x に対して、 $\int_{\underline{x}}^{x} F(z) dz \leq \int_{\underline{x}}^{x} G(z) dz$.
 - 2. 任意の凹関数 u に対して, $\int u(x) dF(x) \ge \int u(x) dG(x)$. *15

これらのうちの一方(したがって両方)が成り立つとき, F は G を 2 次確率支配 (second-order stochastically dominate) するという.

命題 5.9.5 の証明 命題 5.9.1 の証明から,

$$\int_x^{\bar{x}} u(x) dF(x) = u(\bar{x}) - \int_x^{\bar{x}} u'(x)F(x) dx$$

である. 右辺第2項にさらに部分積分を施すと.

$$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u'(x)F(x) dx = \left[u'(x) \int_{\underline{x}}^{x} F(z) dz \right]_{\underline{x}}^{\overline{x}} - \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u''(x) \left(\int_{\underline{x}}^{x} F(z) dz \right) dx$$
$$= u'(\overline{x}) \int_{x}^{\overline{x}} F(x) dx - \int_{x}^{\overline{x}} u''(x) \left(\int_{x}^{x} F(z) dz \right) dx.$$

したがって,

$$\int_x^{\bar{x}} u(x) \, \mathrm{d}F(x) = u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) \int_x^{\bar{x}} F(x) \, \mathrm{d}x + \int_x^{\bar{x}} u''(x) \left(\int_x^x F(z) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x$$

が成り立つ. 同様に,

$$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(x) dG(x) = u(\overline{x}) - u'(\overline{x}) \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} G(x) dx + \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u''(x) \left(\int_{\underline{x}}^{x} G(z) dz \right) dx$$

も成り立つ. したがって,

$$\int u(x) dF(x) - \int u(x) dG(x)$$

$$= -u'(\bar{x}) \left(\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} F(x) dx - \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} G(x) dx \right) + \int u''(x) \left(\int_{\underline{x}}^{x} F(z) dz - \int_{\underline{x}}^{x} G(z) dz \right) dx$$

 $^{^{*15}}$ MWG, Proposition 6.D.2 では「任意の非減少な凹関数に対して」とあるが、これは誤植であり「任意の凹関数に対して」でよい.

5.9 リスクの比較 87

が成り立つが, ここで第1項の括弧内は,

$$\int_{x}^{\bar{x}} F(x) dx - \int_{x}^{\bar{x}} G(x) dx = \left[x(F(x) - G(x)) \right]_{x}^{\bar{x}} - \int_{x}^{\bar{x}} x d(F(x) - G(x)) = 0$$

なので、結局、上の式は,

$$\int u(x) dF(x) - \int u(x) dG(x) = \int u''(x) \left(\int_x^x F(z) dz - \int_x^x G(z) dz \right) dx$$

となって、条件1と条件2が同値であることがわかる.

///

F が G を 2 次確率支配するとき,条件 2 からリスク回避的な個人は分布 F を G よりも少なくとも同程度に好むことがわかる。また, $u(x)=-x^2$ とおくと (F の分散) $\leq (G$ の分散)が従う*16. 逆は成立しない。最後に,2 次確率支配の同値条件の中でも応用上よく用いられる平均維持的分散について述べる。

5.9.6 例 単純くじ F を考える.また第 1 段階で F に従って実現値を与え,第 2 段階では各実現値 x に対して $\int z \, \mathrm{d} H_x(z) = 0$ となるような H_x に従って z を与える複合くじ*¹⁷を考える.やはり合計で x+z を与える.この複合くじの単純化くじを G とすると,G を F の平均維持的分散 (mean preserving spread) という.このとき,F は G を 2 次確率支配する.実際,u を凹関数として,

$$\int u(x) dF(x) = \int u \left(\int (x+z) dH_x(z) \right) dF(x)$$

$$\geq \int \left(\int u(x+z) dH_x(z) \right) dF(x)$$

$$= \int u(x) dG(x)$$

である.

また, F が G を 2 次確率支配するとき, F から G を生成するような平均維持的分散が存在することが知られている*18.

 $^{^{*16}}$ この関数は単調増加でないため、効用関数としての解釈はしづらい。したがって、この主張は単に 2 次確率支配の含意の 1 つを示すものと考えるのが妥当であろう。当然のことだが、この主張は命題 5.9.5 の証明が u が単調増加であるかどうかに依存していないことに拠っている。

^{*17} これ自身は複合くじではない.

^{*18} 詳しくは Rothschild and Stiglitz(1970) を参照せよ.

参考文献

- [1] Patrick Billingsley, Probability and Measure Third Edition, Wiley-Interscience.
- [2] David M. Kreps, Notes on the Theory of Choice, Westview Press.
- [3] David M. Kreps, *Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets*, Princeton University Press.
- [4] Mark J. Machina, "Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved", *The Journal of Economic Perspectives*, vol. 1 (1987), 121–154.
- [5] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.
- [6] Michael Rothschild and Joseph E. Stiglitz, "Increasing risk: I. A definition", *Journal of Economic Theory*, vol. 2 (1970), 225–243.
- [7] Ariel Rubinstein, Lecture Notes in Microeconomic Theory, Princeton University Press.
- [8] 林貴志, ミクロ経済学, ミネルヴァ書房.

第6章

一般均衡理論

6.1 イントロダクション

Debreu, *Theory of Value* は一般均衡理論への絶好の入門書である。また、この章の内容は MWG では第 15–17 章、Kreps では第 14–15 章に相当する。

6.1.1 一般均衡理論の目的

- 消費者と企業をひとつのフレームワークの中で捉え、どのようにして価格メカニズムが「均衡」を達成するかを分析したい.
- 異なる経済主体や異なる財の市場間の相互作用を論じたい.

6.1.2 一般均衡理論の手法と特徴

- 経済のファンダメンタルズ(資源賦存量・選好関係・生産可能性等)の記述から始める.
 - 生産のための投入財の価格等も、最初から与えられているのではなくモデルの中で決定される.
- 価格受容的な行動を仮定する.
 - (自らの行動によって価格を変えられる)独占企業等が存在しない.
- 匿名性を仮定する.
 - 売買価格などは個人によって異なることはなく,同一.
 - 他方,繰り返しゲームなどゲーム理論では「誰の」行動かが均衡戦略を定義する際に重要なので, 匿名性は満たされない.
- 価格や取引を決めるメカニズムを強調しない.
 - 金融や企業金融の分野とは異なり、予算制約のみを記述し、実際にどのような手順で売買が行われるかは記述しない.
- 均衡の分析に対して幾分抽象的で数学的な方法を採る.

6.2 経済,効率性と均衡

この節の内容は MWG の第 16 章 C 節に相当する.

6.2.1 経済の記述

経済のファンダメンタルズの記述から始めよう.L 種類の財と I 人の消費者と J 社の企業 $(L,I,J<\infty)$ からなる「経済」を考える*1.各消費者 $i=1,\ldots,I$ は消費集合 $X_i\subset \mathbf{R}^L$ と X_i の上で定義された選好関係 \succsim_i によって記述される.各企業 $j=1,\ldots,J$ は生産集合 Y_j で記述される.各企業 $j=1,\ldots,j$ の生産集合 Y_j をすべて足し合わせたもの $\sum_{j=1}^J Y_j$ を総生産集合, $\sum_{j=1}^J Y_j + \{\bar{\omega}\}$ を生産可能性集合と呼ぶ.L 種類の財の総初期賦存量 (aggregate endowments) は $\bar{\omega}\in\mathbf{R}^L$ で表される.これらの組を経済(economy)といい, $((X_i,\succsim_i)_{i=1}^I,(Y_j)_{j=1}^J,\bar{\omega})$ と表す.特に,任意の $j=1,2,\ldots,J$ に対して $Y_j=\{0\}$ であるような経済を純粋交換経済(pure exchange economy)という*2.

この経済における配分 (allocation) とは、ベクトル $(x_1,\ldots,x_I,y_1,\ldots,y_J)\in X_1\times\cdots\times X_I\times Y_1\times\cdots\times Y_J$ のことである*3. 配分が実行可能 (feasible) であるとは、

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j$$

を満たすことである. これは,

$$\sum_{i=1}^I x_i \in \sum_{j=1}^J Y_j + \{\bar{\omega}\}$$

と同値であり、この意味において、消費配分の実行可能性には、各生産者の生産集合 Y_j を知らずともよく、生産可能性集合 $\sum_{j=1}^J Y_j + \{\bar{\omega}\}$ のみが本質的である.

実行可能配分が満たすべき,等式 $\sum x_i = \bar{\omega} + \sum y_j$ について,もう少し詳しく見てみよう.財の種類には,生産の工程に応じて,原材料,中間生産財,最終消費財がある.典型的には下のように,まず,(1)原材料は $\bar{\omega}$ として経済に与えられ,企業によって投入され,中間生産財が生産される.次に,(2)中間生産財は企業によって投入され,さらなる中間生産財や,最終消費財が生産される. $\sum y_j$ において中間生産財を表す成分がすべて $\bar{0}$ であるのは,投入を負,産出を正で量り,企業間でその量を足し合わせているためであって,「生産していない」ことや「取引していない」ことを意味するのではないことに注意されたい.最後に,(3)最終消費財が消費者に受け渡され,消費される.

$$\begin{pmatrix} + \\ \vdots \\ + \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ + \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ + \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} + \\ \vdots \\ + \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ - \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{中間生産財}$$

「ワルラス配分」とは、大雑把にいえば価格メカニズムによって得られる実行可能な配分のことである(厳密な定義は後述する). また、他の交換メカニズムからは他の実行可能な配分が得られるだろう.

^{*1} この場合の財の種類とは,物理的な特性のみを指しているのではない.それが供せられる場所,時点や状態等も含んだ概念である

 $^{*^2}$ 文献によっては,任意の $j=1,\ldots,J$ に対して $Y_j=-{m R}_+^L$ であるような経済や J=0 であるような経済を純粋交換経済ということもある.

^{*3} $(x_1,\ldots,x_I,y_1,\ldots,y_J)\in X_1\times\cdots\times X_I\times Y_1\cdots\times Y_J$ とは、各 $i=1,\ldots,I$ に対して $x_i\in X_i$ かつ各 $j=1,\ldots,J$ に対して $y_j\in Y_j$ となることである.

6.3 非反射的選好関数と産出可能性集合による経済の記述

本節では、より parsimonious な経済のファンダメンタルズの記述を与えよう。L種類の財とI人の消費者と「生産可能性集合」から成る「経済」を考える*4、L種類の財は原材料・中間財・最終消費材を含んでいる。私的保有は特定化されていない。各消費者 $i=1,\ldots,I$ は消費集合 $X_i\subset \mathbf{R}^L$ と X_i の上で定義された選好関係 \succ_i によって記述される。 \succ_i は非反射的 (irreflexive) と後で仮定するので、 $x_i\succ_i z_i$ は z_i より厳密に好ましい」と解釈する。消費ベクトルのL成分のうち、投入物(生産要素)や中間財の成分はゼロである。

経済の全ての初期保有量と生産技術を利用して達成し得る生産・投入計画の集合(\mathbf{R}^L の部分集合)を総産出可能性集合 (total output possibility set) と呼び,W で表す。達成可能な消費ベクトルの和はW に属する。また, $\sum_{i=1}^I X_i \supset W$ は仮定しない。これらの組を経済 (economy) といい, $((X_i,\succ_i)_{i=1}^I,W)$ と表す。このような定式化は Gale and Mas-Colell (1975) による。しかし,彼らは総産出可能集合を(標準的な定式化と区別することなく)生産集合と呼び,Y で表した。

この経済における配分 (allocation) とは、ベクトル $(x_1, \ldots, x_I) \in X_1 \times \cdots \times X_I$ のことである*5.

6.3.1 定義 $(x_1,\ldots,x_I)\in X_1\times\cdots\times X_I$ とする. (x_1,\ldots,x_I) が実行可能 (feasible) であるとは, $\sum\limits_{i=1}^I x_i\in W$ を満たすことである.

初期保有と生産技術が異なる2つの経済において、もし総産出可能性集合が一致するならば2つの経済で実行可能な配分は同じになる.したがって、経済全体で達成可能な生産・投入計画が重要である.

6.3.2 定義 実行可能配分 (x_1, \ldots, x_I) が実行可能配分 (x_1^*, \ldots, x_I^*) をパレート改善するとは,ある i について $x_i \succ x_i^*$ が成立し,かつ $x_i^* \succ x_i$ が成立するような i が存在しないことである.

配分の望ましさに関する基準のひとつはパレート効率性である。資源配分メカニズムの望ましさは、それが達成する配分の望ましさによって決められると帰結主義的に考えるなら、この基準は資源配分メカニズムに関する基準ともいえる。

6.3.3 定義 実行可能配分 (x_1^*, \dots, x_I^*) がパレート効率的であるとは、それをパレート改善する実行可能配分が存在しないことである.

この概念を用いれば、ある実行可能な配分がパレート効率的であることをその配分をパレート改善できないことだと言い換えることができる.

パレート効率性に関して注意すべき点をいくつか述べる。まず、パレート効率性の定義に価格は含まれない。すなわち消費配分のみに関係する性質である。また、パレート効率性の概念には企業の利益等が考慮されていないことに注意されたい。一見すると部分均衡論と一般均衡論においてパレート効率性の概念は矛盾しているように思われるが、部分均衡論での生産者余剰は株主の厚生を測っており、一般均衡論では株主も消費者であって消費者の厚生は (x_1,\ldots,x_I) によって完全に評価されているので、別途生産者余剰を使って株主の厚生を測る必要はないと解釈することができる。また、パレート効率性にとっても、個々の生産集合 Y_i よりも総産出可能性集合 W こそが本質的である。

^{*4} この場合の財の種類とは、物理的な特性のみを指しているのではない.それが供せられる場所、時点や不確実性も含んだ概念である.

 $^{^{*5}}$ $(x_1,\ldots,x_I)\in X_1 imes\cdots imes X_I$ とは、各 $i=1,\ldots,I$ に対して $x_i\in X_i$ が成立することである.

パレート効率性は衡平性 (equity) を無視しているので効率性の概念として弱いものだと考えられることがある.極論すれば,一人の消費者がすべての財を得て他の消費者は何も得られない場合も「効率的」であるからである.

他方、情報の非対称性があるときには任意の実行可能配分が実際に達成されうるとは限らないので、どの実行可能配分によってもパレート改善されないことを要請するパレート効率性は強すぎる概念と考えられることがある。契約理論・情報の経済学・不完備市場理論の文脈ではパレート効率性より弱い効率性概念が用いられる。これは、資源制約以外の条件も実行可能性に要請されるからである。たとえば、情報の経済学において登場するように、個人の特性に応じて保険料率をかえることが望ましいが、個人の特性を観察し特定するには限界がある、という問題がある。また社会的、法的にそのような行為が許されないこともあるので、単に資源制約条件さえ満たせば実行可能というわけではない。この場合、資源制約以外の条件を実行可能性に課した上で、パレート改善する実行可能な配分が存在しないような(実行可能)配分を効率的と定義すると、この効率性は上述のパレート効率性よりも弱い条件である。

6.3.4 定義 実行可能配分 (x_1^*,\dots,x_I^*) が配分効率性を満たすとは, $\sum\limits_{i=1}^I x_i = \sum\limits_{i=1}^I x_i^*$ を満たし,なおかつ (x_1^*,\dots,x_I^*) をパレート改善する実行可能配分 (x_1,\dots,x_I) が存在しないことである.

配分効率性はパレート効率性より弱い概念であり, (x_1^*,\ldots,x_I^*) がパレート効率的であるならば,配分効率的でもある.

6.3.5 定義 実行可能配分 (x_1^*,\dots,x_I^*) が生産効率性を満たすとは, $x-\sum\limits_{i=1}^I x_i^* \in \mathbf{R}_+^L \backslash \{0\}$ を満たす $x \in W$ が存在しないことである.

すなわち,総産出可能性集合 W に属する任意の x について, $\sum\limits_{i=1}^{I}x_{i}^{*}$ のある ℓ 番目の成分は x の ℓ 番目の成分は x の x

- **6.3.6 定義** 実行可能配分 (x_1^*,\ldots,x_I^*) と価格ベクトル $p\in \mathbf{R}^L$ が以下の条件 (1) と (2) を満たすならば,価格均衡 (price equilibrium) を成すという.
 - (1) 任意の $x \in W$ について $p \cdot x \leq p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^*\right)$ が成立する.
 - (2) 任意の i と任意の $x_i \in X_i$ について $x_i \succ_i x_i^*$ ならば $p \cdot x_i > p \cdot x_i^*$ が成立する.

この定義で条件 (1) は収入最大化を,条件 (2) は選好最大化を意味している.原材料や中間生産財も L 種類の財の一部であるので,上述の収入最大化条件は,最終消費財のみに関する収入最大化条件を含意する.もし経済の総初期保有量 $\overline{\omega}$ がモデルで明示的に与えられているならば,経済の総生産集合は $W-\{\overline{\omega}\}$ であり,条件 (1) は $W-\{\overline{\omega}\}$ 上での利潤最大化条件に一致する.条件 (2) は,もし x_i が x_i^* よりも好ましのであれば, x_i を購入するための支出は x_i^* を購入するための支出を上回るという意味である.条件 (1),(2) は共に価格ベクトルに対して 0 次同次である.実際,任意の $\lambda \in \mathbf{R}_+$ に対して, $\lambda p \cdot y_j \leq \lambda p \cdot y_j^*$ と条件 (1) は同値であり,かつ,同様に $\lambda p \cdot x_i \leq \lambda p \cdot x_i^*$ と $p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^*$ は同値である.したがって,均衡価格 p は 0 次同次である.

価格均衡配分 (x_1^*,\dots,x_I^*) は「価格メカニズム」によって達成される実行可能な配分であるが,定義ではそのメカニズムがいったいどのようなものなのかについては触れられていない.しかし,価格ベクトル p は 2 種類の財に関する「交換比率」を表しているものと捉えられる.もし財の「価値」をそれで何が買えるかと定義したなら,その価値とは価格に他ならない.その意味で,一般均衡理論とは明示的な交換メカニズムを仮定しない価値の理論だといえる.「手番」を強調する展開型非協力ゲームと対比されるべき概念である.

6.3.7 注意

- 1. ここでは、所有構造は明示されていないことに注意されたい. 価格均衡は、所得・富の源泉のありかたによらない均衡概念である.
- 2. $p \cdot (\sum_i x_i^*) = \sum_i p \cdot x_i^*$ が成立している. $p \cdot (\sum_i x_i^*)$ は総生産量の価値額,すなわち国民所得ないし GDP にあたる. 一方, $\sum_i p \cdot x_i^*$ は各消費者の支出の合計,すなわち総支出にあたる. したがって, 三面等価の原則のうちの,「総生産額=総支出額」を表している.
- 3. 完全競争市場が実現していることにも注意されたい. 消費計画を変更しても価格ベクトルpは変わらないと消費者は想定している. 同様に生産計画を変更しても価格ベクトルpは変わらないと企業は想定している. このことは定義の2つの条件において,両辺で同じpを使っていることから分かる.
- 4. 完備市場が仮定されている.このことは,企業側から見ると総産出可能性集合に属する任意の要素が実現可能であることに現れている.財の投入と産出の時点が異なる場合,企業が借り入れ制約に直面しているときには実行できない要素が存在しうる.また消費者側から見ると,予算制約が 1 本の不等式 $p \cdot x_i \le p \cdot x_i^*$ で与えられていることに現れている.富水準 $p \cdot x_i^*$ を任意の財の購入に充てることができるからである.
- 5. 売買量の制約もない.

上記の定義は、Debreu の第 6 章の均衡の定義であるが、MWG の Definition 16.B.4 と同値である. MWG の価格均衡の定義は次で与えられる.

- **6.3.8 定義** 実行可能配分 (x_1^*, \ldots, x_I^*) と価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^L$ が価格均衡であるとは,ある所得再配分 $(w_i)_{i=1}^I$ が存在し,次の式が成立していることを言う.
 - 1. 任意の $x \in W$ に対して、 $p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^*\right) \ge p \cdot x$ が成り立つ.
 - 2. 任意の i と任意の $x_i \in X_i$ に対して、 $\dot{\mathsf{t}} \cup p \cdot x_i \leq w_i$ ならば $x_i^* \succsim_i x_i$ が成り立つ.
 - 3. $\sum_{i=1}^{I} w_i = p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^*\right)$.

練習問題 6.3.1 定義 6.3.6 と定義 6.3.8 が同値であることを確認せよ.

以下の命題は,パレート効率性や価格均衡概念を議論する際には,生産可能性集合 $\sum_{j=1}^J Y_j + \{\bar{\omega}\}$ さえ考えれば十分であることを意味する.

- **6.3.9 命題** L 財,I 消費者,J 企業より成る経済 $E=((X_i,\succsim_i)_i,(Y_j)_j,\bar{\omega})$ と,L 財,I 消費者,1 企業より成る経済 $\hat{E}=\left((X_i,\succsim_i)_i,\sum_j Y_j+\{\bar{\omega}\},0\right)$ を考える.以下のことを証明せよ.
 - 1. $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ が E の実行可能配分ならば, $\left(x_1, \ldots, x_I, \sum_j y_j + \bar{\omega}\right)$ は \hat{E} の実行可能配分である.逆に, $(x_1, \ldots, x_I, \hat{y})$ が \hat{E} の実行可能配分ならば, $\sum_j y_j + \bar{\omega} = \hat{y}$ であるようなある $(y_1, \ldots, y_J) \in Y_1 \times \cdots \times Y_J$ が存在して $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ が E の実行可能配分である.
 - 2. $(x_1,\ldots,x_I,y_1,\ldots,y_J)$ が E のパレート効率的配分ならば, $\left(x_1,\ldots,x_I,\sum_j y_j+\bar{\omega}\right)$ は \hat{E} のパレート効率的配分である.逆に, (x_1,\ldots,x_I,\hat{y}) が \hat{E} のパレート効率的配分ならば, $\sum_j y_j+\bar{\omega}=\hat{y}$ であるようなある $(y_1,\ldots,y_J)\in Y_1\times\cdots\times Y_J$ が存在して $(x_1,\ldots,x_I,y_1,\ldots,y_J)$ が E のパレート効率的配分である.
 - 3. $(x_1,\ldots,x_I,y_1,\ldots,y_J,p)$ が E の価格均衡ならば, $\left(x_1,\ldots,x_I,\sum_j y_j+\bar{\omega},p\right)$ は \hat{E} の価格均衡である. 逆に, $(x_1,\ldots,x_I,\hat{y},p)$ が \hat{E} の価格均衡ならば, $\sum_j y_j+\bar{\omega}=\hat{y}$ であるようなある $(y_1,\ldots,y_J)\in Y_1\times\cdots\times Y_J$ が存在して $(x_1,\ldots,x_I,y_1,\ldots,y_J,p)$ が E の価格均衡である.

命題 6.3.9 の証明

- 1. $(x_1,\ldots,x_I,y_1,\ldots,y_J)$ が経済 E の実行可能配分であるとき, $\hat{y}=\sum_j y_j+\bar{\omega}$ と定めると, $\hat{y}\in\sum_j Y_j+\{\bar{\omega}\}$ を満たし, (x_1,\ldots,x_I,\hat{y}) 経済 \hat{E} の実行可能配分である. 逆に, (x_1,\ldots,x_i,\hat{y}) が経済 \hat{E} の実行可能配分であるとき, $\sum_j Y_j+\{\bar{\omega}\}$ の定義により,ある $(y_1,\ldots,y_J)\in Y_1\times\cdots\times Y_J$ が存在して $\hat{y}=\sum_j y_j+\bar{\omega}$ が成り立つ.したがって, $\sum_i x_i=\sum_j y_j+\bar{\omega}$ が成り立ち, $(x_1,\ldots,x_I,y_1,\ldots,y_J)$ は経済 E の実行可能配分である.
- 2. 経済 E と経済 \hat{E} のパレート効率的配分の定義を比べると、相違なる点は実行可能配分のみであることが分かる. 既に 1 において、経済 E と経済 \hat{E} の実行可能消費配分が同値であることを示した. したがって、経済 E と経済 \hat{E} のパレート効率的配分も同値である.
- 3. 既に 1 で実行可能配分に関する同値性は示したので、ここでは利潤最大化条件に関する同値性のみを示せば十分である.

経済 E における利潤最大化条件が満たされているとする。 $\hat{y} \in \hat{Y}$ と $\hat{y}^* \in \hat{Y}$ を任意にとると、定義より $\hat{y} = \sum_j y_j + \bar{\omega}$ を満たす $(y_1,\ldots,y_j) \in Y_1 \times \cdots \times Y_J$ と $\hat{y}^* = \sum_j y_j^* + \bar{\omega}$ を満たす $(y_1^*,\ldots,y_J^*) \in Y_1 \times \cdots \times Y_J$ が存在して、経済 E の利潤最大化条件よりこれらは任意の j に対して $p \cdot y_i^* \geq p \cdot y_i$ を満たす。この両辺を j について足し合わせると、

$$\sum_{j} p \cdot y_j^* = p \cdot \sum_{j} y_j^* = p \cdot y^* \ge p \cdot y = p \cdot \sum_{j} y_j = \sum_{j} p \cdot y_j$$

である.この両辺に定数 $p\cdot\bar{\omega}$ を加えると, $p\cdot(y^*+\bar{\omega})=p\cdot\hat{y}^*\geq p\cdot\hat{y}=p\cdot(y+\bar{\omega})$ である.これらは $\hat{y}^*\in\sum_j Y_j+\{\bar{\omega}\}$, $\hat{y}\in\sum_j Y_j+\{\bar{\omega}\}$ を満たすので,経済 \hat{E} の利潤最大化条件が満たされることが分かる.

次に逆を示す。 $p \cdot \hat{y} \leq p \cdot \hat{y}^*$ が任意の $j \geq \hat{y} \in \sum_j Y_j + \{\bar{\omega}\}$ に対して成り立つ。このとき 定義より $\hat{y} = \sum_j y_j + \bar{\omega}$ を満たす $(y_1, \dots, y_j) \in Y_1 \times \dots \times Y_J$ と $\hat{y}^* = \sum_j y_j^* + \bar{\omega}$ を満たす $(y_1^*, \dots, y_j^*) \in Y_1 \times \dots \times Y_J$ が存在して, $p \cdot \left(\sum_j y_j + \bar{\omega}\right) \leq p \cdot \left(\sum_j y_j^* + \bar{\omega}\right)$ を満たす.特に任意の $\hat{y} \in \hat{Y}$ に対して成り立つことに注意すると,任意の $k \geq y_k \in Y_k$ に対して、

$$p \cdot \left(\sum_{j \neq k} y_j^* + y_k + \bar{\omega} \right) \le p \cdot \left(\sum_j y_j^* + \bar{\omega} \right)$$

が成り立つ. したがって、任意の j と $y_j \in Y_j$ に対して $p \cdot y_j \leq p \cdot y_i^*$ である.

///

練習問題 6.3.2 L 財,I 消費者,J 企業より成る経済($(X_i,\succsim_i)_i,(Y_j)_j,\bar{\omega}$)を考えよう.任意の i に対し,消費者 i は第 1 財と第 2 財のみを消費する,すなわち $X_i\subseteq \mathbf{R}_+^2\times\{0\}^{L-2}$ と仮定する.また,第 1 財と第 2 財にのみ初期保有量が存在する,すなわち $\bar{\omega}\in\mathbf{R}_+^2\times\{0\}^{L-2}$ と仮定する.そこで, $X_i=\widehat{X}_i\times\{0\}^{L-2}$ かつ $\bar{\omega}=(\hat{\omega},0,\ldots,0)$ と書くことにする.ただしここで $\widehat{X}_i\subseteq\mathbf{R}_+^2$ かつ $\hat{\omega}\in\mathbf{R}_+^2$ である.また, \succsim_i を \widehat{X}_i 上に制限したものを $\widehat{\succsim}_i$ と書く.さらに, $\widehat{Y}\subseteq\mathbf{R}^2$ を, $\widehat{Y}\times\{0\}^{L-2}=\sum_j Y_j\cap \left(\mathbf{R}^2\times\{0\}^{L-2}\right)$ で定める.

- 1. $(y_1,y_2,\ldots,y_J) \in Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_J$ とする。もし,ある $(x_1,x_2,\ldots,x_I) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_I$ が存在して $((x_1,x_2,\ldots,x_I),(y_1,y_2,\ldots,y_J))$ が実行可能配分ならば, $\sum_j y_j \in \hat{Y} \times \{0\}^{L-2}$ であることを証明せよ。
- 2. 経済 $((X_i, \succsim_i)_i, (Y_j)_j, \bar{\omega})$ と,2 財,I 消費者,1 企業より成る経済 $\left((\hat{X}_i, \grave{\succsim}_i)_i, \hat{Y}, \hat{\omega}\right)$ の価格均衡の 関係を明らかにせよ.

6.3.1 厚生経済学の基本定理

ここでは価格メカニズムが満たす性質についてみていく.

6.3.10 定義 選好関係 \succ_i が局所非飽和 (local non-satiation (LNS)) であるとは、任意の $x_i^* \in X_i$ と $\varepsilon > 0$ に対してある $x_i \in X_i$ が存在し、 $||x_i - x_i^*|| < \varepsilon$ かつ $x_i \succ_i x_i^*$ が成立することである.

6.3.11 補題 \succ_i は局所非飽和かつ負に推移的とする. $x_i^* \in X_i$ かつ,任意の $x_i \in X_i$ について, $x_i \succ_i x_i^*$ ならば $p \cdot x_i > p \cdot x_i^*$ が成立するとする. このとき,任意の $x_i \in X_i$ について,もし $x_i^* \succ x_i$ が成立しないなら, $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$ が成立する.

補題 **6.3.11** の証明 仮に $p \cdot x_i が成立したとする.局所非飽和性によりある <math>x_i'$ が存在し, $x_i' \succ_i x_i$ かつ $p \cdot x_i' が成立する.負の推移性により,<math>x_i^* \succ_i x_i$ または $x_i' \succ_i x_i^*$ が成立するが, x_i の仮定により,前者は成立しない.また, x_i^* の最大化条件により, $x_i' \succ_i x_i^*$ も成立しない.これは矛盾. ///

6.3.12 定理 (厚生経済学の第 1 基本定理) 任意の i について \succ_i は局所非飽和的かつ負に推移的とする. このとき,任意の価格均衡配分はパレート効率的である.

自明なことではあるが、価格均衡を定義する際に使う選好関係と、パレート効率性を定義するときに使う選 好関係は同じであることに注意せよ.「Patternalistic ではない」とも言われる.

定理に述べられている仮定は 2 つであるが、価格均衡自体に多くの強い仮定が課されていること $(6.3.7\,$ の $1\sim4)$ に注意が必要である.

定理 **6.3.12** の証明 $((x_1^*,\cdots,x_I^*),p)$ を価格均衡とする. 仮に (x_i^*,\cdots,x_I^*) はパレート効率的でないとする. (x_1,\cdots,x_I) はこれをパレート改善する実行可能配分とすると,ある i について $x_i\succ_i x_i^*$ が成り立つので

$$p \cdot x_i > p \cdot x_i^*$$

が成り立つ、補題 6.3.11 により、全ての i について $p\cdot x_i \geq p\cdot x_i^*$ が成立する、 $I<\infty$ なので、全ての i に関する和をとれば

$$\sum_{i} p \cdot x_{i} > \sum_{i} p \cdot x_{i}^{*}.$$

よって.

$$p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}\right) > p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right)$$

が成立する. ところが, $\sum\limits_i x_i \in W$ なので, これは均衡の W 上の収入最大化条件に矛盾する. ///

価格均衡概念を使っているので、私的所有のあり方に依存しないことに注意せよ.

定理 6.3.12 では財の種類や消費者の数が有限だと仮定されている。まず,無限種類の財が存在する場合に厚生経済学の第 1 基本定理は成立するのかについて見ていく。財空間を線形空間 $\ell^{\infty}=\{(x_1,x_2,\cdots)\in \mathbf{R}^{\infty}\mid \sup_{\ell}|x_{\ell}|<\infty\}$ と定義する。 ℓ^{∞} 上には上限ノルム $||x||=||x||_{\infty}=\sup_{\ell}|x_{\ell}|$ を与える。以下では, ℓ^{∞} を財空間とする経済 $((X_i,\succ_i)_i,W)$ を考える。このとき以下の定理が成り立つ。

6.3.13 定理 (厚生経済学の第1基本定理) 任意の i について \succ_i は負に推移的かつ $||\cdot||_{\infty}$ に関して局所非飽和的とする. $F:\ell^{\infty}\to \mathbf{R}$ は線形かつ $||\cdot||_{\infty}$ に関して連続とする. このとき, $((x_1^*,\cdots,x_I^*),F)$ が価格均衡ならば, (x_1^*,\cdots,x_I^*) はパレート効率的である.

一方で、 $I=\infty$ のとき、厚生経済学の第 1 基本定理が成り立たないことがある。たとえば、 $I=\infty$ である世代重複モデル (overlapping generations model) では厚生経済学の第 1 基本定理は必ずしも成り立たない。

6.3.14 例 (世代重複モデル) 可算無限個の財・消費者を考える $(L=\infty,I=\infty)$. 第 i 世代の消費者は第 i 期 (若年期) と第 i+1 期 (老年期) においてのみ消費可能であるとし $(X_i=\{0\}\times\dots\times\{0\}\times R_+\times R_+\times\{0\}\times\dots)$, その選好は効用関数 $u_i(x_i)=x_i^i+x_i^{i+1}$ によって表現されるとする.ここで, $x_i=(x_i^1,x_i^2,\dots)$ である.財は提供されている時点で区別されている. $W=\{(1,1,\dots)\}$ とする.このとき以下のような $(x_1^*,x_2^*,\dots)\in X$ と $p\in \mathbf{R}^\infty$ は価格均衡をなす.

$$x_1^* = (1, 0, 0, 0, \dots),$$

$$x_2^* = (0, 1, 0, 0, \dots),$$

$$x_3^* = (0, 0, 1, 0, \dots),$$

$$\vdots$$

$$0 < p^1 \le p^2 \le p^3 \le \dots$$

 $x_1=(a,b,0,\ldots)$ とすると, $x_1\succ_i x_1^*$ ならば, $u_1(x_1)=a+b>u_1(x_1^*)=1$ より a,b は a+b>1 を満たす. $p^1a+p^2b\geq p^1a+p^1b>p^1$ が成立するので, $x_1\succ_i x_1^*$ ならば $p\cdot x_1>x_1^*$ が成立する. $i\geq 2$ についても同様な結果が成立するため,価格均衡の条件(1)は満たされる.また, $\sum_i x_i^*=\{(1,1,\cdots)\}=W$ なので,条件(2)も満たされている.

ところが (x_1^*, x_2^*, \ldots) はパレート効率的ではない. 事実,以下の実行可能配分 $(x_1, x_2, \ldots) \in X$ は (x_1^*, x_2^*, \ldots) をパレート改善する.

$$x_1 = (1, 1, 0, 0, 0, \ldots),$$

 $x_2 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots),$
 $x_3 = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots),$
:

なぜなら、 $u_1(x_1)>u_1(x_1^*)$ かつ任意の $i\geq 2$ について $u_i(x_i)=u_i(x_i^*)$ が成立するからである。なお、この配分 (x_1,x_2,\ldots) はパレート効率的であり、 $p^1=p^2\geq p^3\geq p^4\cdots$ を満たす任意の p と価格均衡を構成する。価格均衡の条件 (2) は明らかであり、条件 (1) を確認する。 $x_1'=(a,b,0,0,\ldots)$ とすると、 $x_1'\succ_1 x_1$ ならば $u_1(x_1')=a+b>u_1(x_1^*)=2$ より a,b は a+b>2 を満たすので、 $x_1'\succ_1 x_1$ ならば $p^1a+p^2b>p^1+p^2$ が成立する。 $x_2'=(0,a,b,0,\ldots)$ とすると、 $x_2'\succ_2 x_2$ ならば $u_2('x_2)=a+b>u_2(x_2^*)=1$ より a,b は a+b>1 を満たすので、 $x_2'\succ_2 x_2$ ならば $ap^2+bp^3\geq ap^3+bp^3>p^3$ が成立する。 (a>0,b>0,a+b>1) は $x_2'\succ_2 x_2$ を満たし、 $p^2a+p^3b\geq p^3a+p^3b>p^3$ が成り立つ。以下 $i\geq 3$ の場合は i=2 の場合と同様である。

それゆえ,経済主体の数や財の種類が無限であるからといって,厚生経済学の第 1 基本定理が全く成り立たなくなるわけではない.価格均衡配分がパレート効率的であるか否かは付随する価格ベクトルの下で初期 賦存 $\bar{\omega}$ の価値額が有限であるか否かに依存する.たとえば価格を $p^1=p^2=1, p^i=1/2^{i-2}, i=3,4,\dots$ と定めると $p\cdot \bar{\omega}=2+\sum_{i=3}^\infty 1/2^{i-2}=3<\infty$ であり, $((x_1,x_2,\dots),p)$ は均衡を構成する.ただし,これは均衡配分がパレート効率的であるための十分条件であり,必要条件ではない.この例では価格が正で一定,つまり,ある $\bar{p}>0$ に対し, $p^i=\bar{p}$ としても $((x_1,x_2,\dots),p)$ は価格均衡であるが, $p\cdot \bar{\omega}=\infty$ が成立する.

厚生経済学の第1基本定理の逆は成り立つのだろうか.この疑問に答えるものが,厚生経済学の第2基本 定理である.

まず、パレート効率性より弱い概念である弱パレート効率性を定義し、次に価格均衡よりも弱い概念である価格準均衡 (price quasi-equilibrium) を定義しよう. これらの概念は技術的なものに過ぎないが、ワルラス均衡の存在問題にも現れる重要な概念である.

- **6.3.15** 定義 実行可能配分 (x_1, \cdots, x_I) が実行可能配分 (x_1^*, \cdots, x_I^*) を強い意味でパレート改善するとは,任意の i について $x_i \succ_i x_i^*$ を満たすことである.
- **6.3.16** 定義 実行可能配分 (x_1^*, \cdots, x_I^*) が弱パレート効率的であるとは、それを強い意味でパレート改善するような実行可能配分が存在しないことである.
- **6.3.17** 定義 (x_1^*, \dots, x_T^*) を実行可能配分, $p \neq 0$ を価格ベクトルとする. もし
 - 1. 任意の $x \in W$ について $p \cdot x \leq p\left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right)$
 - 2. 任意の i と $x_i \in X_i$ について, $x_i \succ_i x_i^*$ ならば $p \cdot x_i \ge p \cdot x_i^*$

が成立するのであれば、 (x_1^*, \dots, x_I^*) と p は価格準均衡 (price quasi-equilibrium) を成すという.

条件 1 は収入最大化を意味しているが,条件 2 は選好最大化を意味しているわけではない.ここでは,条件 2 を選好準最大化と呼ぶことにしよう.選好準最大化条件は選好最大化条件よりも弱い条件である.つまり,選好最大化条件が満たされていれば必ず選好準最大化条件は満たされる.しかし,選好準最大化条件は $x_i \succ_i x_i^*$ かつ $p \cdot x_i = p \cdot x_i^*$ であることを許容しているので一般に逆は成り立たない.したがって,価格均衡は必ず価格準均衡でもあるが,その逆は一般には成り立たない.

では、それらの概念が一致するための条件とは何だろうか。大雑把には、もし任意の消費者 i が価格ベクトル p の下で $p \cdot x_i^*$ 未満の支出で「生きる」ことができれば、実はそれらは同値である*6. これについて厳密に述べておこう。

6.3.18 定義 $x_i^* \in X_i$ が価格ベクトル p の下で最小所得条件 (minimum income condition) を満たすとは、 ある $x_i \in X_i$ が存在して、

$$p \cdot x_i$$

となるときをいう.

- **6.3.19** 命題 (x_1^*, \dots, x_I^*) と p が価格準均衡を成すとする.このとき,もし以下の 2 条件が満たされるならば,それらは価格均衡を成す.
 - 1. 任意の i と任意の $x_i \in X_i$ について $\{z_i \in X_i \mid z_i \succ_i x_i\}$ は X_i の開集合である.
 - 2. 任意のiに対して、 x_i^* が価格ベクトルpの下で最小所得条件を満たす。
- **6.3.20 定義** 選好が凸であるとは、任意の $x \in X$ に対して集合 $\{z \in X : z \succ x\}$ が凸集合であることをいう.
- **6.3.21** 定義 実行可能配分 $(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*)$ と価格ベクトル p が価格擬均衡 (price pseudoequilibrium) をなすとは、次の条件を満たすときをいう.

 $^{^{*6}}$ もし $p\cdot x_i^*$ が「生きる」のに最低限必要な所得であるなら,定義 6.3.17 の 2 番目の条件は必ず満たされる.

- 1. 任意の $j \ge y_i \in Y_i$ に対して、 $p \cdot y_i \le p \cdot y_i^*$ が成り立つ.
- 2. 任意の i と $x_i \in X_i$ に対して、もし $x_i \succsim_i x_i^*$ ならば $p \cdot x_i \ge p \cdot x_i^*$ が成り立つ.

厚生経済学の第2基本定理を証明するために次の定理を用いる.

6.3.22 定理 (分離超平面定理) \mathbf{R}^L の凸部分集合 A,B が $A\cap B=\varnothing$ を満たすとする. このときある $p\in\mathbf{R}^L\setminus\{0\}$ とある $c\in\mathbf{R}$ が存在して,

任意の $a \in A, b \in B$ について $p \cdot b \le c \le p \cdot a$

が成り立つ.

6.3.23 定理 (厚生経済学の第 2 基本定理) 任意の i について \succ_i は局所非飽和的かつ凸とし,W を凸集合とする.任意の弱パレート効率的配分 (x_1^*,\cdots,x_I^*) に対し,ある $p\in \mathbf{R}^L\setminus\{0\}$ が存在して, $((x_1^*,\cdots,x_I^*),p)$ は価格準均衡を構成する.

定理の証明に入るまえに、この定理の意味と、この定理がおいている仮定の意味の検討をしておこう.

この定理は、任意のパレート効率的配分が達成可能であることを意味している。すなわち、価格メカニズムがパレート効率性以外の他の制約や条件を均衡配分には課すことはない。さらに、任意のパレート効率的配分が分権的 (decentralized) な価格メカニズムによって達成可能であるということを意味している。つまり、消費者には自分の選好の最大化、企業には自分の利潤の最大化を追求させることで、パレート効率的配分が達成できるということである。

ただしそれには一括税 (lump-sum transfer) が可能ならばという条件が必要である。この定理で存在が保証されている p によって富 (所得) の配分 $(p \cdot x_1^*, \dots, p \cdot x_I^*)$ が決まっているから,こういう富の配分が不可能なら,定理は現実には適用できない.すなわち,この富の再配分が可能であるときに限り定理は有用である.

選好の凸性は、消費の多様性を好むものと解釈できる。消費集合 X に属する 2 つの消費計画 $x,x' \in X$ に対し、その凸結合 $\alpha x + (1-\alpha)x'$ ($\alpha \in [0,1]$) は、両端の消費計画のあいだをとったものだが、それが両端の消費計画(のうち好ましくないほう)と少なくとも同等以上に選好されるということは、ある特定の財だけを多く消費する極端な消費計画よりも、いろいろの財を消費する多様な消費を好むということである。このことは動学的なモデルでは、ある特定の期に多く消費することよりも平準化された消費を好むことを意味する。

総産出可能性集合の凸性は、収穫逓増を排除する.総産出可能性集合 W に 0 が属するなら、W に属する任意の生産計画 $y \in W$ に対し、 αy ($\alpha \in [0,1]$) は、0 と y との凸結合 $\alpha y + (1-\alpha)0$ に他ならないので、W が凸集合ならこれは W に属する.この条件は収穫逓減 (非逓増) を意味する.

第2定理が総産出可能性集合の凸性を仮定する必要があるのは、収穫逓増産業がある経済では、分権化は 達成できないからである。電気や水道などの収穫逓増産業への政府の介入はこのことにより正当化される。

ただし,W が凸集合であれば十分であり,個々の Y_j が凸集合でなくとも W が凸集合であることがある (凸化効果) ため,すべての j について Y_j が凸集合であることは W が凸集合であるための十分条件であって必要条件ではない.加えて凸化効果が存在することを考慮すると,W が凸集合であるという仮定は強いものではないと考えられる.

定理 6.3.23 の証明 $A_i = \{x_i \in X_i \mid x_i \succ_i x_i^*\}$, $A = \sum_i A_i$ とすると,A は凸集合である.弱パレート効率性より $A \cap W = \emptyset$ を示す. $A \cap W \neq \emptyset$ とし, $z \in A \cap W$ とする. $z = \sum_i z_i \in W$ である (z_1, \ldots, z_I) が存在する.さらに, $z \in A$ より任意の i について $z_i \succ_i x_i^*$ が成立する.これは (x_1^*, \cdots, x_I^*) が弱パレート効率的であることに矛盾する.

分離超平面定理より、ある $p \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$ と $c \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $a \in A$ と $b \in W$ について

$$p \cdot a \geq c \geq p \cdot b$$

が成立する.まず, $p\cdot\left(\sum_i x_i^*\right)=c$ を示そう. $\sum_i x_i^*\in W$ なので, $c\geq p\cdot\left(\sum_i x_i^*\right)$.他方,局所非飽和性により,任意のi についてある X_i 上の点列 $(x_i^n)_n$ が存在し,任意のn について $x_i^n\succ_i x_i^*$ かつ $n\to\infty$ のとき $x_i^n\to x_i^*$ が成立する. $\sum_i x_i^n\in A$ なので, $p\cdot\left(\sum_i x_i^n\right)\geq c$.内積の連続性より, $p\cdot\left(\sum_i x_i^*\right)\geq c$.以上を合わせて, $p\cdot\left(\sum_i x_i^*\right)=c$.よって,任意の $x\in W$ について $p\cdot x\leq p\cdot\left(\sum_i x_i^*\right)$ が成立する.これは収入最大化条件に他ならない.

選好準最大化を示すために, i を一つ固定し, $x_i \succ_i x_i^*$ とする. 先に定義した x_i^n を使えば, $x_i + \sum_{k \neq i} x_k^n \in A$. よって,

$$p \cdot \left(x_i + \sum_{k \neq i} x_k^n\right) \ge p \cdot \left(\sum_{k=1}^I x_k^*\right)$$

連続性より,

$$p \cdot \left(x_i + \sum_{k \neq i} x_k^*\right) \ge p \cdot \left(\sum_{k=1}^I x_k^*\right)$$

なので、 $p \cdot x_i \ge p \cdot x_i^*$ が成り立つ、これで選好準最大化条件が満たされることがわかった、 ///

定理では全ての消費者の選好 \succ_i が凸であることを仮定したが、実際には定理の証明で登場する A が凸集合であることが重要である。総産出可能性集合の場合と同じように、個々の消費者の選好が凸でなくとも凸化効果によって A が凸集合になることがある。

6.4 無限種類の財が存在する場合

一般均衡理論を使用する動学マクロでは,無限期間を扱うために財の種類も無限となり,無限種類の財が存在する場合について厚生経済学の第 1 基本定理や第 2 基本定理がどのような条件の下で成立するかを考えることは重要である.

財空間を線形空間 $\ell^{\infty}=\{(x_1,x_2,\cdots)\in \mathbf{R}^{\infty}\mid \sup_{\ell}|x_{\ell}|<\infty\}$ と定義する. ℓ^{∞} 上には上限ノルム $||x||=||x||_{\infty}=\sup_{\ell}|x_{\ell}|$ を与える. 以下では, ℓ^{∞} を財空間とする経済($(X_i,\succ_i)_i,W$)を考える.

6.4.1 定理 (厚生経済学の第 1 基本定理) 任意の i について \succ_i は負に推移的かつ $||\cdot||_\infty$ に関して局所非飽和的とする. $F:\ell^\infty \to \mathbf{R}$ は線形かつ $||\cdot||_\infty$ に関して連続とする. このとき, $((x_1^*,\cdots,x_I^*),F)$ が価格均衡ならば, (x_1^*,\cdots,x_I^*) はパレート効率的である.

この定理は定理 6.3.12 と同様に証明できる.ただし,定義により F は全ての財ベクトル $x \in \ell^\infty$ に有限の価格 F(x) を与えることに注意せよ.

6.4.2 定理 (厚生経済学の第 2 基本定理) 任意の i について \succ_i は $||\cdot||_\infty$ に関して連続かつ局所非飽和的で凸とする. W は凸集合で $||\cdot||_\infty$ について内部が空集合でないとする. つまり, $\mathrm{int}W \neq \varnothing$. 更に, (x_1^*,\cdots,x_I^*) は弱パレート効率的だとする. このとき,ある線形かつ $||\cdot||_\infty$ について連続である $F:\ell^\infty \to \mathbf{R}$ が存在し, $((x_1^*,\cdots,x_I^*),F)$ は価格準均衡を構成する.

厚生経済学の第 2 基本定理が成立するには, $\mathrm{int}W \neq \varnothing$ または定理 6.3.23 の証明の A について $\mathrm{int}A \neq \varnothing$ を仮定することが必要である.

 $\mathrm{int}W \neq \varnothing$ の仮定について考える. $\ell_+^\infty = \{x \in \ell^\infty \mid \text{全ての}\ \ell$ について $x_\ell \geq 0\}$ と定義する.

$$\operatorname{int}\ell_+^\infty = \{x \in \ell^\infty \mid \text{ある}\delta > 0 \text{ が存在し、任意の }\ell$$
について $x_\ell > \delta\}$

が成立するので空でない. $\mathrm{int}\ell_+^\infty \neq \varnothing$ なので自由可処分 $W-\ell_+^\infty \subseteq W$ を仮定すれば, W の $||\cdot||_\infty$ についての内部は空集合でない.

次に, $\ell^1=\{x\in \mathbf{R}^\infty\mid \sum_\ell |x_\ell|<\infty\}$ とし, ℓ^1 上で $||x||_1=\sum_\ell |x_\ell|$ というノルムを定義する. $\ell^2=\{x\in \mathbf{R}^\infty\mid \sum_\ell |x_\ell|^2<\infty\}$ とし, ℓ^2 上で $||x||_2=\sqrt{\sum_\ell |x_\ell|^2}$ というノルムを定義する. $(\ell^1,||\cdot||_1)$ と $(\ell^2,||\cdot||_2)$ は完備なノルム空間(Banach 空間)である.また, $c_0=\{x\in \mathbf{R}^\infty\mid \lim_\ell x_\ell=0\}$ とする.この とき,

$$\ell^1 \subset \ell^2 \subset c_0 \subset \ell^\infty$$

が成立し, ℓ_+^1 の $||\cdot||_1$ に関する内部と ℓ_+^2 の $||\cdot||_2$ に関する内部はいずれも空集合である.よって,自由可処分を仮定しても W は空かもしれないので,上記の厚生経済学の第 2 定理の証明は適用できない.

厚生経済学の第 2 基本定理に登場する F が内積表現を持つかについて考えていく。これはすなわち, $F(x)=\sum_\ell p^\ell x^\ell=p^1 x^1+p^2 x^2+\dots$ と表現することができるかという問題である。 $p^1 x^1+p^2 x^2+\dots$ は 割引現在価値を表すと考えられるが,実際にこの形を割引現在価値と見なしてよいためには F が内積表現を持つ必要がある。ただ F が存在するというだけでなく,それが経済学的に意味のある表現を持つかという点でこれは重要な問題である。

任意の $(x,p) \in \ell^{\infty} \times \ell^{1}$ について

$$\left| \sum_{\ell=1}^{\infty} p^{\ell} x^{\ell} \right| \le ||p||_1 \cdot ||x||_{\infty} < \infty$$

が成立する. $(x,p)\to \sum_\ell p_\ell x_\ell$ は双 1 次形式であり,p を固定すれば,x について線形である. $F_p(x)=\sum_\ell p^\ell x^\ell$ と書くと, $F_p:\ell^\infty\to \mathbf{R}$ は線形である.また,

$$|F_p(x)| \le ||p||_1 ||x||_{\infty}$$

より F は $||\cdot||_\infty$ について連続である.更に, $x_{(\ell)}=(x^1,\cdots,x^\ell,0,0,\cdots)$ とすると,任意の $x\in\ell^\infty$ と $p\in\ell^1$ について

$$\lim_{\ell \to \infty} F_p(x_{(\ell)}) = F_p(x)$$

これは線形連続である $F:\ell^\infty\to \mathbf{R}$ が内積表現をもつための必要条件である.ここで,特に上限ノルムに関しては, $x_{i(\ell)}\to x_i$ ($\ell\to\infty$ のとき) が成立しないことに注意せよ.例えば, $x_i=1$ のとき,任意の ℓ について $||x_{i(\ell)}-x_i||_\infty=1$ が成立する.以下では,この必要条件を満たさない線形連続写像が存在することを示そう.

 $1 = (1, 1, \dots) \$ $2 \$ $5 \$ $2 \$

$$\{x+b\mathbb{1}\mid,b\in \mathbf{R},x\in c_0\}=\{x\in\ell^\infty\mid\lim_\ell x^\ell$$
が存在する $\}$

が成立する.そこで,任意の $x\in\ell^\infty$ について, $\lim_\ell x^\ell$ が存在する場合, $F(x)=\lim_\ell x^\ell$ とおくと,F は線形であり, $|F(x)|\leq ||x||_\infty$ より連続である.Hahn-Banach 定理より,ある線形写像 $G:\ell^\infty\to \mathbf{R}$ が存在し,任意の $x\in\ell^\infty$ について $|G(x)|\leq ||x||_\infty$ が成立する.よって,G は連続である. $\lim_\ell x^\ell$ が存在する場合,G(x)=F(x) が成立する.

しかし、任意の ℓ について $G(\mathbb{1}_{(\ell)}) = F\left(\mathbb{1}_{(\ell)}\right) = 0 \neq \mathbb{1} = G(\mathbb{1})$. よって、 $\lim_{\ell} G(\mathbb{1}_{(\ell)}) \neq G(\mathbb{1})$. 従って、G は内積表現を持たない.

しかし、 ℓ^2 は少しよい性質をもつ、任意の $x \in \ell^2$ と $y \in \ell^2$ について

$$\left| \sum_{\ell} x_{\ell} y_{\ell} \right| \le ||x||_2 \cdot ||y||_2 < \infty$$

なので、双 1 次性の議論で ℓ^2 の双対空間は ℓ^2 それ自身である (ℓ^2 は self-dual という). よって、 ℓ^2 上の任意の連続線形関数は ℓ^2 の元との内積として表される.

次に,厚生経済学の第 2 基本定理の条件だけでは価格均衡において F が内積表現を持たない例を示す. I=1 とし,効用関数を $u_1(x)=\liminf_{\ell}x_1^\ell$ と定める. $X_1=\ell_+^\infty$ とし $W=\{1\}-\ell_+^\infty$ とする.つまり,各時点において 1 種類の財が存在し,その量も 1 である.この ℓ^∞ を財空間とする経済($((X_i,\succ_i)_i,W)$)に第 2 基本定理を適用しよう. $x_1^*=1$ とするとこれはパレート効率的配分である.よって,ある線形連続な $F:\ell^\infty\to \mathbf{R}$ が存在し, x_1^* と F は価格準均衡を構成する.この F が内積表現を持たないことを示そう.価格準均衡を構成するので $F\neq 0$.そこで, ℓ 番目の要素のみを 1 とするベクトルをとって,

$$F(0,\cdots,0,1,0,0,\cdots)=p^{\ell}$$

とおくと, $p=(p^1,p^2,\cdots)\in \ell^1_+$.なぜなら,無料可処分の仮定より, $p^\ell<0$ ならば収入最大化に反するためである.また,任意の L について

$$F(1) - \sum_{\ell=1}^{L} p^{\ell} = F(0, \dots, 0, 1, 1, \dots) \ge 0$$

なので、 $\sum_{\ell=1}^{\infty} p^{\ell} < \infty$. 以下では、全ての ℓ について $p^{\ell} = 0$ を示す.

ある ℓ^* について $p^{\ell^*}>0$ とする. $p\in\ell^1_+$ なので,ある L が存在し, $\sum_{\ell=L}^\infty p_\ell < p_{\ell^*}$ が成立する.そこで, ℓ^* 番目の要素を -1,L 以降の要素を 1 とする $z\in\ell^\infty$ を

$$z = (0, \cdots, 0, -1, 0, \cdots, 0, 1, 1, \cdots)$$

と定義する. F が内積表現を持つ場合, $F(z) = \sum_{\ell} p_{\ell} z_{\ell} < 0$. よって,

$$F(\mathbb{1} + z) < F(\mathbb{1})$$

他方, $u(1+z) = \liminf_{\ell} (1+z) = 1+z > 1 = \liminf_{\ell} 1 = u(1)$ なので,(選好準最大化条件に)矛盾する。 よって, $p_{\ell} = 0$. これは全ての ℓ について成立するので,F = 0 が成立し,価格準均衡の条件に矛盾する。 したがって,F は内積表現を持たいない.

以下では、価格(準)均衡における価格 $F:\ell^\infty \to \mathbf{R}$ が内積表現をもつための十分条件を与えよう.

6.4.1 無限次元 ℓ^{∞} において均衡価格が ℓ^{1} に属するための条件

6.4.3 定義 (Trancation continuity) $X_i = \ell_+^{\infty}$ とする. 任意の i, 任意の $x_i \in X_i$ と $z_i \in X_i$ に関して $x_i \succ_i z_i$ ならば,十分大きな ℓ に対して $x_{i(\ell)} \succ_i z_i$ が成立するとき, \succ_i が trancation continuity(切断に関する連続性)を満たすという.

このような \succ_i は Mackey topology に関して連続である.

6.4.4 定理 次の2つの仮定をおく.

(1) 任意の i について $X_i = \ell_+^\infty$ かつ \succ_i が $||\cdot||_\infty$ に関して局所非飽和的

///

(2) 任意の $x \in W$ と任意の L に対してある $z_L \in W$ と L' が存在して、任意の $\ell \leq L$ に対して $x^\ell = z^\ell$ が成立し、任意の $\ell > L'$ に対して $z^\ell = 0$ が成立する (Possibility of Eventual Transation).

 $((x_1^*,\cdots,x_I^*),F)$ を価格準均衡とする.このとき,内積表現をもつ線形な G が存在し, $((x_1^*,\cdots,x_I^*),G)$ もまた価格準均衡であり,任意の i について $G(x_i^*)=F(x_i^*)$ が成立する.さらに,もしある $\delta>0$ が存在し, $\sum x_i^*-\delta \mathbf{1}\in \ell_+^\infty$ ならば,F は内積表現をもつ.

6.4.5 定義 F が非負であるとは、任意の $x \in \ell_+^{\infty}$ について $F(x) \ge 0$ を満たすことである.

6.4.6 補題 $F:\ell^\infty \to {\bf R}$ は線形かつ $||\cdot||_\infty$ に関して連続と仮定する. さらに,F は非負であると仮定する. 任意の ℓ について $p^\ell = F((0,\cdots,\frac{1}{\ell^{\rm MB}},0,0,\cdots))$ とおくと, $p=(p^1,p^2,\cdots)\in\ell^\infty_+$ である. また $G:\ell^\infty \to {\bf R}$ を

$$G(x) = \sum_{\ell} p^{\ell} x^{\ell}$$

と定義すると、G と F - G は非負である.

任意の $x \in \ell^{\infty}$ に対して、もしある L が存在して任意の $\ell > L$ に対して $x^{\ell} = 0$ が成立するならば、G(x) = F(x) が成立する.

補題 **6.4.6** の証明 F が非負であることにより $p^\ell \geq 0$ が成立する.よって,G も非負である. $F-G \geq 0$ が非負であることを示すために $x \in \ell_+^\infty$ とする.任意の ℓ について $x-x_{(\ell)} \in \ell_+^\infty$ なので

$$F(x) = F\left(x_{(\ell)}\right) + F\left(x - x_{(\ell)}\right) \ge F\left(x_{(\ell)}\right) = G\left(x_{(\ell)}\right).$$

 $\ell \to \infty$ のとき $G(x_{(\ell)}) \to G(x)$ なので $F(x) \ge G(x)$.

6.4.7 補題 $H:\ell^{\infty}\to \mathbf{R}$ は線形, $||\cdot||_{\infty}$ に関して連続かつ非負(任意の $x\in\ell_{+}^{\infty}$ について $H(x)\geq0$)と仮定する.H(1)=0 ならば, $H\equiv0$ (つまり,任意の $x\in\ell^{\infty}$ について H(x)=0)が成立する.

補題 **6.4.7** の証明 任意の $x \in \ell^{\infty}$ について

$$||x||_{\infty}1\!\!1-x\in\ell_+^\infty$$

$$||x||_{\infty} \mathbb{1} + x \in \ell_{\perp}^{\infty}$$

が成立する. よって,

$$H(||x||_{\infty} \mathbb{1} - x) \ge 0$$

$$H(||x||_{\infty} 1 + x) \ge 0$$

従って, $H(||x||_{\infty}\mathbb{1}) \geq H(x) \geq -H(||x||_{\infty}\mathbb{1})$ が成り立つ.H の線形性より $H(||x||_{\infty}\mathbb{1}) = ||x||_{\infty}H(\mathbb{1})$ なので, $0 \geq H(x) \geq 0$ が成立し,H(x) = 0 が得られる. ///

定理 6.4.4 の証明 まず, $W-\ell_+^\infty\subseteq W$ から $F\geq 0$ が得られる.実際,もし $F\geq 0$ が成立しないのであれば,ある $x\in\ell_+^\infty$ が存在し,F(x)<0 が成り立つ.よって,F(-x)>0 が成立する. $\sum_i x_i^*-x\in W$ なので, $F\left(\sum_i x_i^*-x\right)>F\left(\sum_i x_i^*\right)$ が成立し,収入最大化条件に矛盾する.

補題 6.4.6 のように G を F から構成する.このとき,任意の i と $x_i \in X_i$ について $x_i \succ_i x_i^*$ ならば, $G(x_i) \geq F(x_i^*)$ が成立することを背理法で示す.切断に関する連続性により,十分大きな ℓ につい

て、 $x_{i(\ell)} \succ_i x_i^*$ が成り立つ。もし $G(x_i) < F(x_i^*)$ ならば、十分大きな ℓ について、 $G(x_{i(\ell)}) < F(x_i^*)$. $G(x_{i(\ell)}) = F(x_{i(\ell)})$ なので、これは選好準最大化条件に矛盾する。よって、 $G(x_i) \geq F(x_i^*)$.

選好関係が $||\cdot||_{\infty}$ に関して局所非飽和的であることより,ある点列 $(x_i^n)_n$ が存在し,任意の n について $x_i^n \succ_i x_i^*$ かつ $||x_i^n - x_i^*||_{\infty} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立する.前段落の結果により,任意の n について $G(x_i^n) \geq F(x_i^*)$ が成立する.n に関して極限をとれば, $G(x_i^*) \geq F(x_i^*)$ が得られる.

また、 $x_i^* \in \ell_+^\infty$ と補題 6.4.6 より $G(x_i^*) \leq F(x_i^*)$ である.よって、 $G(x_i^*) = F(x_i^*)$. 従って、任意の i について $x_i \succ_i x_i^*$ ならば $G(x_i) \geq G(x_i^*)$ が成り立つ.つまり、任意の i について x_i^* は G の下で選好準最大化条件を満たす.また、

$$G\left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right) = \sum_{i} G(x_{i}^{*}) = \sum_{i} F(x_{i}^{*}) = F\left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right)$$

 $x\in W$ とする. 任意の L に対して仮定 (2) のように z_L を定める. $z_L\in W$ なので,収入最大化条件より $F(z_L)\leq F(\sum_i x_i^*)$ が成立する. 加えて,任意の $\ell>L'$ に対して z^ℓ であるので $F(z_L)=G(z_L)$ が成立する.これらのことより, $G(z_L)\leq F(\sum_i x_i^*)$ が成立する. $\ell\to\infty$ とすれば $G(z_L)\to G(x)$ なので $G(x)\leq F(\sum_i x_i^*)$ が成立する.よって,任意の $x\in W$ について補題 6.4.6 と F に関する利潤(収入)最大化条件より

$$G(x) \le F(x) \le F\left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right) = G\left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right)$$

. つまり,G の下で $\sum_i x_i^*$ は利潤(収入)最大化条件を満たす.よって, $((x_1^*,\cdots,x_I^*),G)$ も価格準均衡である.

定理の後半部分を示すために $\delta>0$ かつ $\sum_i x_i^*-\delta \mathbb{1}\in \ell_+^\infty$ とする.また,H=F-G と書くと,補題 6.4.6 より H は非負,連続かつ線形である.さらに,

$$0 = F\left(\sum_i x_i^*\right) - G\left(\sum_i x_i^*\right) = H\left(\sum_i x_i^*\right) \ge H(\delta \mathbb{1}) \ge 0$$

が成立する. よって, H(1)=0 であり, 補題 6.4.7 より H=0 が得られる. よって, $F\equiv G$ が成り立つ. ///

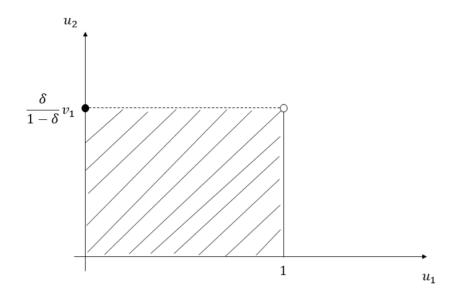
6.4.8 例 (Non-trivial な) 均衡が存在しない 2 人経済の例 (cf. Araujo (1985)) I=2 とする. $x_1,x_2\in\ell_+^\infty$ について

$$u_1(x_1) = \liminf_{\ell} x_1^{\ell}$$

$$u_2(x_2) = \sum_{\ell} \delta^{\ell} v(x_2^{\ell})$$

とする.ここで $\delta \in (0,1)$ であり, $v: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ は連続・厳密に単調増加・凹関数であるとする.また, $W = \{1\} - \ell_+^\infty$ とする.Utility possibility set は閉(コンパクト)ではない.

図 6.1 Utility Possibility Set



このとき,(0,1) は唯一の効率的配分かつパレート効率的配分である.v は厳密に単調増加関数なので,(0,1) はパレート効率的である.実際, x_1 のある ℓ 成分が $x_1^{\ell} > 0$ を満たす場合, $x_1^{\ell} = 0$ として, $x_2^{\ell} + x_1^{\ell}$ を新しい x_2^{ℓ} とすれば,元の配分 (x_1,x_2) はパレート改善できる.よって,(0,1) 配分は唯一のパレート効率的配分である.厚生経済学の第 2 定理により,これは唯一の価格均衡配分でもある.

6.5 私的所有経済

 $\left((X_i,\succ_i)_{i=1}^I,W\right)$ という経済を考える.全ての i について $X_i\subset \mathbf{R}^L$ であり, $W\subset \mathbf{R}^L$ は非空である.収入関数 $\alpha:\mathbf{R}^L\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ を次のように定義する.

$$\alpha(p) = \sup_{x \in W} p \cdot x$$

6.5.1 定義 $i=1,\cdots,I$ について $\alpha_i:\mathbf{R}^L\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ とする. $(\alpha_1,\cdots,\alpha_I)$ が $\left((X_i,\succ_i)_{i=1}^I,W\right)$ の私 的所有構造であるとは,任意の p について

$$\alpha(p) = \sum_{i} \alpha_i(p)$$

が成立することである.

6.5.2 例 (標準的私的所有経済) 消費者 i の初期保有量を $\omega_i \in \mathbf{R}^L$ とし、生産者 j の生産集合を $Y_j \in \mathbf{R}^L$ とする、このとき、

$$W = \sum_{i} \omega_i + \sum_{j} Y_j$$

と書ける. 任意の i,j についてある $\theta_{ij} \geq 0$ が存在し、任意の j について $\sum_i \theta_{ij} = 1$ が成立するとする.

$$\alpha_i(p) = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(p)$$

6.5 私的所有経済 107

と定義する. ただし, $\pi_j(p) = \sup_{y_j \in Y_j} p \cdot y_j$ である. この場合, 任意の $p \in \mathbf{R}^L$ について

$$\sum_{i} \alpha_{i}(p) = \sum_{i} \left(p \cdot \omega_{i} + \sum_{j} \theta_{ij} \pi_{j}(p) \right) = p \cdot \sum_{i} \omega_{i} + \sum_{j} \pi_{j}(p) = p \cdot \sum_{i} \omega_{i} + \pi(p) = \alpha(p)$$

が成立する. ただし, $\pi(p) = \sup_{y \in \sum\limits_{i} Y_{j}} p \cdot y$ である.

 $(\omega_1,\cdots,\omega_I,Y_1,\cdots,Y_J,(\theta_{ij})_{ij})$ の代わりに $(\omega_1',\cdots,\omega_I',Y_1',\cdots,Y_J',(\theta_{ij}')_{ij})$ を考えよう.

$$\sum_{i} \omega_i + \sum_{j} Y_j = \sum_{i} \omega_i' + \sum_{j} Y_j'$$

とすると、これら二つの経済は同じ総産出可能性集合をもつが、私的保有構造だけ異なる.

6.5.3 例 (標準的でない私的所有経済) 標準的私的所有経済を $(\omega_i, (\theta_{ij})_j)_i$ と記述する. さらに,各企業 j は額面 $b_j \geq 0$ の社債を発行したとする. この社債のうち消費者 i は $\eta_{ij} \geq 0$ を保有しているとする. ここでは社債を発行して原材料を購入し,生産活動の結果得られる産出物を Y_j の元である y_j が表していると解釈する. 社債の所有者は満期に実際は

$$\min\{b_j, p \cdot y_j^*\} \ge 0$$

を得る. $b_j > p \cdot y_j^*$ は債務不履行を表す. $\pi_j(p) = p \cdot y_j^* \ge 0$ を仮定すると、有限責任 (limited liability) より株主は

$$p \cdot y_j^* - \min\{b_j, p \cdot y_j^*\} = \max\{p \cdot y_j^* - b_j, 0\}$$

を得る. よってこのとき,

$$\alpha_i(p) = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \max\{\pi_j(p) - b_j, 0\} + \sum_j \eta_{ij} \min\{b_j, \pi_j(p)\}$$

と書ける.

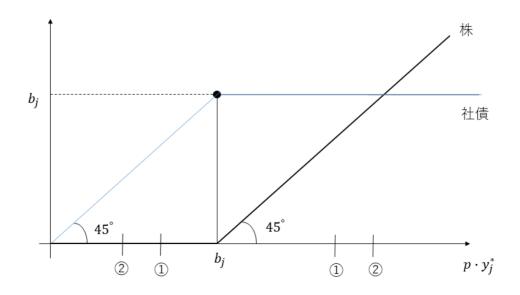


図 6.2 ①と②は収入の二つの分布を表す. いずれの分布でも,低いと高い利潤は $\frac{1}{2}$ 確率で得られるとする. 分布②は分布①の mean preserving spread である. 横軸の①と②は異なる生産計画の収入(確率的)を表している.

図 6.2 も示唆しているように、株主の方が債券保有者よりも大きなリスクを伴う生産計画②を好む傾向がある.これは株主と債権者の利害の不一致の一例である.

6.5.4 例 (標準的でない私的所有経済、税金と補助金) 標準的私的所有経済を $(\omega_i,(\theta_{ij})_i)_i$ とする.

$$\beta_i(p) := p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(p)$$

と定義する. 標準的私的所有経済の場合, $\alpha_i = \beta_i$ だが, ここでは β_i を税込み所得(税引き,補助金足し前)と解釈する. $\delta_i(p)$ を p の下での消費者 i の控除額とする. これは実は p に依存しないとしてもよいし, ある $\zeta_i \in X_i$ が存在し, $\delta_i(p) = p \cdot \zeta_i$ が成立すると仮定してもよい.

写像 $\tau(\cdot,p): \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ を用いて,p の下で控除後の所得(富水準)がw であるときの納税額を $\tau(w,p)$ とする.また,任意の (w,p) について $0 \le \tau(w,p) \le w$ と仮定する.よって, $\tau(0,p) = 0$ である.

$$\frac{\partial \tau}{\partial w}(w,p)$$

は限界税率を表し,

$$\frac{\tau(w,p)}{w+\delta_i(p)}$$

(もしくは $\frac{\tau(w,p)}{w}$)は平均税率を表すことに注意せよ.税収は全ての消費者に等しく還元されるとすると,

$$\alpha_i(p) = \beta_i(p) - \tau \left(\max\{\beta_i(p) - \delta_i(p), 0\}, p \right) + \frac{1}{I} \sum_{h=1}^{I} \tau \left(\max\{\beta_h(p) - \delta_h(p), 0\}, p \right)$$

が成立する. 特に.

$$\sum_{i} \alpha_{i}(p) = \sum_{i} \beta_{i}(p) = \alpha(p)$$

が成立することに注意せよ.

仮に、全ての i について $\delta_i \equiv 0$ かつある $t \in [0,1]$ が存在し、全ての w について $\tau(w,p) = tw$ が成立するならば、 $\beta_i(p) > 0$ のとき

$$\tau \left(\max\{\beta_i(p) - \delta_i(p), 0\}, p\right) = t\beta_i(p)$$

が成立する. よって,

$$\alpha_i(p) = (1 - t)\beta_i(p) + \frac{t}{I} \sum_h \beta_h(p)$$

$$= (1 - t) \left(p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(p) \right) + \frac{t}{I} \left(p \cdot \sum_h \omega_h + \sum_j \pi_j(p) \right)$$

$$= p \cdot \left((1 - t)\omega_i + \frac{t}{I} \sum_h \omega_h \right) + \sum_j \left((1 - t)\theta_{ij} + \frac{t}{I} \right) \pi_j(p)$$

が成り立つ.

$$\omega_i' = (1 - t)\omega_i + \frac{t}{I} \sum_h \omega_h$$
$$\theta_{ij}' = (1 - t)\theta_{ij} + \frac{t}{I}$$

とおけば.

$$\alpha_i(p) = p \cdot \omega_i' + \sum_j \theta_{ij}' \pi_j(p)$$

が得られるので、これは標準形の特殊なケースであることがわかる.

6.5 私的所有経済 109

6.5.1 ワルラス均衡の存在の証明

これから $(\alpha_1, \dots, \alpha_I)$ という私的所有構造を所与として,選好関係 \succ_i について完備性と推移性の仮定を置かずにワルラス均衡の存在を証明する.標準的な証明法では,(超過)需要関数(対応)に不動点定理を適用するが,選好関係に完備性などを要求しない場合,この方法は適用できない.なぜなら,最適な消費ベクトルの集合(需要対応の像)が凸とは限らないからである.

6.5.5 例 (非凸値需要対応の簡単な例) L=2 として、2 財を考える。 $X_i=\mathbf{R}_+^2=X$ と書く、 $u_1:X\to\mathbf{R}$ 、 $u_2:X\to\mathbf{R}$ を

$$u_1(x) = \min\{x_1, 2x_2\}$$

$$u_2(x) = \min\{2x_1, x_2\}$$

とする.

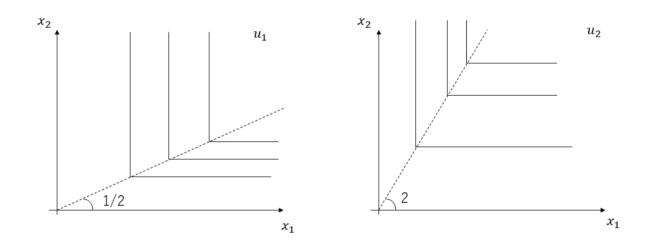


図 6.3 無差別曲線

 \succ_i を \succ と書き,以下のように定める:

任意のxとzについて $z \succ x$ とは

$$\begin{cases} x_1 \ge x_2 か つ u_1(z) > u_1(x), \\ \sharp \, \text{たは} \\ x_1 < x_2 か つ u_2(z) > u_2(x) \end{cases}$$

と同値である.

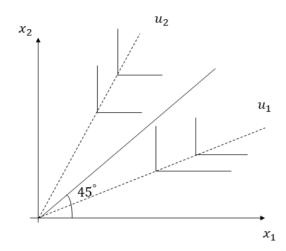


図 6.4 選好関係 ≻

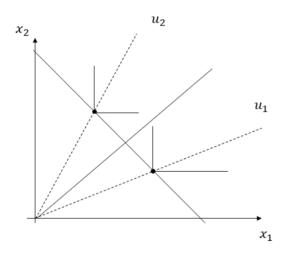


図 6.5 予算線と需要

よって、任意の(p,w)について需要対応xは

$$x(p,w) = \left\{ \left(\frac{2w}{2p_1 + p_2}, \frac{w}{2p_1 + p_2} \right), \left(\frac{w}{p_1 + 2p_2}, \frac{2w}{p_1 + 2p_2} \right) \right\}$$

として与えられる. よって, x(p,w) は非凸である.

しかしこの例だけでは、通常の(超過)需要対応に基づく存在証明ができないとは言えない。その問題点 3 点を挙げる.

1. \succ は推移的ではない(選好関係に推移性を課せば存在証明ができるのではとの危惧をぬぐえない)。 $y \succ x, z \succ y$ だが, $z \succ x$ ではない. ただし,推移的な選好関係でも,需要対応が凸値ではない例を後で示す.

6.5 私的所有経済 111

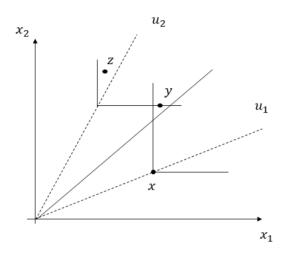


図 6.6

2. \succ は連続ではない.つまり, $\{(z,x)\in X\times X\mid z\succ x\}$ が $X\times X$ の開部分集合ではない.特に,lower contour set $\{z\in X\mid x\succ z\}$ は X の開集合とは限らない.実際,次の図では $x\succ z$ であるが,z に近く, $z_1'< z_2'$ を満たす z' の場合, $x\succ z'$ は成立しない.ただし,連続な選好関係でも,需要対応が凸値でない例を後で示す.

図 6.7

3. 需要関数は 2 点集合の値をとるが、連続かつ凸値な部分需要関数が存在する. x(p,w) に含まれる $\left(\frac{2w}{2p_1+p_2},\frac{w}{2p_1+p_2}\right)$ は (p,w) の連続関数なので、これを需要関数と見立てて不動点定理を適用できる. 実際、これは u_1 の需要関数である. たとえ需要対応 x が凸値でなくても、任意の (p,ω) に対して $\hat{x}(p,\omega)\subseteq x(p,\omega)$ を満たす凸値かつ上半連続な対応 \hat{x} があれば、これに不動点定理を適用することで、均衡の存在が証明できる.

以上 3 点を克服するのが Mas-Colell(1974) の例である.この例では,推移的かつ連続な \succ を構成し,上述のような部分対応 \hat{x} が存在しないことを示す.

6.5.6 例 (Mas-Colell) L = 2 とする.

$$u_0(x) = x_1 + x_2$$

$$u_1(x) = \min\{x_1, x_1, 2x_1 + 2x_2 - 2\}$$

$$u_2(x) = \min\{x_2, x_1, 2x_1 + 2x_2 - 2\}$$

とし, $z\gg x$ は $z_1>x_1$ かつ $z_2>x_2$ と定義する.そこで,任意の x と z について $z\succ x$ は以下と同値であると定める.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < \frac{4}{3}\hbar^{1} \supset u_0(z) > u_0(x), \\ \sharp \, \text{tid} \\ x_1 + x_2 \geq \frac{4}{3}\hbar^{1} \supset x_2 < \frac{2}{3}\hbar^{1} \supset u_1(z) > u_1(x), \\ \sharp \, \text{tid} \\ x_1 + x_2 \geq \frac{4}{3}\hbar^{1} \supset x_1 < \frac{2}{3}\hbar^{1} \supset u_2(z) > u_2(x), \\ \sharp \, \text{tid} \\ x_1 \geq \frac{2}{3}\hbar^{1} \supset x_2 \geq \frac{2}{3}\hbar^{1} \supset z \gg x \end{cases}$$

つまり、 $X_i = \mathbb{R}^2_+$ を 4 つの領域にわけてそれぞれで u_0, u_1, u_2, \gg を使って選好関係 \succ を定義した.

図 6.8 効用関数 u_0 , u_1 , u_2 の無差別曲線

図 6.9 選好関係 \succ_i に関する無差別曲線. \succ_i の定義によって X_i は 4 つの領域に分かれており、それぞれの領域で u_0 , u_1 , u_2 または \gg が適用される.

主張 \rightarrow は連続かつ推移的である。また、任意の (p,w) について $\hat{x}(p,w)\subseteq x(p,w)$ を満たす上半連続かつ凸値の対応 \hat{x} は存在しない。

まず、 $\{(z,x) \mid z \succ x\}$ が開である. 特に、 $\{x \mid z \succ x\}$ が開であることを確認しよう.

図 6.10 選好関係 \succ_i の定義による X_i の 4 つの領域

例えば、x=(1,1/3) では u_1 が適用されるが、 u_0 が適用される領域と u_1 が適用される領域の境界上にある。 $\{z\mid u_1(z)>u_1(x)\}\subset\{z\mid u_0(z)>u_0(x)\}$ なので、 $z\succ x$ ならば、x に十分近い x' でも $x\succ z'$ が成立する。同様に、x=(2/3,4/3) は u_2 と \gg の境界にあるが、 \gg が適用される.

次に,推移性を確認しよう。 $z \succ x$ ならば $\succ (z) \subseteq \succ (x)$ を示せば十分である。 $\succ (x)$ は x の upper contour set を表している。図 6.10 は X_i の 4 つの領域を示している。もちろん,x と z が同じ領域内なら推移性は満たされる。また,x は領域 0,z は領域 1 に属するとき, $\succ (z) \subseteq \succ (x)$ が成立する。同様に,x は領域 x は領域 x は領域 x (または x x は領域 x x に属するとき x x は領域 x x は領域 x x は領域 x x に属するとき x x は領域 x x は領域 x x は領域 x x に属するとき x x に属するとき x x は領域 x x は領域 x x は領域 x x に属するとき x x は領域 x x は領域 x x に属するとき x x は領域 x x に属するとき x x に

最後に、需要対応 x の凸値かつ上半連続であるような部分対応 \hat{x} が存在しないことを背理法で示そう.まず、 $p_1=p_2, 2p_1=w$ のときの x(p,w) は下の図で示されている.

図 6.11 太線と太点は需要対応 x(p,w) を表している.

もし, $2p_1 = w$ かつ $\frac{p_1}{p_2}$ が 0 に近いなら $x(p,w) = \{(2,0)\}$ なので, $\hat{x}(p,w) = \{(2,0)\}$. $2p_1 = w$ を満たしつつ, $\frac{p_1}{p_2}$ が 1 に近づくなら, $z \in x(p,w)$ を満たす z は z = (2,0) または $\{z_1 \geq 2/3, z_2 \geq 2/3\}$ を満たす. $\frac{2}{3}(p_1 + p_2) \leq w$ を満たす (p,w) において \hat{x} が上半連続であるためには, $(2,0) \in \hat{x}(p,w)$ が必要である. 従って, $\frac{2}{3}(p_1 + p_2) > w$ となるときにも同様に, $(2,0) \in \hat{x}(p,w)$ が成立する. 同様に $(0,2) \in \hat{x}(p,w)$. よって, $p_1 = p_2$ かつ $2p_1 = w$ ならば, $\{(2,0),(0,2)\} \subseteq \hat{x}(p,w)$ が成り立つ. $\hat{x}(p,w)$ は凸(連結)なので, $[(2,0),(0,2)] \subseteq \hat{x}(p,w)$. すなわち $\hat{x}(p,w)$ は予算線全体に一致するが $\hat{x}(p,w) \subseteq x(p,w)$ なので,x(p,w) も予算線全体に一致するがこれは矛盾である.

これから,どのような対応に不動点定理を適用してワルラス均衡の存在を証明すれば良いかを考える.私 的所有経済 $((X_i,\succ_i)_i,W,(\alpha_i)_i)$ を考えよう.任意の p について $\alpha(p)=\sup_{x\in W}p\cdot x$ と書けば,定義により,任意の p について $\alpha(p)=\sum_i\alpha_i(p)$ が成り立つことを思い出そう.

- **6.5.7 補題** $((x_1^*,\cdots,x_I^*),p^*)$ はワルラス準均衡であるならば
 - (i) 任意の i について(ここに $p^* \cdot x_i^* \le \alpha_i(p^*)$ を付け加えてもよい) $x_i \succ_i x_i^*$ かつ $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$ を満たすような $x_i \in X_i$ は存在しない.

6.5 私的所有経済 113

(ii)
$$p \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) > \alpha(p)$$
 を満たす $p \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\}$ は存在しない.

補題 **6.5.7** の証明 まず, $((x_1^*,\cdots,x_I^*),p^*)$ がワルラス準均衡であるとする.(i) は価格均衡の選好準最大化条件と $\alpha_i(p^*)=p^*\cdot x_i^*$ より従う.また, $\sum\limits_i x_i^*\in W$ なので,任意の p について $p\cdot\left(\sum\limits_i x_i^*\right)\leq \alpha(p)$.よって,(ii) が従う.

6.5.8 補題 任意の i について \succ_i は局所非飽和的で,W は閉かつ凸とする.もし $((x_1^*, \cdots, x_I^*), p^*) \in X_1 \times \cdots \times X_I \times (\mathbf{R}^L \setminus \{0\})$ が補題 6.5.7 の (i) と (ii) を満たすなら,それはワルラス準均衡である.

補題 6.5.8 の証明 W は閉なので、もし $\sum_i x_i^* \notin W$ ならば、ある $\delta > 0$ が存在し、 $\{z \in \mathbf{R}^L : \left| \left| z - \sum_i x_i^* \right| \right| \le \delta \}$ $\cap W = \varnothing$ が成立する. いずれも凸なので、分離超平面定理によりある $p \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\}$ とある $c \in \mathbf{R}$ が存在し、任意の $z \in \mathbf{R}^L$ と $x \in W$ について $\left| \left| z - \sum_i x_i^* \right| \right| \le \delta$ ならば

$$p \cdot z \ge c \ge p \cdot x$$

が成り立つ. 特に, α の定義と $z = \sum_i x_i^* - \frac{\delta}{||p||} p$ により

$$p \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) - \delta ||p|| \ge c \ge \alpha(p)$$

が成立する. よって,

$$p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right) > \alpha(p)$$

が得られる. これは (ii) に矛盾する. よって, $\sum\limits_i x_i^* \in W$ が成立する. 従って,

$$p^* \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) \le \alpha(p^*)$$

が成り立つ。また、もしある i について $p^* \cdot x_i^* < \alpha_i(p^*)$ ならば、選好関係の局所非飽和性によりある $x_i \in X_i$ が存在し、 $x_i \succ_i x_i^*$ かつ $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$ が成立するが、これは条件 (i) に矛盾する。よって、全て の i について $p^* \cdot x_i^* \ge \alpha_i(p^*)$ が成り立つ。この両辺の i に関する和をとれば

$$p^* \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) \ge \alpha(p^*)$$

が得られる. 従って,

$$p^* \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) = \alpha(p^*)$$

が成立する.これでまず利潤(収入)最大化条件が満たされた. さらに,任意の i について $p^* \cdot x_i^* = \alpha_i(p^*)$ が成り立つ.よって,予算制約が満たされ,さらに選好準最大化条件も満たされた. ///

そこで $F=(F_0,F_1,\cdots,F_I):\left(\mathbf{R}^L\backslash\{0\}\right)\times X_1\times\cdots\times X_I \rightarrow \left(\mathbf{R}^L\backslash\{0\}\right)\times X_1\times\cdots\times X_I$ を次のように定義する.

$$F_0(p, x_1, \cdots, x_I) = \left\{ q \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\} \mid q \cdot \left(\sum_i x_i\right) > \alpha(q) \right\}$$

任意のi > 1 について

$$F_i(p, x_1, \dots, x_I) = \{ z_i \in X_i \mid z_i \succ_i x_i \not \exists i \supset p \cdot z_i < \alpha_i(p) \}$$

 $((x_1,\cdots,x_I),p)$ がワルラス準均衡であることと任意の $i\geq 0$ について $F_i(p,x_1,\cdots,x_I)=\varnothing$ が同値である。このような (p,x_1,\cdots,x_I) の存在を不動点定理で示そう。

不動点定理を適用するため(及び,より経済学的には,予算制約を扱うため),任意の $i \ge 1$ に対して F_i を以下のように変更する.これは生産を扱うために必要である.(つまり,Shafer and Sonnenschein(1975) のように,交換経済での均衡の存在証明には不要である)

$$F_i(p,x_1,\cdots,x_I) = \begin{cases} \left\{ z_i \in X_i \mid z_i \succ_i x_i \text{かつ } p \cdot z_i < \alpha_i(p) \right\} & (p \cdot x_i \leq \alpha_i(p) \text{ ならば)} \\ \left\{ z_i \in X_i \mid p \cdot z_i < \alpha_i(p) \right\} & (p \cdot x_i > \alpha_i(p) \text{ ならば)} \end{cases}$$

もし任意の i について, α_i が最小予算条件を満たす,すなわち任意の p についてある $z_i \in X_i$ が存在し, $p \cdot z_i < \alpha_i(p)$ が成立するならば,依然として $((x_1, \cdots, x_I), p)$ がワルラス準均衡であることと任意の $i \geq 0$ について $F_i(p, x_1, \cdots, x_I) = \emptyset$ は同値である.この F_i のグラフも開である.なぜなら,特に $p \cdot x_i = \alpha_i(p)$ が成立するときには F_i の定義にはより小さい $\left\{z_i \in X_i \mid z_i \succ_i x_i$ かつ $p \cdot z_i < \alpha_i(p)\right\}$ が適用されるからである.

以下では、まず次の補題がこの証明の途中のステップを与えることを説明する.

6.5.9 補題 任意の $n=1,\cdots,N$ に対して Z_n は有限次元ユークリッド空間(次元は互いに異なってよい)の非空,凸,コンパクトな部分集合とする。 $Z=Z_1\times\cdots\times Z_N$ と書く.任意の n に対して $F_n:Z\to Z_n$ (より正確には $F_n:Z\to Z_n$) は空集合の値をとり得る対応であり,

$$Z_n^* = \{ z \in Z \mid F_n(z) \neq \emptyset \}$$

と書くと、以下の2条件が満たされると仮定する.

- 1. Z_n^* は Z の開部分集合である.
- 2. 非空かつ凸値の上半連続対応 $G_n: Z_n^* \to Z_n$ が存在し、全ての $z \in Z_n^*$ に対して $G_n(z) \subseteq F_n(z)$ が成立する. (つまり、 G_n は $F_n \mid Z_n^*$ の部分対応である.)

このとき, ある $z^*=(z_1^*,\cdots,z_N^*)\in Z$ が存在し,全ての n について $z_n^*\in F_n(z^*)$ または $F_n(z^*)=\emptyset$ が成立する.(この結論部分の 2 つの可能性は生産を扱うために必要である.)

補題 **6.5.9** の証明 任意の n について対応 $H_n: Z \to Z_n$ を

$$H_n(z) = \begin{cases} G_n(z) & (z \in Z_n^*) \\ Z_n & (z \notin Z_n^*) \end{cases}$$

と定義すると、 H_n は非空、凸、コンパクト値である。また、条件 1 と 2 により H_n は上半連続である。 $H:Z\to Z$ を $H(z)=H_1(z)\times\cdots\times H_N(z)$ と定義すると、H は非空、凸、コンパクト値かつ上半連続である。よって、角谷の不動点定理によりある $z^*\in Z$ が存在し、 $z^*\in H(z^*)$ が成立する。つまり、任意の n について $z_n^*\in H_n(z^*)$ が成り立つ。以下では任意の n について $z_n^*\in F_n(z^*)$ または $F_n(z^*)=\varnothing$ が成立することを示そう。仮に $F_n(z^*)\neq\varnothing$ とすると、 $z^*\in Z_n^*$ が成立する。よって、 $H_n(z^*)=G_n(z^*)$ 、 $z_n^*\in H_n(z^*)$ と $G_n(z^*)$ と合わせて、

$$z_n^* \in H_n(z^*) = G_n(z^*) \subseteq F_n(z^*)$$

が成立する. ///

 F_n が補題 6.5.9 の条件 1 と 2 を満たすための十分条件を与えよう.

6.5 私的所有経済 115

6.5.10 補題 $F_n: Z \to Z_n$ が以下の 2 条件を満たすなら、補題 6.5.9 の条件 1 と 2 を満たす.

- 1. F_n のグラフは $Z \times Z_n$ の開部分集合である.
- 2. F_n は凸値である.

補題 **6.5.10** の証明 任意の $z \in Z_n^*$ に対してある $x_n \in Z_n$ が存在し, $x_n \in F_n(z)$ が成立する.すなわち, (z,x_n) は F_n のグラフに属する. F_n のグラフは開なので,z に十分近い任意の $z' \in Z$ について (z',x_n) も F_n のグラフに属する.すなわち $x_n \in F(z')$ が成立する.よって, $z' \in Z_n^*$.よって, Z_n^* は開集合である.これで条件 1 が示された.条件 2 を示すためには 2 つの方法がある:

<u>方法 1</u> 補題 6.5.10 の条件 1 と 2 により $F_n \mid Z_n^*$ の連続な選択 (continuous selection) $G_n: Z_n^* \to Z$ $(G_n(z) \in F_n(z))$ が存在する.これは Michaels's Continuous Selection Theorem として知られている. (Border(1989) の 14 章を参照) 但し, F_n のグラフが開であるという仮定は不要で,下半連続性を満たせば十分である.この点には Gale and Mas-Colell(1979) にも言及されている.

<u>方法 2</u> これはより経済学になじみのある,需要対応の上半連続性の導出に近い方法である (Schafer and Sonnenschein (1975) による).

 $U_n: Z \times Z_n \to \mathbf{R}_+$ は連続で、任意の $(z,x_n) \in (Z \times Z_n)$ について $U_n(z,x_n) > 0$ と $x_n \in F(z)$ は同値だとする.例えば、 $U_n(z,x_n)$ を (z,x_n) の F_n のグラフの補集合(コンパクト)からの距離とすればよい.次に、 $z \in Z_n^*$ とし、 $\max_{x_n \in Z_n} U_n(z,x_n)$ を考えよう. Z_n はコンパクトで、 $U_n(z,\cdot): Z_n \to \mathbf{R}$ は連続なので、解の集合を $K_n(z)$ で表すと、 $K_n(z) \neq \emptyset$ が成立する. $z \in Z_n^*$ なので、任意の $x_n \in K_n(z)$ について $U_n(z,x_n) > 0$ が成り立つ.つまり、 $x_n \in F_n(z)$.よって、 $K_n(z) \subseteq F_n(z)$.さらに、 $K_n: Z_n^* \to Z_n$ は上半連続である(これは Berge's maximum theorem によるが、以下に証明を与えよう).点列((z^m,x_n^m)) $_m$ と $(z,x_n) \in Z_n^* \times Z$ を

$$x_n^m \in K_n(z^m)$$
$$(z^m, x_n^m) \to (z, x_n)$$

とする. このとき, 任意の $w_n \in Z_n$ について

$$U_n(z^m, x_n^m) \ge U_n(z^m, w_n)$$

が成立する. よって,mについて極限をとれば

$$U_n(z, x_n^m) \ge U_n(z, w_n)$$

が得られる. よって, $x_n \in K_n(z)$ が成立し, K_n は上半連続であることがわかる.

そこで、 $G_n(z)$ を $K_n(z)$ の凸包 (convex hull) とおくことで $G_n: Z_n^* \to Z_n$ を定義すると、補題 6.5.10 の条件 2 は満たされる。実際、 G_n が非空かつ凸値であることは定義より従う。 $K_n(z) \subseteq F_n(z)$ で $F_n(z)$ は 凸なので、 $G_n(z) \subseteq F_n(z)$ が成立する。 G_n が上半連続であることは Caratheodory の定理より従う。///

以下では補題 6.5.9 と 6.5.10 を満たすように F_i を定義するために必要な仮定を導く.

6.5.11 仮定 任意の i について X_i は非空・閉・凸と仮定し, \succ_i は連続(開グラフ)・凸・局所非飽和的・非反射的と仮定する.W は非空・閉・凸とする.また,自由可処分 $W-\mathbf{R}_+^L\subseteq W$ を仮定する.

実行可能配分の集合
$$\left\{(x_1,\ldots,x_I)\in X_1\times\cdots\times X_I\mid \sum\limits_i x_i\in W\right\}$$
 は有界と仮定する.

任意の i について α_i は連続とする. また, $\alpha(p) = \infty$ のような p の存在を許容するため,

$$\{(p,a) \in \mathbf{R}^L \times (\mathbf{R} \cup \{\infty\}) \mid \alpha_i(p) \leq a\}$$

は $\mathbf{R}^L \times \mathbf{R}$ の閉部分集合であるとする。さらに、任意の p に対してある $x_i \in X_i$ が存在し、 $p \cdot x_i < \alpha_i(p)$ が成立すると仮定する。これは最小所得条件である。よって、ワルラス準均衡はワルラス均衡である。

 (p, x_1, \ldots, x_I) をコンパクト集合に収めるために以下のように定める.

$$\Delta = \{ p \in \mathbf{R}_{+}^{L} \mid ||p||_{1} = \sum_{\ell} p_{\ell} = 1 \}$$

は非空・コンパクト・凸である. $p \notin \Delta$ ならば、自由可処分により利潤最大化の解は存在しない. 任意の i と $p \in \Delta$ に対してある $x_i^p \in X_i$ が存在し、 $p \cdot x_i^p < \alpha_i(p)$ が成立する、

 α_i は連続なので、任意の $p \in \Delta$ に対してある p の近傍 V_p が存在し、任意の $q \in V_p$ について

$$q \cdot x_i^p < \alpha_i(q)$$

が成立する. $p \in V_p$ なので $\bigcup_{p \in \Delta} V_p = \Delta$ が成り立つ. すなわち, $(V_p)_{p \in \Delta}$ は Δ の開被覆 (open covering) である. Δ はコンパクトなので, Δ の有限部分集合 Γ で, $\bigcup_{p \in \Gamma} V_p = \Delta$ を満たすものが存在する. そこで,

$$\tilde{X}_i = \{x_i^p \mid p \in \Gamma\}$$

と定めると、 \tilde{X}_i は X_i の有限部分集合である。なおかつ

6.5.12 補題 任意の $p \in \Delta$ に対してある $x_i \in \tilde{X}_i$ が存在し、 $p \cdot x_i < \alpha_i(p)$ が成立する.

また, \tilde{X}_i は特に有界である (Gale and Mas-Colell(1979) 参照). そこで,実行可能性集合の有界性と合わせるとある b>0 が存在し,任意の i と $x_i\in \tilde{X}_i$ について $||x_i||< b$ が成立し,なおかつ任意の実行可能配分 (x_1,\ldots,x_I) に関しても,全ての i について $||x_i||< b$ が成り立つ. そこで,

$$\hat{X}_i = \{x_i \in X_i \mid ||x_i|| \le b\}$$

とおくと, \hat{X}_i は非空・凸・コンパクトである.任意の $p \in \Delta$ に対してある $x_i \in \hat{X}_i$ が存在し, $p \cdot x_i < \alpha_i(p)$ が成立する. $(F_0, F_1, \dots, F_I): \Delta \times \hat{X}_1 \times \dots \times \hat{X}_I \to \Delta \times \hat{X}_1 \times \dots \times \hat{X}_I$ を次のように定める.

$$F_0(p, x_1, \cdots, x_I) = \left\{ q \in \mathbf{R}^L \setminus \{0\} \mid q \cdot \left(\sum_i x_i\right) > \alpha(q) \right\}$$

任意の $i \ge 1$ について

$$F_i(p,x_1,\cdots,x_I) = \begin{cases} \left\{z_i \in \hat{X}_i \mid z_i \succ_i x_i \text{かつ } p \cdot z_i < \alpha_i(p)\right\} (p \cdot x_i \leq \alpha_i(p) \text{ ならば)} \\ \left\{z_i \in \hat{X}_i \mid p \cdot z_i < \alpha_i(p)\right\} (p \cdot x_i > \alpha_i(p) \text{ ならば)} \end{cases}$$

補題 6.5.10 の条件を満たすので補題 6.5.9 によりある $(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*) \in \Delta \times X_1 \times \dots \times X_I$ が存在し,

- $p^* \in F_0(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*)$ \$\pm this \text{it} $F_0(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*) = \alpha$
- 任意の $i \ge 1$ について $x_i^* \in F_i(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*)$ または $F_i(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*) = \emptyset$

が成立する. これがワルラス(準)均衡であることを示そう.

まず、任意の $i\geq 1$ について \succ_i の非反射性と F_i の定義により $x_i^*\notin F_i(p^*,x_1^*,\ldots,x_I^*)$ が成立する.よって, $F_i(p^*,x_1^*,\ldots,x_I^*)=\varnothing$. $\tilde{X}_i\subseteq \hat{X}_i$ なので任意の $p\in\Delta$ に対してある $x_i\in\hat{X}_i$ が存在し, $p\cdot x_i<\alpha_i(p)$ が成立する.よって,

$$\{x_i \in \hat{X}_i \mid p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)\} \neq \emptyset$$

が成立する.これにより,もし $p^*\cdot x_i>\alpha_i(p^*)$ ならば, $F_i(p^*,x_1^*,\dots,x_I^*)\neq\varnothing$ なので矛盾である.よって, $F_i(p^*,x_1^*,\dots,x_I^*)=\varnothing$ より, $p^*\cdot x_i\leq\alpha_i(p^*)$ が成り立つ.よって,

$$p^* \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) \le \alpha(p^*)$$

6.5 私的所有経済 117

が成立する。すなわち, $p^* \notin F_0(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*)$. よって, $F_0(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*) = \varnothing$. よって, $\sum_i x_i^* \in W$ が成立し,実行可能性が示された. よって,任意の $i \geq 1$ について $||x_i^*|| < b$ が成立する. \succ_i は $(X_i \perp c)$ 局所非飽和的なので,もし $p^* \cdot x_i^* < \alpha(p^*)$ ならばある $x_i \in X_i$ が存在し, $||x_i|| < b$ かつ $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$ かつ $x_i \succ_i x_i^*$ が成立する. よって, $x_i \in \hat{X}_i$ かつ $x_i \in F_i(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*)$ が成立する. これは $F_i(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*) = \varnothing$ に 矛盾する. よって,任意の i について $p^* \cdot x_i = \alpha_i(p^*)$ が成り立つ. よって,

$$p^* \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) = \alpha(p^*)$$

が成立する.これで利潤(収入)最大化条件が示された.最後に \hat{X}_i 上に限らず, X_i 上において \succ_i について選好準最大化条件が満たされることを背理法で示そう.

仮にある $i \ge 1$ と $x_i \in X_i$ が存在し, $x_i \succ_i x_i^*$ かつ $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$ が成り立つとする. $||x_i^*|| < b$ なので十分 0 に近い任意の $\varepsilon > 0$ について

$$||\varepsilon x_i + (1-\varepsilon)x_i^*|| < b$$

が成立する. $p^* \cdot x_i^* = \alpha_i(p^*)$ かつ $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$ なので

$$p \cdot (\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon) x_i^*) < \alpha_i(p^*)$$

が成り立つ. \succ_i の局所非飽和性により X_i のある点列 $(x_i^n)_n$ が存在し、任意の n について $x_i^n \succ_i x_i^*$ かつ $x_i^n \to x_i^*$ $(n \to \infty)$ が成立する. よって、 \succ_i の凸性により $\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon) x_i^n \succ x_i^*$ かつ十分大きな n について

$$||\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon)x_i^n|| < b$$
$$p^* \cdot (\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon)x_i^n) < \alpha_i(p^*)$$

が成立する. よって, $\varepsilon x_i + (1-\varepsilon)x_i^n \in F_i(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*)$. これは $F_i(p^*, x_1^*, \dots, x_I^*) = \emptyset$ に矛盾する. これで証明は完了した.

この証明方法を使えば、次のようなより一般的なモデルにおける均衡の存在も証明できる.

- 1. 外部性がある (他の消費者の消費ベクトルに選好が依存する). ただしこの場合, 各消費者は他の消費者の消費ベクトルを所与として, 自分の消費ベクトルを選択する.
- 2. 価格ベクトルに選好が依存する (money illusion がある) 場合

以下では、補題 6.5.9 についていくつかのポイントに触れる.

この補題は角谷の不動点定理から導出された。しかし、全てのn について $Z_n^* = Z_n$ が成立するとき、この補題から角谷の不動点定理を導出できる。

非反射的・連続・凸な選好関係 \succ のコンパクトかつ凸な予算集合上での最適解の存在も導出される.実際, $N=1,\ Z_1$ を予算集合とする.

$$F_1(Z_1) = \{ w_1 \in Z_1 \mid w_1 \succ z_1 \}$$

と定義すると、補題 6.5.10 の条件が満たされるので、ある $z_1^* \in Z_1$ が存在し、 $z_1^* \in F_1(z_1^*)$ または $F_1(z_1^*) = \emptyset$ が成立する。 前者は非反射性に反するので、後者が成立する。 これは Z_1^* が最適解であることを意味する。 この証明に完備性・推移性・非循環性は不要である。 この点を明らかにするために次の例を考えよう。

6.5.13 例 N=1, $Z_1=[0,1]$ とし、 \succ_1 を次のように定義する。 $w_1 \succ_1 z_1$ は

$$\begin{cases} w_1 > z_1 & (z_1 < \frac{1}{2}) \\ w_1 < z_1 & (z_1 > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

と同値だとする. \succ_1 は連続・凸・非反射的である. \succ_1 は以下の図で表される. $1 \succ_1 0$ かつ $0 \succ_1 1$ が成立する. 特に \succ_1 は循環 (cycle) をもつ.

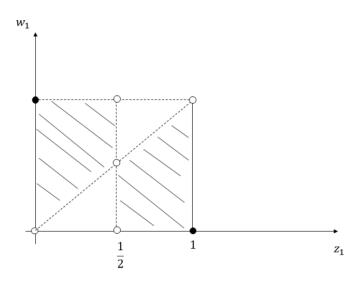


図 6.12

 $Z_1=[0,1]$ 上の最適解は $\frac{1}{2}$ である.これは補題 6.5.9 の主張と一貫している.しかし, $\{0,1\}$ 上には最適解がない.これは, $\{0,1\}$ は凸集合ではないので,補題 6.5.9 に矛盾するものではない.

6.5.14 補題 Z が非空かつコンパクトで, \succ は acyclic かつ任意の $z \in Z$ について

$$\{x \in Z \mid z \succ x\}$$

が Z の開部分集合(任意の lower contor set が開)ならば、最適解 $z^* \in Z$ (つまり、 $z \succ z^*$ を満たすような z が存在しない)が存在する.

補題 6.5.14 の証明 $L(z)=\{x\in Z\mid z\succ x\}$ と書く.もし最適解が存在しなければ, $\bigcup_{z\in Z}L(z)=Z$. Z は コンパクトなので,その有限部分集合 Z^* で $\bigcup_{z\in Z^*}L(z)=Z$ を満たすものが存在する.(一般性を失うこと なく任意の $z\in Z^*$ について $L(z)\neq\emptyset$ と仮定できる) $z_1\in Z^*$ とし,任意の $n\geq 2$ について $z_n\in Z^*$ を $z_n\in L(z_{n-1})$ と定めると, $z_{n-1}\succ z_n$.さらに, Z^* は有限なので,ある N が存在し, $z_N=z_1$.これは acyclicity に矛盾する. ///

補題 6.5.9 はナッシュ均衡の存在も意味する. Z_n をプレイヤー n の戦略の集合とする. $u_n: Z \to \mathbf{R}$ をプレイヤー n の利得関数で,連続かつ z_n について準凹とする. F_n をプレイヤー n の最適反応対応とすれば(u_n は連続かつ準凸なので F_n は閉グラフを持ち,非空凸値である), $Z_n^* = \emptyset$ なのである $z^* \in Z$ が存在し,全ての n について $z_n^* \in F_n(z^*)$ が成立する.

もう一つの方法がある.

$$F_n(z) = \{ w_n \in Z_n \mid u_n(w_n, z_n) > u_n(z) \}$$

6.5 私的所有経済 119

とすると, F_n は補題 6.5.10 の条件を満たすので,補題 6.5.9 によりある $z^* \in Z$ が存在し,全ての n について $z_n^* \in F_n(z^*)$ または $F_n(z^*) = \emptyset$ が成立する.但し, F_n の定義により前者は成立しないで後者が成立する.よって,任意の n について $F_n(z^*) = \emptyset$ が成立する.これは z^* がナッシュ均衡であることを意味する.さらに, u_n の代わりに Z 上の非反射的・連続・凸な二項関係 \succ_n を使ってもよい.すなわち,

$$F_n(z) = \{ \omega_n \in Z_n \mid (\omega_n, Z_{-n}) \succ_n Z_n \}$$

とおいて同様の議論を適用することで、ナッシュ均衡の存在が証明できる.

6.5.2 競争(ワルラス)均衡の存在定理

ここでは、ナッシュ均衡の存在定理の証明を用いて競争均衡の存在定理の証明をおこなう.

6.5.15 定義 関数 $u_i: S \to \mathbf{R}$ がグラフ下半連続であるとは,任意の $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*) \in S$ に対して, S_{-i} に おける s_{-i}^* のある近傍 T_{-i} とある写像 $f_i: T_{-i} \to S_i$ が存在して, $s_i^* = f(s_{-i}^*)$ を満たし,かつ T_{-i} から \mathbf{R} への関数 $s_{-i} \mapsto u_i$ ($f_i(s_{-i}), s_{-i}$) が s_{-i}^* で下半連続であること*7である.

6.5.16 定理 (Dasgupta and Maskin (1986)) 任意の i について戦略集合 S_i が有限次元ユークリッド 空間の非空コンパクト凸部分集合であるとする。任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $u_i(\cdot,s_{-i}):S_i \to \mathbf{R}$ が準凹で, u_i は上半連続*8かつグラフ下半連続であるならばナッシュ均衡が存在する。

定理 7.4.4 の証明 角谷の不動点定理の仮定を R が満たすことを示せばよい. まず, u_i は s_i について上半連続なので,任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $R_i(s_{-i})$ は非空である (詳しく考えよ). また, $u_i(\cdot,s_{-i})$ が準凹関数なので, $R_i(s_{-i})$ は凸である. よって, R_i のグラフが閉であることを示せば証明完了である.

関数 $v_i: S_{-i} \to \mathbf{R}$ を

$$v_i(s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

(つまり任意の $s_i \in R_i(s_{-i})$ について $v_i(s_i) = u_i(s_i, s_{-i})$)

と定義する. 以下ではまず v_i が連続であることを示す. $(s_{-i}^n)_n$ は S_{-i} 上の点列で, $s_{-i}^* \in S_{-i}$ として, $s_{-i}^n \to s_{-i}^*$ を仮定する. 必要ならば部分列をとることで,一般性を失うことなく $\limsup_n v_i(s_{-i}^n) = \lim_n v_i(s_{-i}^n)$ と仮定できる. $s_i^n \in R_i(s_{-i}^n)$ とする. 必要ならば部分列をとることで,一般性を失うことなく,ある s_i^* が存在して $s_i^n \to s_i^*$ と仮定できる. よって,上半連続性により

$$\lim \sup_{n} v_{i}(s_{-i}^{n}) = \lim_{n} u_{i}(s_{i}^{n}, s_{-i}^{n}) \le u_{i}(s_{i}^{*}, s_{-i}^{*}) \le v_{i}(s_{-i}^{*})$$
(6.1)

が成立する(ここまではグラフ下半連続性を使っていない).次に, $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*)$ とする.グラフ下半連続性により, s_{-i}^* のある近傍 T_{-i} と,ある写像 $f_i: T_{-i} \to S_i$ が存在して, $s_i^* = f_i(s_{-i}^*)$ かつ, T_{-i} から \mathbf{R} への関数 $s_{-i} \mapsto u_i \left(f_i(s_{-i}), s_{-i} \right)$ が s_{-i}^* で下半連続である. v_i の定義より, $u_i \left(f_i(s_{-i}^n), s_{-i}^n \right) \leq v_i(s_{-i}^n)$ が成立するので, $\lim \inf_n u_i \left(f_i(s_{-i}^n), s_{-i}^n \right) \leq \lim \inf_n v_i(s_{-i}^n)$ が成立するが,グラフ下半連続性により

$$\liminf_{n} u_i \left(f_i(s_{-i}^n), s_{-i}^n \right) \ge u_i \left(f_i(s_{-i}^*), s_{-i}^* \right) = u_i \left(s_i^*, s_{-i}^* \right) = v_i \left(s_{-i}^* \right)$$

が成立する. よって,

$$v_i(s_{-i}^*) \le \liminf_n v_i(s_{-i}^n)$$
 (6.2)

 $^{^{*7}}$ u_i が他のプレーヤーの戦略プロファイルに関して下半連続ならばグラフ連続である. $T_{-i}=S_{-i}$ とし,任意の $s_{-i}\in S_{-i}$ について $f_i(s_{-i})=s_i^*$ とすればよい.

 $^{^{*8}}$ u_i が上半連続であるとは, $s^n \to s$ ならば, $\limsup_n u_i(s^n) \le u_i(s)$ が成立することである.

が成立する. (7.2) と (7.3) より、 $v_i(s_{-i}^n) \rightarrow v_i(s_{-i}^*)$ が成立する. よって、 v_i は連続である.

 v_i が連続であることから R_i のグラフが閉であることを示そう。 $s_i^n \in R_i(s_{-i}^n)$ かつ, $s_{-i}^n \to s_{-i}^*$, $s_i^n \to s_i^*$ とする。 $v_i(s_{-i}^n) = u_i(s_i^n, s_{-i}^n)$ なので, $n \to \infty$ のとき, v_i の連続性と u_i の上半連続性により, $v_i(s_{-i}^*) \le u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$ が成立する。したがって, $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*)$ が成立する。

定理 7.4.4 を使って競争(ワルラス)均衡の存在定理を証明する.これは,MWG の 17 章 Appendix B に対応する内容である.Arrow and Debreu (1954) による初期の競争均衡の存在証明には,ここでの内容のようにナッシュ均衡の存在定理が用いられた.

6.5.17 定理 私的保有経済が以下の(1)から(5)の仮定を満たすとする.

- (1) 財空間は \mathbf{R}^L .
- (2) 任意のi について、消費集合 X_i が閉かつ凸であり、選好関係 \succ_i が連続かつ準凹な効用関数で表現可能であり、局所非飽和性を満たす。
- (3) 総生産可能性集合 W が閉, 凸, かつ自由化処分の仮定を満たす.
- (4) 実行可能配分の集合 $\{(x_1,\ldots,s_I)\in X_1\times\cdots\times X_I\mid \sum_i x_i\in W\}$ は非空かつ有界である (cf. Kreps (2012)).
- (5) 任意の i について,富水準 α_i は $\{p \in \mathbf{R}^L \mid \alpha(p) < +\infty\}$ 上で連続であり,任意の $p \in \mathbf{R}^L$ に対して, $\alpha(p) < +\infty$ ならば,ある $x_i \in X_i$ が存在して $p \cdot x_i < \alpha_i(p)$ を満たす(最小所得条件).

このとき、この私的保有経済には競争(ワルラス)均衡が存在する.

これらの仮定の下で, $W \neq \mathbf{R}^L$ が保証される.なぜなら,もし $W = \mathbf{R}^L$ ならば,実行可能配分の集合は $X_1 \times \cdots \times X_I$ に一致し,よって (2),(3),(4) によりこれはコンパクトである.よって任意の i について X_i もコンパクトであるがこれは u_i の連続性と局所非飽和性に矛盾する.

定理 6.5.17 の証明 有界性条件より,ある b>0 が存在して,任意の実行可能配分 (x_1,\dots,x_I) と任意の i について $||x_i|| < b$ が成立する**9. $\hat{X}_i = \{x_i \in X_i \mid ||x_i|| \le b\}$ とおく.これは凸かつコンパクトである.また,b を十分大きくとれば,任意の $p \in \mathbf{R}^L$ に対して, $\alpha(p) < +\infty$ ならば,ある $x_i \in \hat{X}_i$ が存在して $p \cdot x_i < \alpha_i(p)$ を保証できる(練習問題 6.5.1). $\hat{W} = \{x \in W \mid ||x|| \le Ib\}$ とおくと,これも凸かつコンパクトである* 10 .また,任意の実行可能配分 (x_1,\dots,x_I) と任意の i について, $x_i \in \hat{X}_i$ かつ $\sum_i x_i \in \hat{W}$ が成立する.

正規形ゲームを次のように定義する。プレーヤーの集合を $\{1,\ldots,I,I+1\}$ とする。 $i\leq I$ のプレーヤーiは元の経済の消費者で,戦略集合は \hat{X}_i である。プレーヤーI+1はオークショニア(生産者)で,戦略集合は以下で定める価格空間 P である。まず, $\Delta=\{p\in \mathbf{R}_+^L\mid \sum_\ell p^\ell=1\}$ とする。次に, $\Delta'=\{p\in\Delta\mid\alpha(p)<+\infty\}$ とする。さらに, $\Delta''=\{p\in\Delta'\mid$ ある $x\in\hat{W}$ が存在して, $p\cdot x=\alpha(p)<+\infty\}$ とする。このとき,価格空間 P を Δ'' の凸包と定義する。W は凸で $W\neq\mathbf{R}^L$ なので Δ' は非空凸集合である。 Δ'' がコンパクト集合であることは容易に示される。よって,P はコンパクトで Δ' に包まれる。最後に,P は非空であることを示そう。これには Δ'' が非空であることを示せば十分である。 (x_1,\ldots,x_I) を実行可能配分の 1 つとする。局所非飽和性と \succ_i の凸性により,ある $z\in\mathbf{R}^L\setminus\{0\}$ が存在し,任意の $\lambda\geq 0$ について, $x_1+\lambda z\in X_1$ が成立する*11. $x^\lambda=\sum_i x_i+\lambda z$ とすると, $x^0\in W$ であるが,有界性の仮定より,十分大きな $\lambda>0$ については $x^\lambda\notin W$ である。よって, $x^\lambda\in W$ なる最大の λ を $\bar{\lambda}$ で表すと $x^{\bar{\lambda}}\in\partial W$

^{*9} ここでは厳密な不等号を使うことが重要である.

 $^{^{\}ast 10}$ Gale and Mas-Colell (1979)

 $^{^{*11}}$ z は X_1 の漸近錘 (asymptotic cone) に属するとすればよい.

6.5 私的所有経済 121

であり、W は閉なので $x^{\bar{\lambda}} \in W$ である.したがって、 $x^{\bar{\lambda}} \in \hat{W}$ である. $x^{\bar{\lambda}}$ において W を支持するベクトルを p とすれば、 $||p||^{-1}p \in \Delta''$ であるので Δ'' は非空である.

利得関数は以下のように定める。まず、任意 $i \leq I$ について、 $m_i < \min_{x_i \in X_i} u_i(x_i)$ とし、利得関数 $\hat{u}_i: \hat{X}_1 \times \cdots \times \hat{X}_I \times P \to \mathbf{R}$ を次のように定義する。

$$\hat{u}_i(x_1, \dots, x_I, p) = \begin{cases} u_i(x_i) & (p \cdot x_i \le \alpha_i(p) \ \mathcal{O} \ \mathcal{E} \ \mathcal{E}) \\ m_i & (p \cdot x_i > \alpha_i(p) \ \mathcal{O} \ \mathcal{E} \ \mathcal{E}). \end{cases}$$

次に、i=I+1、すなわちオークショニアについては、利得関数 $\hat{u}_{I+1}:\hat{X}_1\times\cdots\times\hat{X}_I\times P\to \mathbf{R}$ を

$$\hat{u}_{I+1}(x_1,\ldots,x_I,p) = p \cdot \left(\sum_i x_i\right) - \alpha(p)$$

と定義する*12. $\hat{u}_1, \dots \hat{u}_I, \hat{u}_{I+1}$ はどれも上半連続,グラフ下半連続かつ自分の戦略について準凹である。 実際,i=I+1 については, α は連続かつ凸なので, \hat{u}_{I+1} は連続かつ自分の戦略 p について凹である。 $i \leq I$ については,準凹性は容易に示すことができ,上半連続性は, $p \cdot x_i = \alpha_i(p)$ のとき $u_i(x_i)$ ($> m_i$) が $\hat{u}_i(x_i,p)$ の値であることによる。グラフ下半連続性は最小所得条件より従う*13.

以上より,ナッシュ均衡が存在する.それを (x_1^*,\dots,x_I^*,p^*) と書く. (x_1^*,\dots,x_I^*,p^*) がワルラス均衡 であることを示そう.まず,任意の $i \leq I$ について, \hat{u}_i の定義により, $p^* \cdot x_i^* \leq \alpha_i(p^*)$ および,任意の $x_i \in \hat{X}_i$ について, $x_i \succ_i x_i^*$ ならば $p^* \cdot x_i > \alpha_i(p^*)$ が成立する.また, $p^* \cdot (\sum_i x_i^*) \leq \alpha(p^*)$ が成立する.よって, \hat{u}_{I+1} の定義より,任意の $p \in P$ に対して,

$$p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right) \le \alpha(p) \tag{6.3}$$

が成立する.

次に, $\sum_i x_i^* \in W$ を背理法で示そう. $\sum_i x_i^* \notin W$ とする.実行可能配分 W の要素のひとつを (x_1,\ldots,x_I) とする.そこで, $\varepsilon \in [0,1]$ として, $x_i^\varepsilon = \varepsilon x_i^* + (1-\varepsilon)x_i$ および $x^\varepsilon := \sum_i x_i^\varepsilon$ を考えよう. $x^0 \in W$ だが, $x^1 \notin W$ である. x^ε なる最大の $\varepsilon \in (0,1)$ を ε とおく.このとき, $x_i^{\bar{\varepsilon}} \in X_i$ なので, $||x^{\bar{\varepsilon}}|| < bI$ が成立する.よって, $\varepsilon > \bar{\varepsilon}$ だが $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$ は十分小さい ε をとると, $||x^\varepsilon|| < bI$ が成立する. x^ε の W への射影を z^ε と書くと, $z^\varepsilon \in W$ で $x^{\bar{\varepsilon}} \in W$ であることより, $||z^\varepsilon - x^{\bar{\varepsilon}}|| \le ||x^\varepsilon - x^{\bar{\varepsilon}}||$ が成立する.よって,必要ならばさらに ε を小さくとれば, $||z^\varepsilon|| < bI$ が成立する.したがって, $z^\varepsilon \in \hat{W}$ が成立する.

$$p = \frac{1}{||x^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}||} (x^{\varepsilon} - z^{\varepsilon})$$

とおけば, $p\cdot z^{\varepsilon}=\alpha(p)$ なので $p\in P$ である.しかし, $p\cdot (x^{\varepsilon}-z^{\varepsilon})=||x^{\varepsilon}-z^{\varepsilon}||>0$ なので, $p\cdot x^{\varepsilon}>\alpha(p)$ である.他方, $p\cdot x^0\leq \alpha(p)$ なので, $p\cdot x^1>\alpha(p)$ が成立する.ところが, $p\cdot x^1=p\cdot (\sum_i x_i^*)$ なので,これは,(7.4) に矛盾する.よって, $\sum_i x_i^*\in W$ が成立する.これで (x_1^*,\dots,x_I^*) の実行可能性が示された.

したがって、 $x_i^* \in \hat{X}_i$ であるので、 $||x_i^*|| < b$ が成立する。もし、 $p^* \cdot x_i^* < \alpha_i(p^*)$ ならば、 $||x_i|| < b$ 、 $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$ 、および $x_i \succ_i x_i^*$ を満たす $x_i \in X_i$ が存在するが、これは i の利得最大化に矛盾する。よって、任意の i について、 $p^* \cdot x_i^* = \alpha_i(p^*)$ が成立する。このことより、 $p^* \cdot (\sum_i x_i^*) = \alpha(p^*)$ が成立するので、 $\sum_i x_i^*$ の収入最大化条件も示された。

最後に、背理法で各 x_i^* の効用最大化条件を示そう。仮に、ある i とある $x_i \in X_i$ について、 $x_i \succ_i x_i^*$ かつ $p^* \cdot x_i^* \le \alpha_i(p^*)$ が成立するとする。 \hat{X}_i についてこのような $x_i \in \hat{X}_i$ が存在しないのは、 x_i^* がナッシュ均

 $^{^{*12}}$ $\alpha(p)$ は総供給の価値額なので,オークショニアは超過需要の価値額を最大化するよう行動する.最大の超過需要の財に正の価格を与える。

 $^{^{*13}}$ 実は,最小所得条件の下での需要関数の連続性の証明と同じである.

衡を成すことから従う.最小所得条件より,ある $\hat{x}_i \in X_i$ が存在して, $p^* \cdot \hat{x}_i < \alpha_i(p^*)$ が成立する. x_i の 代わりに $\varepsilon \hat{x}_i + (1-\varepsilon)x_i$ を使うことで,一般性を失うことなく $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$ と仮定できる. $||x_i^*|| < b$ なので,十分小さな $\varepsilon > 0$ について, $||\varepsilon x_i + (1-\varepsilon)x_i^*|| < b$ が成立する.また, $p \cdot (\varepsilon x_i + (1-\varepsilon)x_i^*) < \alpha_i(p^*)$ も成立する.局所非飽和性により,ある $(x_i^n)_n$ が存在して,任意の n について $x_i^n \succ_i x_i^*$ かつ $x_i^n \to x_i^*$ が成立する.よって,十分大きな n に対して,

$$\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon) x_i^n \succ_i x_i^*$$

$$||\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon) x_i^n|| < b$$

$$p^* \cdot (\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon) x_i^n) < \alpha_i(p^*)$$

6.5.18 注意 \hat{u}_i $(i \leq I)$ は x_{-i} や p に依存しても構わないので, u_i も x_{-i} や p に依存しても構わない.したがって,外部性や貨幣錯覚を効用関数が持つ場合でも以上の証明は適用できる.

練習問題 **6.5.1** 定理 6.5.17 の証明に関して, $\hat{X}_i = \{x_i \in X_i \mid ||x_i|| \leq b\}$ とおくと,b が十分大きければ,任意の $p \in \mathbf{R}^L$ に対して, $\alpha(p) < +\infty$ ならば,ある $x_i \in \hat{X}_i$ が存在して $p \cdot x_i < \alpha_i(p)$ が成立することを証明せよ.

- [1] Araujo, Aloisio (1985). "Lack of Pareto optimal allocations in economies with infinitely many commodities: The need for impatience," *Econometrica* 53(2): 455-461.
- [2] Arrow, Kenneth J., and Gerard Debreu (1954). "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica* 22(3): 265-90.
- [3] Border, Kim (1989) Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory, Cambridge University Press.
- [4] Gale, David and Andreu Mas-Colell (1979) "Corrections to an equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences," *Journal of Mathematical Economics* 6(3):297-298.
- [5] Kreps, David M. (2012). *Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets*. Princeton University Press.
- [6] Mas-Colell, Andreu (1974). "An equilibrium existence theorem without complete or transitive preferences," *Journal of Mathematical Economics* 1:237-246.
- [7] Shafer, Wayne and Hugo Sonnenschein (1975) "Equilibrium in abstract economies without ordered preferences," *Journal of Mathematical Economics* 2(3): 345-348.

6.6 私有経済

私有経済とは誰が何を所有しているかが定まっている経済のことである。つまり,各消費者 $i=1,\ldots,I$ の財の賦存量 $\omega_i \in \mathbf{R}^L$ と企業 $j=1,\ldots,J$ の株式の保有量 $\theta_{ij} \geq 0$ が定まっているような経済である*¹⁴. ただし, $\sum_{i=1}^{I}\omega_i=\varpi$ と任意の j について $\sum_{i=1}^{I}\theta_{ij}=1$ と仮定しておこう。株式の保有に関する特定 化は企業の利潤が誰に支払われるのかということを表している。このとき,私有経済(private ownership economy)を $((X_i,\succsim_i)_{i=1}^{I},(Y_j)_{j=1}^{J},(\omega_i,(\theta_{ij})_{j=1}^{J})_{i=1}^{I})$ と書く。このとき, $((X_i,\succsim_i)_{i=1}^{I},(Y_j)_{j=1}^{J},\sum_i\omega_i)$ は 6.2 節で定義した意味で経済である。

各財につきひとつだけ価格がついていると仮定しよう. 価格ベクトルは L 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^L の元だと見なすことができる.

6.6.1 定義 経済 $((X_i, \succsim_i)_i, (Y_j)_j, \sum_i \omega_i)$ の価格均衡 $((x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*), p)$ が $((X_i, \succsim_i), (Y_j)_j, (\omega_i, (\theta_{ij})_j)_i)$ のワルラス均衡 (Walrasian equilibrium) であるとは,任意の i について $p \cdot x_i^* \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p \cdot y_j^*$ が 成り立つことをいう.

価格均衡は価格ベクトルに対して0次同次である。上記のワルラス均衡のための条件も価格ベクトルに対して0次同次であるため,ワルラス均衡は価格ベクトルに対して0次同次である。

ワルラス均衡は価格均衡の特殊ケースなので、価格均衡について成立する厚生経済学の基本定理のような 結果は、ワルラス均衡についてもすべて成立する.

 $^{^{*14}}$ $\theta_{ij} < 0$ は許さないことにする.こういうことがあると企業の利潤最大化が正当化しにくいからである.

6.6.2 例 企業が額面 b_j の社債を発行していたとする. その場合,利潤 $p \cdot y_j^*$ をすべて株主に配当するわけにいかず,社債の支払いを差し引いた $p \cdot y_j^* - b_j$ から株主に配当される. 株主は有限責任をもつので,社債の実際の返済額は $\min\{b_j, p \cdot y_j^*\}$ であり(ただし, $p \cdot y_j^* < 0$ ならば $\max\{b_j, 0\}$),配当は $\max\{p \cdot y_j^* - b_j, 0\}$ である. $\max\{p \cdot y_j^* - b_j, 0\} + \min\{b_j, p \cdot y_j^*\} = p \cdot y_j^*$ であるので,利潤 $p \cdot y_j^*$ は株主と社債の保有者に完全に分配される.

社債の保持割合を η_{ij} とすると、消費者 i の受取は、

$$\theta_{ij} \max\{p \cdot y_i^* - b_i, 0\} + \eta_{ij} \min\{b_i, p \cdot y_i^*\}$$

になる。株式だけがある場合には、予算制約は価格 p を α 倍しても変わらなかったが、このように社債がある場合には予算制約は変化する。 $p\cdot x_i^* \leq \theta_{ij} \max\{p\cdot y_j^* - b_j, 0\} + \eta_{ij} \min\{b_j, p\cdot y_j^*\}$ を要請する価格均衡はワルラス均衡でない。

- **6.6.3** 命題 私有経済 $\mathcal{E}=((X_i,\succsim_i)_i,(Y_j)_j,(\omega_i)_i,(\theta_{ij})_{i,j})$ に対して,生産集合 $\sum_j Y_j$ をもつ唯一の企業からなる経済 $\hat{\mathcal{E}}$ を考えうるが,ワルラス均衡について命題 6.3.9 と同様な関係は一般には成立しない. $\hat{\mathcal{E}}$ を定めようとするとき,初期保有 $(\omega_i)_i$ はともかく,企業を 1 社にする場合に株式保有割合の定め方により,これによってワルラス均衡は一般には一致しない.しかし,ある特殊な場合には一致する.以下はその例である:
 - 1. すべての i について, $\theta_{i1}=\theta_{i2}=\cdots=\theta_{iJ}$,すなわちどの消費者もある一定の割合ですべての企業を所有しているというとき,この値を θ_i で表し, $\hat{\mathcal{E}}=\left((X_i,\succsim_i)_i,\sum_j Y_j,(\omega_i)_i,(\theta_i)_i\right)$ とすれば, \mathcal{E} と $\hat{\mathcal{E}}$ でワルラス均衡の消費配分 $(x_i)_i$ と価格ベクトル p は一致する.
 - 2. すべての j について、 Y_j は収穫一定 $(y_j \in Y_j, \, \alpha \geq 0 \,$ ならば $\alpha y_j \in Y_j)$ であるとする.このとき $\sum_j Y_j$ も収穫一定である.収穫一定ならば均衡における利潤は 0 である,すなわち $\sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^* = 0$ が成立するから, \mathcal{E} と $\hat{\mathcal{E}}$ のどちらのワルラス均衡においても,i の予算制約は

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i$$

である. それゆえこれらのワルラス均衡は一致する.

2'. 2 の一般化. $\sum_j Y_j$ が収穫一定で,すべての j について $0 \in Y_j$ (無活動が可能,possibility of inaction)とするとき, $\hat{\mathcal{E}}$ の均衡で唯一の企業の利潤が 0 であることはすぐにわかるが,実は \mathcal{E} のワルラス均衡でもすべての企業で利潤が 0 である.よって,2 の場合と同様, \mathcal{E} と $\hat{\mathcal{E}}$ のワルラス均衡は一致する.

私有経済の例としてよく使われるモデルを2つ簡単にではあるが、確認しておこう.

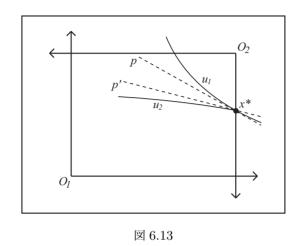
6.6.1 エッジワースボックス経済

この節の内容は MWG の第 15 章 B 節に相当する.

エッジワースボックス経済(Edgeworth Box economy)とは, $L=2, I=2, X_1=X_2=R_+^2, Y_1=\cdots=Y_j=\{0\}$,かつ $\overline{\omega}=(\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2)\in \mathbf{R}_{++}^2$ であるような経済である.これは 2 消費者,2 財の純粋交換経済である.配分の実行可能性の条件は $x_2=\overline{\omega}-x_1$ と同値なので,実行可能な配分の集合は横 $\overline{\omega}_1$ と縦 $\overline{\omega}_2$ のエッジワースボックスで表される.この経済は,価格がどのようにして異なる消費者の需要を調整して実行可能な配分を達成するかを議論できる最も簡単なフレームワークである.MWG の Exercise 15.B.1 と 15.B.2 はよくある問題ではあるが,ぜひ解いてほしい.

エッジワースボックスの描き方と価格均衡:エッジワースボックスは,各消費者の座標軸を交差させ,無 差別曲線や予算線を座標軸の外まで延長して描くとよい(図 6.13). これは消費者の効用最大化問題におい 6.6 私有経済 **125**

て,経済全体の様子は消費者の考慮外にあるということを表している.下図の経済において,配分 x^* は価格ベクトル p のもとで価格均衡を構成するが価格ベクトル p' のもとでは価格均衡を構成しない.したがって,価格均衡が実行可能性を満たさない範囲の選好などにも依存して決まることがわかる.このことは,各消費者の座標軸を交差させずに描いてしまうと(図 6.14),分かりにくくなってしまう.



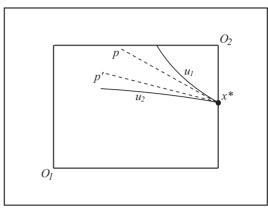


図 6.14

練習問題 6.6.1 消費者の選好が局所非飽和性を満たさないために厚生経済学の第1基本定理が成り立たないようなエッジワースボックス経済を図示せよ.

練習問題 6.6.2 総初期保有ベクトルは (1,2), 第 2 消費者の効用関数 $u_2: \mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{R}$ は

$$u_2(x_2^1, x_2^2) = x_2^1 + x_2^2$$

であるようなエッジワースボックス経済を考えよう.

1. 2 消費者の初期保有ベクトルは $\omega_1=(1/2,2),\,\omega_2=(1/2,0),\,$ 第 1 消費者の効用関数 $u_1:\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}$ は

$$u_1(x_1^1, x_1^2) = \min\{x_1^2, ax_1^1 + (1-a)x_1^2\}$$

で定められるとする. ただしここで a は $0 \le a \le 1$ を満たす定数である. このとき,配分 $x_1 = (1,1), x_2 = (0,1)$ がワルラス均衡配分であるための a に関する必要十分条件を求めよ.

2. 2 消費者の初期保有ベクトルは $\omega_1=(1,1),\,\omega_2=(0,1),\,$ 第 1 消費者の効用関数 $u_1:\mathbf{R}^2_+\to\mathbf{R}$ は

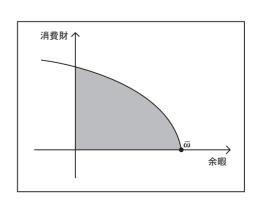
$$u_1(x_1^1, x_1^2) = \min\{x_1^1, ax_1^1 + (1-a)x_1^2\}$$

で定められるとする. ただしここで a は $0 \le a \le 1$ を満たす定数である. このとき,配分 $x_1 = (1,1), x_2 = (0,1)$ がワルラス均衡配分であるための a に関する必要十分条件を求めよ.

6.6.2 ロビンソン・クルーソー経済

この節の内容は MWG の第 15 章 C 節に相当する.

ロビンソン・クルーソー経済 (Robinson Crusoe economy) は $L=2, I=1, J=1, X_1=\mathbf{R}_+^2$, かつ $\overline{\omega}=(\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2)\in\mathbf{R}_+^2$ であるような経済のことである.一方の財の初期保有量を正,もう一方の財のそれをゼロとして,前者の財を投入財,後者の財を生産財と見なして議論することも多い.こう見なしたときには,初期保有量 $\overline{\omega}$ は



横軸上の正の部分に存在し、 Y_1 は \mathbf{R}^2 の左側半分に含まれることになる。すると、実行可能性のための条件は $x_1 \in Y_1 + \{\overline{\omega}\}$ と同値である。この経済は、生産行動と消費行動が別々に行われるときにどのように価格メカニズムが働いて実行可能な配分が達成されるかを議論できる最も簡単なフレームワークである。

練習問題 **6.6.3** 消費者の選好が局所非飽和性を満たさないために厚生経済学の第 2 基本定理が成り立たないロビンソン・クルーソー経済を図示せよ.

6.6.3 無限期間をもつロビンソン・クルーソー経済

これは動学マクロにしばしば登場するモデルである.

各時点で、余暇と消費財が消費される。資本ストックは、生産集合を定める際に言及される。通常は財の 1 種類として扱うが、ここでは生産集合をただひとつ(つまり J=1)とするため、単に生産集合を定義するためにのみ導入する。

- 1. 財
 - 財空間は $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \cdots$ である.
- 2. 消費者
 - 消費集合は $X = \mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R}_+^2 \times \cdots$ であるとする. 消費ベクトルを $x = (x_0, x_1, x_2, \cdots)$ と書く. また,財 1 が余暇,財 2 が消費財とし, $x_t = (x_{1t}, x_{2t}) \in \mathbf{R}_+^2$ と書く.X 上に選好関係 \succsim が定義され, $U: X \to \mathbf{R}$ によって,

$$U(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(x_t)$$

と表現されているものとする. ただし, $u: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}, \beta \in (0,1)$ とする.

- 3. 企業
 - 生産集合 Y は $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times \cdots$ の部分集合であり、生産関数 $F: \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$ と減価償却率 $\delta \in (0,1)$ によって、以下のように定められるものとする。 すなわち、

$$y = (y_0, y_1, y_2, \cdots) \in Y$$

を, $(k_0, k_1, k_2, \cdots) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \cdots$ が存在して, すべての t に対して

$$y_{1t} \le 0,$$

$$y_{2t} + (k_{t+1} - (1 - \delta)k_t) \le F(k_t, -y_{1t})$$
(6.4)

となるとき、と定める. ただし、 $y_t=(y_{1t},y_{2t})$ である. また、 $k_{t+1}-(1-\delta)k_t\geq 0$ という制約を課すのも自然であるが、ここでは課さないでおく.

- 4. 総初期保有量
 - 総初期保有量は $\bar{\omega}=(\bar{\omega}_0,\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\cdots)=((\bar{l}_0,0),(\bar{l}_1,0),(\bar{l}_2,0),\cdots)$ である. すなわち、第 2 財の初期保有量はゼロである.

実行可能条件は、 $x = y + \bar{\omega}$ と書ける. 成分表示すると、全ての t について、

$$x_{1t} = y_{1t} + \bar{l}_t$$
$$x_{2t} = y_{2t}$$

 6.6
 私有経済

である. よって、(6.4) より、適当な $(k_0, k_1, k_2, \cdots) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \cdots$ によって、

$$x_{2t} + (k_{t+1} - (1 - \delta)k_t) \le F(k_t, \bar{l}_t - x_{1t}).$$

と書くことができる. ここで, U(x) が実数値 (有限値) をとるための十分条件を確認しておこう.

6.6.4 補題 u が単調増加関数ならば、任意の $x \in X$ に対して $U(x) > -\infty$.

補題 **6.6.4** の証明
$$U(x) \ge U(0,0,\ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(0) = u(0)/(1-\beta) > -\infty.$$
 ///

6.6.5 補題 u が凹ならば, $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t ||x_t|| < \infty$ を満たす任意の $x \in X$ に対して $U(x) < \infty$.

補題 6.6.5 の証明 u が凹なので、集合

hypo
$$u = \{(x_{1t}, x_{2t}, z) \in \mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R} : z \le u(x_{1t}, x_{2t})\}$$

は凸集合である。そこでこの集合 hypo u に属する任意の点に対して支持平面が存在する,すなわち,ある $(q_1,q_2,q_3)\in \mathbf{R}^3$ とある $c\notin \text{hypo }u$ が存在して,集合 hypo u に属する任意の (x_{1t},x_{2t},z) に対して $q_1x_{1t}+q_2x_{2t}+q_3z\leq c$ が成立する.特に $z=u(x_t)$ でもそうである.また, $q_3=1$ ととっても問題がない*15.

そこで、 $(-q_1, -q_2)$ を新たに $q \in \mathbf{R}^2$ と書けば、任意の $x_t \in \mathbf{R}^2_+$ に対して $u(x_t) \leq q \cdot x_t + c$ が成立する. さらにコーシー・シュワルツの不等式により、 $q \cdot x_t \leq ||q|| \cdot ||x_t||$ である. したがって、

$$U(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(x_t) \le \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (q \cdot x_t + c) \le \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (||q|| \cdot ||x_t|| + c) = ||q|| \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t ||x_t|| + \frac{c}{1-\beta} < \infty$$

$$\text{ \ref{eq:def} 5.}$$

6.6.6 例 無限期の純粋交換経済において第 2 定理を用いた分析が困難になる可能性があることを見よう. 経済には消費者が 1 人いて,企業はいないものとする.消費集合は $X=R_{++}\times R_{++}\times \cdots$ で与えられ,消費者の効用は $U:X\to R$ によって,

$$U(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(x_t), \quad u(x_t) = -\frac{1}{x_t}$$

と表現されているものとする. ただし, $\beta \in (0,1)$ とする. また, 各期における総保有量は $\bar{\omega}_t = \beta^t$ であるとする. したがって, この消費者は生涯予算制約,

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t x_t = \sum_{t=0}^{\infty} p_t \bar{\omega_t}$$

のもとで効用最大化を行う.この動学的最大化問題を解くための一階の条件は,ある $\lambda>0$ が存在して,任意の $t=0,1,\dots$ について $\beta^t u(x_t)=\lambda p_t$ が成立することである.純粋交換経済であるので,市場均衡の条件は任意の $t=0,1,\dots$ について $x_t=\bar{\omega}_t$ である.これらより,価格準均衡を成しうる唯一の価格体系は

^{*} 15 負のときには、平面の法線ベクトル (q_1,q_2,q_3) による空間の向きづけを逆にとればよい。問題となるのは $q_3=0$ の場合だが、もし所望の支持平面として $q_3=0$ なる法線ベクトルをもつものしかとれない、すなわち鉛直な平面しかとれないとすると、u が関数であることに矛盾である。必要なら、凹関数はほとんどいたるところ微分可能であること(凸解析の本を見よ)を用いて、曲面 $z=u(x_t)$ の適当な点で接平面をとればよい。

 $p=(u'(\omega_0),\beta u'(\omega_1),\beta^2 u'(\omega_2),\ldots)=(1/2,1/2,\ldots)$ のスカラー倍である.しかし p と $\bar{\omega}$ は価格準均衡を構成しない.実際,配当 $(1,1,1,\ldots)$ を与える債券* 16 の価格は $\sum_{t=0}^{\infty}p_t$ に等しいがこれは ∞ である.このように無限期間モデルにおいて,財の評価額が無限になってしまうことで,厚生経済学の第 2 基本定理が成立しないことがある.

6.7 超過需要関数

この節の内容は MWG の第 17 章 B 節に相当する.

以下では、純粋交換経済のみ論じることにしよう。つまり、 $Y_1=\cdots=Y_J=\{0\}$ とする。また、任意の i に対して $X_i=\mathbf{R}_+^L$ とし、選好関係 \succsim_i は連続性、厳密な凸性、強単調性を満たすと仮定する。さらに $\overline{\omega}=\sum_{i=1}^I \omega_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ とする。

練習問題 6.7.1 これらの条件の下では、任意の価格準均衡は価格均衡であることを証明せよ.

超過需要関数 (excess demand function) を、次を満たす写像 $z: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ と定義する.

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} (x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i).$$

ただし、任意のiに対して x_i は第i消費者の需要関数である *17 .

超過需要関数の定義の仕方から、次の命題が直ちに得られる.

6.7.1 命題 価格ベクトル p がワルラス均衡価格ベクトルであることと, z(p) = 0 は同値である.

超過需要関数は次の性質を満たすことが知られている.

6.7.2 命題 任意の i に対して $X_i = \mathbf{R}_+^L$ とし, $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^I \omega_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ と仮定する.選好関係 \succsim_i は連続性,厳密な凸性,強単調性を満たすとする. $Y_1 = \cdots = Y_J = \{0\}$ とする.このとき,超過需要関数 z は以下の性質をもつ.

連続性 z は連続である.

0次同次性 z は 0 次同次である.

ワルラス法則 任意の $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対して、 $p \cdot z(p) = 0$ が成り立つ.

下への有界性 z は下に有界である.つまり,ある $s\in \mathbf{R}$ が存在して任意の $\ell=1,2,\cdots,L$ と任意の $p\in \mathbf{R}_{++}^L$ に対して $z^\ell(p)\geq s$ が成り立つ.ただし, $z^\ell(p)$ は z(p) の第 ℓ 座標を表す.

境界挙動条件 \mathbf{R}_{++}^L 内の点列 (p_1,p_2,\ldots) が価格ベクトル $p\in\mathbf{R}_+^L\setminus(\mathbf{R}_{++}^L\cup\{0\})$ に収束するとき,

$$\max\{z^1(p_n),\ldots,z^L(p_n)\}\to\infty\quad(n\to\infty).$$

ただし, $z^{\ell}(p_n)$ は $z(p_n)$ の第 ℓ 座標を表す.

命題 6.7.2 の略証 連続性, 0 次同次性, ワルラス法則, 下への有界性は, それぞれ各消費者の需要関数が同様の性質をもつことから直ちに導出される. 境界挙動条件も各消費者の需要関数の性質から導出されるが, これは詳しく証明しよう.

^{*} *16 このように無限期にわたって配当を与え続けるような債券をコンソール債という.

^{*17} 任意の i に対して選好関係 \succsim_i は厳密な凸性を満たすから $x(p,p\cdot\omega_i)$ は 1 点集合であり、したがって超過需要対応は関数である.

 $p\cdot\left(\sum_{i=1}^I\omega_i\right)>0$ より、少なくともひとつのi に対しては $p\cdot\omega_i>0$ である.このi に対し、

$$\max \left\{ x_i^1(p_n, p_n \cdot \omega_i), \dots, x_i^L(p_n, p_n \cdot \omega_i) \right\} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

を示せば十分である。ただし, $x_i^l(p_n,p_n\cdot\omega_i)$ は $x_i(p_n,p_n\cdot\omega_i)$ の第 l 成分である。背理法で証明しよう。数列 $(\max\{x_i^1(p_n,p_n\cdot\omega_i),\ldots,x_i^L(p_n,p_n\cdot\omega_i)\})_{n=1}^\infty$ を上に有界と仮定する。 $X=\mathbf{R}_+^L$ なので,数列 $(\max\{x_i^1(p^n,p^n\cdot\omega_i),\ldots,x_i^L(p_n,p_n\cdot\omega_i)\})_{n=1}^\infty$ は下にも有界であり,したがって有界な部分列が存在する。その部分列を再び $(\max\{x_i^1(p_n,p_n\cdot\omega_i),\ldots,x_i^L(p_n,p_n\cdot\omega_i)\})_{n=1}^\infty$ と書くことにする。点列 $(\{x_i^1(p_n,p_n\cdot\omega_i),\ldots,x_i^L(p_n,p_n\cdot\omega_i)\})_{n=1}^\infty$ の極限を $v\in\mathbf{R}_+^L$ と書く。

ワルラス需要関数に対するワルラス法則より, $p_n\cdot x_i(p_n,p_n\cdot\omega_i)=p_n\cdot\omega_i$ なので, $n\to\infty$ とすれば $p\cdot v=p\cdot\omega_i$ を得る.

もしv が価格pの下での選好最大化問題の解なら、これは選好関係 \gtrsim_i の強単調性に矛盾するので、これを示すことにする。そこで、 $p\cdot x_i \leq p\cdot \omega_i$ とする。ここで、

$$x_{i,n} = \frac{p_n \cdot \omega_i}{p_n \cdot x_i} x_i$$

とすると, $p_n \cdot x_{i,n} = p_n \cdot \omega_i$ を得る. かつしたがって,

$$x_i(p_n, p_n \cdot \omega_i) \succsim_i x_{i,n}$$

が成り立つ. 選好関係 \gtrsim_i は連続だから, $n \to \infty$ のとき, $\frac{p_n \cdot \omega_i}{p_n \cdot x_i} \to \frac{p \cdot \omega_i}{p \cdot x_i}$ なので,

$$v \succsim_i \frac{p \cdot \omega_i}{p \cdot x_i} x_i,$$

が成立する. \succsim_i は強単調なので, $\frac{p\cdot\omega_i}{p\cdot x_i}\geq 1$ より, $\frac{p\cdot\omega_i}{p\cdot x_i}x_i$ 太 $_i$ x_i よって $v\succsim_i x_i$ が成立する. このように,v は p の下での選好最大化問題の解であるという矛盾が得られた.

ただし、境界条件が満たされるからと言って $p_n^l \to 0$ ならば必ず $z^l(p_n) \to \infty$ と限らないことに注意.

練習問題 6.7.2 3 財 1 消費者より成る経済を考えよう. 初期保有量は \mathbf{R}_{++}^3 に属すると仮定する. 選好関係は効用関数 $u: \mathbf{R}_+^3 \to \mathbf{R}$ で表されるとする. 超過需要関数を z で表す. z の第 ℓ 成分を z^ℓ と書くことにする. $p \in \mathbf{R}_+^3 \setminus \{0\}$ とし, p_1, p_2, \ldots を,p に収束する \mathbf{R}_{++}^3 内の点列とする.

1. 効用関数 u が

$$u(x^1,x^2,x^3) = x^1 \times \sqrt{x^2} \times \sqrt{x^3}$$

で定義されるとき,任意の ℓ に対し, $p^\ell=0$ ならば, $n\to\infty$ のとき $z^\ell(p_n)\to\infty$ が成立することを証明せよ.

2. 効用関数 u が

$$u(x^1, x^2, x^3) = x^1 + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3}$$

で定義されるとき、z は 1 で証明された性質を持つか?

6.8 ワルラス均衡の存在

この節の内容は MWG の第 17 章 C 節に相当する.

これまでワルラス均衡の性質を論じてきたが、その存在は常に保証されるのだろうか. ワルラス均衡は前節の仮定の上で存在することが知られている.

6.8.1 定理 任意の i に対して $X_i = \mathbf{R}_+^L$ とし, $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^I \omega_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ と仮定する.選好関係 \succsim_i は連続性,厳密な凸性,強単調性を満たすと仮定しよう. $Y_1 = \cdots = Y_J = \{0\}$ とする.このとき,ワルラス均衡は存在する.

本格的な証明を与えるまえに、中間値の定理によって簡単に示すことができる L=2 の場合に限った考察をしてみよう. L=2 の場合はグラフ等を用いて視覚的に表現でき、またより一般的な場合への示唆を与えるという点で重要である.

価格ベクトルを $(p^1,1)$ とする(ただし, $p^1>0$ とする). ワルラス法則から第 1 財に関してのみ論じればよいから,ワルラス均衡の存在を示すには $z_1(p^1,1)=0$ となるような p^{1*} が存在することを示せばよい. 境界挙動条件より,もし p^1 が十分に小さければ第 1 財には超過需要が発生するから $z(p^1,1)>0$ が成立する.一方,もし p^1 が十分に大きければ第 1 財には超過供給が発生するから $z(p^1,1)<0$ が成立する. 超過需要関数 $z_1(p^1,1)$ は連続だから,中間値の定理により,たしかに少なくともひとつの p^{1*} が存在して $z(p^{1*},1)=0$ が成立することがわかる.

6.8.1 存在定理の仮定と不動点定理

存在定理は上の命題 6.7.2 を満たす関数 z に対し,z(p)=0 となる価格体系 p が存在することを示せば十分である.ここでは L=2 のケースにおいて,z が命題 6.7.2 の 0 次同次性を除く,4 性質のうち 1 つを満たしていないならば,z(p)=0 を満たす $p\in \mathbf{R}_{++}^L$ が存在しないことを図を用いて示す.0 次同次性が満たされない場合でも,残りの 4 性質を満たせば,均衡は存在する.0 次同次性は均衡の存在ではなく,局所的一意性を保証するために欠かせない.

6.8.2 例 下の4つの図は(0次同次性以外の)いずれかひとつのみの条件に抵触している.

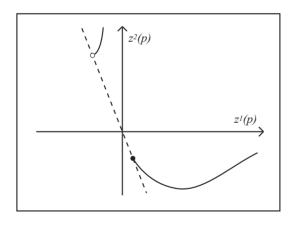


図 6.15 連続性を満たさない例.

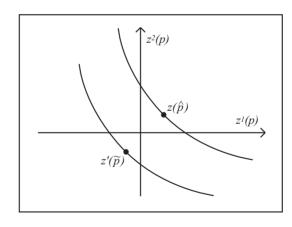


図 6.16 ワルラス法則を満たさない例.

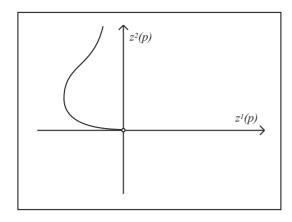
練習問題 6.8.1 上の図において、それぞれの図が満たしていない性質以外の他のすべての性質を満たしていることを確認せよ.

練習問題 6.8.2 $z: \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}^2$ を次で定める.

$$z^2(p) = \frac{\max\{p^1, p^2\}}{\min\{p^1, p^2\}},$$

$$z^1(p) = -\frac{p^2}{p^1}z^2(p)$$

この超過需要関数を図示し、5 性質のうち、どの性質が満たされていないかを言え、また、それ以外の他のすべての条件が満たされていることを確認せよ.





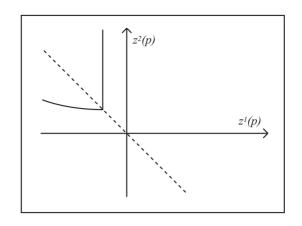


図 6.18 下に有界という条件を満たさない例.

均衡の存在定理のために次の定理を用いる.この定理の証明には数学的な準備が必要なためここでは省略する.

6.8.3 定理 (角谷の不動点定理) 集合 $P \subset \mathbf{R}^L$ は非空,凸,コンパクトであるとする.また対応 $f: P \to P$ について,任意の $p \in P$ に対して $f(p) \subseteq P$ は非空,凸であり,f のグラフ $\{(p,q) \in P \times P | q \in f(p)\}$ が閉集合であるとする*18.このときある $p^* \in P$ が存在して $p^* \in f(p^*)$ が成り立つ.

準備が整ったので均衡の存在を証明していく. 角谷の不動点定理はコンパクト集合からそれ自身への対応に関して成立している命題であるため, z に直接適用することができず, 少し工夫を要する.

6.8.4 定理 関数 $z: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ が命題 6.7.2 の 5 性質のうち,0 次同次性以外の 4 性質をすべて満たすとする.このときある $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ が存在して z(p) = 0 が成り立つ.

定理 6.8.4 の証明 R_+^L の部分集合 P を,

$$P = \{ p \in \mathbf{R}_{+}^{L} | p^{1} + \dots + p^{L} = 1 \}$$

として定める。このとき P は非空, 凸, コンパクト集合である。P の内部 $\{p \in P |$ 任意の l に対して $p^l > 0\}$ を int P で, 境界 $\{p \in P |$ ある l に対し $p^l = 0\}$ を ∂P で表す。対応 $f: P \to P$ を,

$$f(p) = \begin{cases} \{q \in P | 任意の \ r \in P \ について \ z(p) \cdot q \geq z(p) \cdot r \ \} & (p \in \text{int } P \text{ のとき}) \\ \{q \in P | p \cdot q = 0\} & (p \in \partial P \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定める. f の定義と以下は同値である. 簡単に示せるので各自試みられたい *19 .

$$f(p) = \begin{cases} \{q \in P | z^l < \max_k z^k(p) \text{ ならば } q^l = 0\} & (p \in \text{int } P \text{ のとき}) \\ \{q \in P : p^l > 0 \text{ ならば } q^l = 0\} & (p \in \partial P \text{ のとき}) \end{cases}$$

f の定義より p が f の不動点ならば $p \in \operatorname{int} P$ であり,また簡単な議論から f の任意の不動点がワルラス均衡価格であることがわかる *20 .ゆえに f が角谷の不動点定理の仮定を満たすことを示せば証明が完了する.任意の p に対し,f(p) が凸,非空であることは定義から明らかであるので,閉グラフをもつことを示せば十分である.ユークリッド空間で集合 A が閉であるとは,集合内の任意の収束列の極限が A に属する

^{*} 18 このとき, f は閉グラフをもつ,という. f の定義域と値域がともにコンパクトであることから, f が閉グラフをもつことは f が上半連続 (upper semi-continuous) であることと同値である.

^{*19} 対応 f は市場の価格調整メカニズムを表現していると解釈することができる。すなわち調整前価格ベクトル p と調整後価格ベクトル $q \in f(p)$ を比較すると超過需要 $z_l(p)$ が相対的に小さい財 l について $q^l < p^l$ が成り立っている。

^{*20} ここでの議論は練習問題とする.

ことと同値である* 21 . $P \times P$ 上の点 (p,q) に収束するグラフ上の収束列 $\{(p_n,q_n)\}$ を任意にとる. つまり $q_n \in f(p_n)$ とする. ここで $p \in \operatorname{int} P$ の場合と $p \in \partial P$ の場合に分けて $q \in f(p)$ を示す. 他のケースもあり得るのだが,これらの 2 つの場合を考えれば十分である.

(i) $p \in \text{int } P$ の場合

p が内点であるので、十分大きな n に対して $p_n \in \operatorname{int} P$ が成立する. この場合、任意の $r \in P$ に対して

$$z(p_n) \cdot q_n \ge z(p_n) \cdot r$$

が成立する. 極限をとると,

$$z(p) \cdot q \ge z(p) \cdot r$$

であり、したがって $q \in f(p)$ である.

(ii) $p \in \partial P$ の場合

 $p^l>0$ ならば $q^l=0$ であることを示そう。もし $p_n\in\partial P$ ならば,十分大きな n に対して $p_n^l>0$ なので 定義から $q_n^l=0$.そこで一般性を失うことなく $p_n\in \operatorname{int} P$ とする.まず,境界挙動条件より,点列 p_n がベクトル $p\in \mathbf{R}_+^L\setminus (\mathbf{R}_{++}^L\cup\{0\})$ に収束するとき, $\max_k z^k(p_n)\to\infty$ が成立する.次に,任意の l について, $p^l>0$ ならば, $(z^l(p_n))_n$ は上に有界であることを示そう.s を,任意の $p\in \mathbf{R}_{++}^L$ と任意の k に対して, $z^k(p_n)>s$ が成立する定数とすると,

$$z^{l}(p_{n}) = -\frac{1}{p_{n}^{l}} \sum_{k \neq l} p_{n}^{k} z^{k}(p_{n}) < -\frac{1}{p_{n}^{l}} \sum_{k \neq l} p_{n}^{k} s < -\frac{s}{p_{n}^{l}} < -\frac{2s}{p^{l}}$$

ここで、3行目から4行目へは、十分大きなnに対し $p_n^l > \frac{p^l}{2}$ と取れることによる。以上より、任意のlに対して $p^l > 0$ ならば、 $(z^l(p_n))_n$ も有界である。したがって、十分大きなnに対しては $z^l(p_n) < \max_k z^k(p_n)$ が成立する。よって、 $q_n^l = 0$ であり、 $q^l = 0$ である。 ///

練習問題 6.8.3 任意の $p \in \text{int } P$ に対し,z(p) = 0 が成立することと, $p \in f(p)$ が成立することは同値であることを証明せよ.

6.9 Sonnenschein-Mantel-Debreu の定理

この節の内容は MWG の第 17 章第 E 節に相当する.

Sonnenschein-Mantel-Debreu の定理(以下,SMD 定理)は,純粋交換経済において,財の種類以上に消費者がいる $(I \geq L)$ ならば, \mathbf{R}_{++}^L のコンパクト部分集合において,命題 6.7.2 の連続性,0 次同次性,ワルラス法則以外に,消費者の選好最大化行動の結果として得られる超過需要関数の性質は存在しないことを保証する定理である.

6.9.1 SMD 定理とは

この定理ははじめ Sonnenschein (1972) が問題を提起し、Mantel (1974), Debreu (1974) がその証明を拡張するという方向で議論が進んだ. 定理の主張は次である.

 $^{^{*21}}$ 自明ではない. 各自確認されたい.

6.9.1 定理 関数 $z: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ が連続性、0 次同次性、ワルラス法則を満たすとする. $I \geq L$ ならば、コンパクト集合 $C \subset \mathbf{R}_{++}^L$ に対し、I 人の消費者と L 種類の財から構成されるある経済が存在して、その経済の超過需要関数は C 上で z に一致する.

この定理ではコンパクト集合 C に z の定義域を限定するので、境界挙動条件の特徴づけはなされない。

この定理を標語的に解釈すると、命題 6.7.2 の条件を満たすどんな関数をとってきても、それはある経済 の超過需要関数になるということである。もともとは超過需要関数の性質を深く知りたいという動機から特 徴づけに関する研究が始まったため、この観点に立つとこの定理は極めて否定的である。どんな ad hoc な 仮定をおいても、それを正当化する経済を構成できるからである。

注意すべきは、ある経済の基礎に関して、ある特定の性質を見たい場合はこの定理は何も言っていないということである。たとえば、この定理が最近のマクロ経済学等を批判するものではない。最近の議論では経済の選好関係が生産技術を特定化し、そこで記述される経済を解析することを目標とするため、すべての経済において成立している必要はないのである。

本題の証明に入るまえに、この定理でなぜ消費者の数が問題になるのかを見ておこう。ここでは、もし I < L なら、(SMD 定理に反して)超過需要関数が連続性、0 次同次性、ワルラス法則以外の性質を持つことを見る。需要関数 x_i が連続微分可能であると仮定すると、

$$Dz_i(p) = S_i(p, p \cdot \omega_i) - D_w x_i(p, p \cdot \omega_i) z_i(p, p \cdot \omega_i)^\top \in \mathbf{R}^{L \times L}$$

を得る。ただし、 $S_i(p,p\cdot\omega_i)\in \mathbf{R}^{L\times L}$ はスルツキー代替行列であり、 z_i は消費者 i の超過需要関数である (この記法は命題 6.7.2 の記法とは少し異なることに注意されたい)。したがって、 $Dz_i(p)$ は線型部分空間

$$\{v \in \mathbf{R}^L \mid p \cdot v = z_i(p, p \cdot \omega_i) \cdot v = 0\}.$$

の上で負値半定符号である。なぜなら,スルツキー代替行列は負値半定符号であり,さらに v がこの線型部分空間に属するなら, $-D_w x_i(p,p\cdot\omega_i)^{\top}v=0$ だからである。これより, $Dz(p)=\sum_{i=1}^I Dz_i(p)$ は線型部分空間

$$\bigcap_{i=1}^{I} \left\{ v \in \mathbf{R}^{L} \mid p \cdot v = z_{i}(p, p \cdot \omega_{i}) \cdot v = 0 \right\}$$

$$= \left\{ v \in \mathbf{R}^{L} \mid p \cdot v = z_{1}(p, p \cdot \omega_{i}) \cdot v = \dots = z_{I}(p, p \cdot \omega_{i}) \cdot v = 0 \right\}.$$

の上で負値半定符号である。 もし p が均衡価格ベクトルなら,この線型部分空間の次元は L-I 以下になる *22 . したがってもし財の種類よりも消費者の数が少なければ,Dz(p) が負値半定符号になるような価格ベクトルが存在する.

この例からわかるように、たしかに I < L なら超過需要関数 z(p) は命題 6.7.2 の 5 性質以外の性質を持たない.しかし、 $I \ge L$ なら命題 6.7.2 の 5 性質以外の性質は一般には成り立たないことがわかっている.これが SMD 定理である.

これから本題の証明に向かうが、準備のために小節を2つ用意する.

6.9.2 直交射影

 $p \in \mathbb{R}^L$ に対し、それと直交するベクトル全体の空間、

$$T_p = \{ v \in \mathbf{R}^L : (p, v) = 0 \}$$

^{*22} L 次元ユークリッド空間のなかで,(I+1) 本の制約がかかっている.このうち $z_1 \cdot v = 0$ から $z_I \cdot v = 0$ までの I 本のうちの 1 本はワルラス法則によって従属するから,独立の方程式は全部で I 本である.

を考える.これは \mathbf{R}^L の部分空間になる. \mathbf{R}^L を T_p とその直交補空間 $(T_p)^\perp$ とに直和分解したとき,任意のベクトル $x \in \mathbf{R}^L$ は T_p の元と直交補空間 $(T_p)^\perp$ の元との和に一意的に分解できる.

この T_p への直交射影を Π_{T_p} で表す.実際にこれを求めてみよう.y の T_p への直交射影 $\Pi_{T_p}(y)\in T_p$ は,適当な $t\in \mathbf{R}$ によって,

$$\Pi_{T_p}(y) = y + tp$$

と書けるはずだが、これがpと直交する、すなわちpとの内積が0であるという条件を用いると、

$$\Pi_{T_p}(y) = y - \frac{p \cdot y}{\|p\|^2} p$$

と表示できる.

 $\{e_1,\ldots,e_L\}$ を \mathbf{R}^L の標準基底とする. T_p への直交射影 $\Pi_{T_p}(e_\ell)$ は,

$$\Pi_{T_p}(e_{\ell}) = e_{\ell} - \frac{p \cdot e_{\ell}}{\|p\|^2} p = e_{\ell} - \frac{p_{\ell}}{\|p\|^2} p$$

を満たす. ただし p_ℓ は p の第 ℓ 座標である.

6.9.2 命題 この $\Pi_{T_n}(e_\ell)$ は次の最大化問題の解の超過需要関数になっている.

$$\max_{x \in \mathbf{R}^L} \quad -\|x - e_{\ell}\|^2$$
 subject to $p \cdot x \le 0$.

6.9.3 顕示選好の強公理と Richter の定理

SMD 定理は顕示選好の強公理を用いることで非常に直感的に証明することが可能である。ここで顕示選好の強公理の定義と簡単な性質を挙げ、証明の中心を担う Richter の定理を証明する。以後 $z: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ は $p \cdot z(p) \leq 0$ を満たす任意の関数とする。

6.9.3 定義 $p_i \cdot z(p_{i+1}) \le 0$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, かつ, $p_N \cdot z(p_1) \le 0$ ならば $z(p_1) = z(p_N)$ が成立するとき z が顕示選好の強公理を満たすという.ここで N は任意の自然数である.

強公理が要請しているのは、前の価格のもとで購入可能であるというサイクルが循環していないということである。もしこの関数 z が効用最大化から導出されていれば、選好の推移性より強公理を満たす。つまり、 $\Pi_{T_p}(e_\ell)$ は強公理を満たす。逆に強公理を満たす任意の関数はある効用最大化問題の解として支持されるか、という問題への解答が Richter の定理である。

6.9.4 定理 (Richter (1966)) 関数 z が強公理を満たすとする.このとき効用最大化の解が z になるような選好と総保有量が存在する.

この定理により SMD 定理を部分的にではあるが、簡単に解くことが可能である。 SMD 定理では適当な 関数 z に対して経済を構成しなくてはならないが、この定理により、うまく強公理を満たすように経済を作れば十分であるとわかる。

強公理を用いた手法は大変有効であるが、強公理であることを直接示すことが難しい場合がある. そのため強公理に類似した概念を導入する.

6.9.5 定義 z が比例的に一対一であるとは,z(p)=z(q) ならば,ある α が存在して, $p=\alpha q$ が成立することを言う.

この定義から直ちに導かれる補題を導入する.

6.9.6 補題 z が比例的に一対一で、0 次同次であるとする.このとき強公理は次と同値である.

 $p_i \cdot z(p_{i+1}) \leq 0, \ i=1,2,\ldots,N-1,$ かつ, $p_N \cdot z(p_1) \leq 0$ ならば, ある α が存在して, $p_1=\alpha p_N$ である.

補題 **6.9.6** の証明 強公理が満たされているとする.このとき, $p_i \cdot z(p_{i+1}) \leq 0$, $i=1,2,\ldots,N-1$,かつ, $p_N \cdot z(p_1) \leq 0$ ならば, $z(p_1) = z(p_N)$ である.比例的に一対一なので, α が存在して, $p_1 = \alpha p_N$ が成立する.ゆえに示された.

逆に補題の同値条件が満たされているとする.つまり, $p_i \cdot z(p_{i+1}) \leq 0$, $i=1,2,\ldots,N-1$,かつ, $p_N \cdot z(p_1) \leq 0$ ならば,ある α が存在して, $p_1=\alpha p_N$ である.ゆえに $z(p_1)=z(\alpha p_N)=z(p_N)$ である. 2つ目の等式は z が 0 次同次であることから従う. ///

6.9.7 補題 $a: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}_{++}$ とする. z が 0 次同次であり,補題 6.9.6 の条件を満たし,a が 0 次同次であるならば,a(p)z(p) は補題 6.9.6 の条件を満たし,0 次同次である* 23 .

補題 **6.9.7** の証明 0 次同次性は明らかである. $p_i \cdot a(p_{i+1})z(p_{i+1}) \leq 0$, $i=1,2,\ldots,N-1$, かつ, $p_N \cdot a(p_1)z(p_1) \leq 0$ と仮定する. a(p)>0 より, $p_i \cdot z(p_{i+1}) \leq 0$, $i=1,2,\ldots,N-1$,かつ, $p_N \cdot z(p_1) \leq 0$ である. ゆえに,ある α が存在して, $p_1=\alpha p_N$ である.

練習問題 **6.9.1** 関数 $z: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ は顕示選好の強公理を満たすとする(つまり, \mathbf{R}_{++}^L 内の任意の有限 点列 p_1, p_2, \ldots, p_N に対し,もし $p_1 \cdot z(p_2) \leq 0, \ p_2 \cdot z(p_3) \leq 0, \ldots, p_{N-1} \cdot z(p_N) \leq 0$ かつ $p_N \cdot z(p_1) \leq 0$ ならば, $z(p_1) = z(p_N)$ が成立するとする). 関数 $a: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}_{++}$ は,任意の $p_1 \in \mathbf{R}_{++}^L$ と $p_2 \in \mathbf{R}_{++}^L$ に 対し, $z(p_1) = z(p_2)$ ならば $a(p_1) = a(p_2)$ を満たすとする.

- 1. z と a はいずれも 0 次同次であることを証明せよ.
- 2. 関数 $az: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ を、任意の $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対し、az(p) = a(p)z(p) とおくことで定義すると、az は顕示選好の強公理を満たすことを証明せよ.

練習問題 6.9.2 $z: \mathbb{R}_{++}^L \to \mathbb{R}^L$ を超過需要関数とする.

- 1. もし z が顕示選好の弱公理を満たす(つまり,任意の $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ と $q \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対し,もし $p \cdot z(q) \leq 0$ かつ $q \cdot z(p) \leq 0$ ならば,z(p) = z(q) が成立する)ならば,任意の $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ と $q \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対し,もし z(p) = 0 かつ $z(q) \neq 0$ ならば, $p \cdot z(q) > 0$ が成立することを証明せよ.
- 2. 任意の $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ と $q \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対し、もし z(p) = 0 かつ $z(q) \neq 0$ ならば、 $p \cdot z(q) > 0$ が成立する と仮定する。このとき、均衡は高々ひとつ存在することを証明せよ。

6.9.4 SMD 定理の証明

数学的な議論の難しさを排除するため、ここでは少し定理の条件を変え再掲する.

^{*23} 強公理を満たすかどうかはわからないことに注意せよ.

6.9.8 定理 (Debreu (1974)) 集合 C を R_{++}^L のコンパクト部分集合とする.このときもし関数 z: $R_{++}^L \to R^L$ が連続性,0 次同次性,ワルラス法則を満たすならば, $I \geq L$ なる I 人の消費者と L 種類の財から構成されるある経済が存在して,その経済の超過需要関数が C 上で z に一致する.

定理 **6.9.8** の証明 前章までの内容に沿うようにするため、技術的な問題であるが、*m* を次のように決める.

$$m = -\min_{p \in C} \min_{1 \le \ell \le L} \frac{z_{\ell}(p)}{p_{\ell}/\|p\|} + 1$$

この最小値はzの連続性より従う. すると、任意の $p \in C$ に対して次が成立する.

$$z(p) + \frac{m}{\|p\|}p > 0$$

これを次のように表すことで関数 a_l を定めよう.これにより決まる関数を $a_\ell(p)$ とおく.すると次のように表示できる.

$$z(p) + \frac{m}{\|p\|} p = \sum_{\ell=1}^{L} a_{\ell}(p) e_{\ell} = \begin{pmatrix} a_{1}(p) \\ a_{2}(p) \\ \vdots \\ a_{L}(p) \end{pmatrix}.$$

左辺が正で、連続、0 次同次より、 a_l は正で、連続、0 次同次である。ここで両辺の射影をとる。命題 6.9.2 と、z がワルラス法則を満たすことから、 $\Pi_{T_p}(z(p))=z(p),\Pi_{T_p}((m/\|p\|)p)=0$. 線形性より、射影をとると次の形になる。

$$z(p) = \sum_{\ell=1}^{L} a_{\ell}(p) z_{\ell}(p).$$

ここで $a_{\ell}(p)z_{\ell}(p)$ は補題 6.9.7 より、補題 6.9.6 の条件を満たす。もし $a_{\ell}(p)z_{\ell}(p)$ が比例的に一対一であるならば、強公理を満たしているとわかるが、これは正しい*24. Richter の定理より、超過需要関数が $a_{\ell}(p)z_{\ell}(p)$ となる選好が存在する. ///

6.10 根岸の方法と効用可能性集合

本節以下では、根岸の方法 (Negishi method) による均衡の存在問題の取り扱いを紹介する. そのため本節では何度か前節までの内容を繰り返すところがある.

ある経済 $E=((X_i,\succsim_i)_{i=1,...,I},(Y_j)_{j=1,...,J},\bar{\omega})$ に対し、根岸の方法を適用するために別の経済:

$$\hat{E} = \left((X_i, \succsim_i)_{i=1,\dots,I}, \sum_j Y_j, \bar{\omega} \right).$$

を考える. これと経済 E との違いは、企業一社のみ存在することである. \hat{E} も 1 つの経済なので、これについても実行可能配分・パレート効率的配分・価格均衡が考えられる(命題 6.3.9 を見よ).

6.10.1 定義 すべての i について,選好 \succsim_i は効用関数 $u_i: X_i \to \mathbf{R}$ で表されるとする.実行可能な配分全体によって達成可能な効用を列挙したもの,

$$V = \{(u_1(x_1), \dots, u_I(x_I)) \in \mathbf{R}^I \mid ((x_i)_i, (y_j)_j) \text{ は } E \text{ o}$$
実行可能配分 $\}$

を効用可能性集合 (utility possibility set) という.

E と \hat{E} の実行可能消費配分は同じなので,E と \hat{E} のどちらでも V は同じである.

6.10.2 命題 $(x_i)_i$ は実行可能消費配分とするとき, $(x_i)_i$ がパレート効率的消費配分であることと,

$$(\{(u_1(x_1),\ldots,u_I(x_I))\}+\mathbf{R}_+^I)\cap V=\{(u_1(x_1),\ldots,u_I(x_I))\}$$

であることとは同値である. これはまた,

$$(\{(u_1(x_1),\ldots,u_I(x_I))\}+(\mathbf{R}_+^I\setminus\{0\}))\cap V=\varnothing$$

としても同値である.

次の図は、消費者が I=2 人である場合について、上の命題の述べるところを図示したものである。効用可能性集合 V に属する効用ベクトルのうち、V の右上側の境界上の点だけがパレート効率的であることを示している。

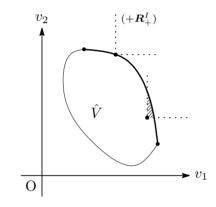


図 6.19 上がよい例,下が悪い例

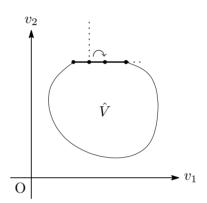


図 6.20 水平な部分がある場合

6.10.3 定義(定義 6.3.16 の再掲)実行可能配分 $(x_i^*)_i$ が弱パレート効率的 (weakly Pareto efficient) であるとは、全員を改善する、すなわちすべての i について $x_i \succ_i x_i^*$ となるような実行可能配分が存在しないことをいう。

パレート効率的ならば弱パレート効率的である.

6.10.4 命題 弱パレート効率性について上の命題 6.10.2 は,「実行可能配分 $(x_i)_i$ が弱パレート効率的」と「 $(\{(u_1(x_1),\ldots,u_I(x_I))\}+\mathbf{R}_{++}^I)\cap V=\varnothing$ 」とが同値となる.

次の命題は、Vのコンパクト性を保証するものである.

6.10.5 命題 もし (i) すべての i について u_i が連続,かつ (ii) 実行可能(消費)配分の集合がコンパクトならば、V もコンパクトである.

命題 6.10.5 の証明 実行可能消費配分全体を F と書くと,各 u_i の連続性から写像 $F \ni (x_i)_i \mapsto (u_i(x_i))_i \in \mathbf{R}^I$ は連続である. コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである. ///

有限種類の財では、(i) は選好関係の完備性・推移性・連続性と同値であり、(ii) は、 $((x_i)_i,(y_j)_j) \in \mathbf{R}^{LI} \times \mathbf{R}^{LJ}$ すなわちユークリッド空間の部分集合だから、この集合が有界閉であることを要請することと同値だが、これは難しい場合もある.

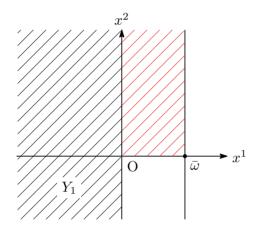
極端な例は次のものである。企業がなく、消費者が 2 人である場合を考えよう (I=2,J=0). $X_1=X_2=\mathbf{R}^L$ とすると、実行可能配分の集合はコンパクトでない(下に有界でないケース)。 証券市場分

析で、空売りもできると想定すると、保有できるポートフォリオ全体の集合が消費集合であり、こういう場合には下に有界でないケースも含めて均衡の存在証明をする必要がある*25.

これほど極端ではない別のケースも考えられる.以下ではいずれも $L=2, I=1, X_1=\mathbf{R}_+^2$ であるとする. $x_1=\sum_j y_j+\bar{\omega}$ は $x_1\in\sum_j Y_j+\{\bar{\omega}\}$ と同じことであり,このとき $\mathbf{R}_+^2\cap\left(\sum_j Y_j+\{\bar{\omega}\}\right)\neq\varnothing$ である.

6.10.6 例 (1) 図 6.21 は非有界な生産集合 Y_1 (黒斜線部) に対して実行可能配分の集合(赤斜線部)も非有界であるケースである.

(2) 図 6.22 は同じく非有界で収穫逓増な生産集合 Y_1 に対し、初期賦存 ω しだいで実行可能配分が有界であったりそうでなかったりするケースである.



 $\boxtimes 6.21$ (1) J = 1. $\bar{\omega}$ $t \omega_2 = 0$.

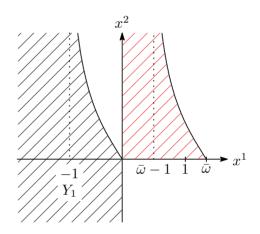
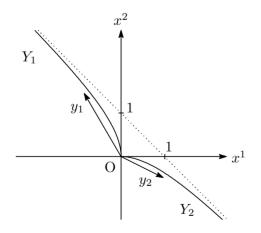


図 6.22 (2) J=1. $\bar{\omega}<1$ のときは有界.

6.10.7 例 (3) 図 6.23 は,直線 $x_1+x_2=1$ を漸近線とし第 2 象限に含まれる企業 1 の生産集合 Y_1 の生産可能性フロンティアと,同じく第 4 象限に含まれる企業 2 の生産集合 Y_2 のフロンティアを示している.図 6.24 は,2 企業の生産集合の和 Y_1+Y_2 が, $x_1+x_2=2$ より左下側の半平面であることを示している.ただし境界線は含まない.したがって $(Y_1+Y_2)\cap \mathbf{R}_+^2$ はそのうち第 1 象限にある部分の直角三角形であり,これは実行可能配分の集合が有界だがコンパクトでない例になっている.このことは詳しく示しておこう.



 $\boxtimes 6.23$ (3) J = 2, $\bar{\omega} = 0$.

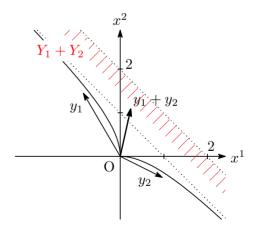
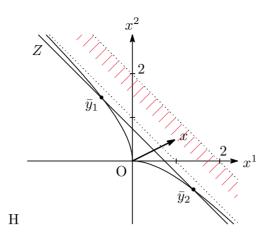


図 6.24 (3) 左図の Y_1 と Y_2 を集計したもの.

主張は.

$$Y_1 + Y_2 = \{ (x = (x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2 \mid x^1 + x^2 < 2 \}$$
(6.5)

^{*&}lt;sup>25</sup> 詳しくは参考文献の Brown and Werner (1995) や Hart (1974).



である(等号が入っていないのでフロンティアが達成できない, すなわち閉でなく, したがって弱パレート効率的な配分が存在しない).

 $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ とし、 $y = y_1 + y_2$ と書く.

$$y^{1} + y^{2} = (y_{1}^{1} + y_{2}^{1}) + (y_{1}^{2} + y_{2}^{2})$$

$$= \underbrace{(y_{1}^{1} + y_{1}^{2})}_{<1} + \underbrace{(y_{2}^{1} + y_{2}^{2})}_{<1} < 2$$

だから, $y_1 + y_2$ は (6.5) の右辺に属する.

逆に, y は (6.5) の右辺に属するとする.

$$Z = \left\{ z = (z^1, z^2) \in \mathbf{R}^2 \left| z^1 + z^2 = \frac{1}{2} (y^1 + y^2) \right. \right\}$$

とおく、 $y^1+y^2<2$ だから, $(y^1+y^2)/2<1$ である.座標の和が 1 のマイナス 45 度線が Y_1,Y_2 の漸近線 なのだから,直線 Z は Y_1 および Y_2 と交わる.このとき,ある $\bar{y}_1\in Y_1\cap Z$ が存在して,任意の $y_1\in Z$ に対して, $y_1^1\leq \bar{y}_1^1$ ならば $y_1\in Y_1$,および,ある $\bar{y}_2\in Y_2\cap Z$ が存在して,任意の $y_2\in Z$ に対して, $y_2^2\leq \bar{y}_2^2$ ならば $y_2\in Y_2$ である.ここで

$$\delta = y^1 - (\bar{y}_1^1 + \bar{y}_2^1)$$

と書けば、 \bar{y}_1, \bar{y}_2 の定め方によって $y-(\bar{y}_1+\bar{y}_2)=(\delta,-\delta)$ が成立する.そこで、もし $\delta=0$ ならば、 $y=\bar{y}_1+\bar{y}_2$ だから、 $y\in Y_1+Y_2$ がわかる.

もし $\delta < 0$ ならば、 $y_1 = \bar{y}_1 + (\delta, -\delta) \in Y_1$ 、したがって $y_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + (\delta, -\delta) = y$ ゆえ $y \in Y_1 + Y_2$. もし $\delta > 0$ ならば、 $y_2 = \bar{y}_2 + (\delta, -\delta)$ とおけばよい. ///

- **6.10.8** 例 (4) 図 6.25 は,最初だけ収穫一定 (CRS) で途中から収穫逓減 (DRS) になるような企業の生産集合 Y_j を表しており,その同一の生産集合をもつ企業が無数にある場合を考えると,それらを集計したものは図 6.26 のように CRS である.
- (5) 図 6.27 は,最初から収穫逓減で,その $y_1 \to 0$ における限界生産性が図のように有限の傾きをもつ企業の生産集合 Y_j を表しており,その同一の企業が無数にある場合を考えると,それらを集計したものは図 6.28 のように,限界生産性の傾きの直線より下側の領域である(その直線上の点は 0 を除いて含まない).

このことも詳しく確認しておこう. 簡単のため、各 Y_i は以下の性質をもつとする:

- (1) $0 \in Y_i$ (無活動が可能, possibility of inaction)
- (2) $Y_i \mathbf{R}_+^L \subseteq Y_i$ (自由可処分, free disposal)
- (3) 凸
- (4) 任意の $y_i = (y_i^1, y_i^2) \in Y_i$ に対して $y_i^1 \leq 0$
- (5) 任意の $y_j \in Y_j$ に対して $|y_j^1| \ge y_j^2$ であり、かつ $y_j^1 < 0$ ならばこの不等号は厳密.

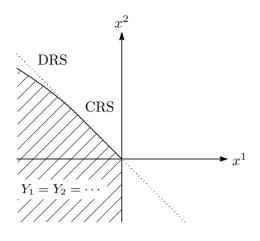


図 6.25 (4) $J = \infty$. 自由参入

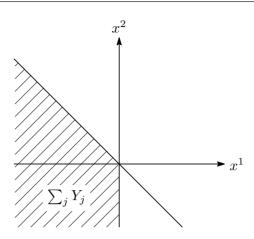


図 6.26 (4) 左図の Y_i を集計したもの.

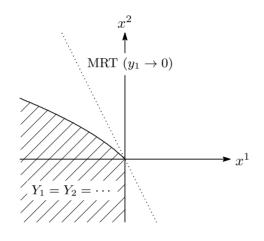


図 6.27 (5) $J = \infty$. 自由参入

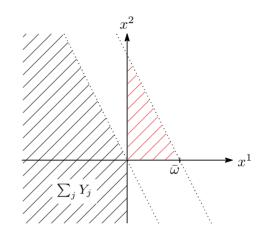


図 6.28 (5) 左図の Y_j を集計したもの.

(6) 任意の $\varepsilon>0$ に対して,ある $y_j\in Y_j$ が存在して, $(1-\varepsilon)|y_j^1|< y_j^2$. つまり $1-\varepsilon< y_j^2/|y_j^1|$ で,平均生産性をいくらでも 1 に近づけられるということ(ただし 1 にはできない,なぜならば (5) より, $|y_j^1|=y_j^2$ となるのは $y_j^1=0$ のときだけだから).

このとき.

$$\sum_{j=1}^{\infty} Y_j = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} y_j \middle| (y_1, y_2, \ldots) \in Y_1 \times Y_2 \times \cdots \right\}$$

は集合

$$A:=\{y=(y^1,y^2)\in \mathbf{R}^2\mid y^1\leq 0, |y^1|>y^2\}\cup\{(0,0)\}$$

に一致する. これは閉集合でない.

 $\left(\sum_{j=1}^\infty Y_j\subseteq A$ であること $\right)$ $(y_j)_j\in\prod_j Y_j$ とする.実際に操業している企業の集合を $K=\{j\mid y_j^1<0\}$ とおく.もし $K=\varnothing$ ならば,任意の j について $y_j^1=0$, $y_j^2\leq 0$ であって,和も $\sum_j y_j^1=0$, $\sum_j y_j^2\leq 0$ であるから, $\sum_j y_j\in A$ である.

 $\mathsf{t} \cup K \neq \emptyset$ $\mathsf{x} \circ \mathsf{i} \mathsf{i}$,

ゆえ, $\sum_j y_j \in A$.

 $\left(A\subseteq\sum_{j=1}^\infty Y_j$ であること $\right)$ $y=(y^1,y^2)\in A$ とする. $y^1=0$ のケースは簡単なので省略し, $y^1<0$ と仮定する. (6) より,ある $\bar{y}=(\bar{y}^1,\bar{y}^2)\in Y_j$ が存在して,

$$\frac{y^2}{|y^1|} < \frac{\bar{y}^2}{|\bar{y}^1|}$$

が成立する.

J を, $J \ge |y^1|/|\bar{y}^1|$ を満たす整数とする. すると $|y^1|/J|\bar{y}^1| \le 1$ であって, 凸性により

$$Y_j \ni \frac{|y^1|}{J|\bar{y}^1|} \bar{y} = \left(\frac{y^1}{J}, \frac{|y^1|}{J|\bar{y}^1|} \bar{y}^2\right)$$

だが,

$$\frac{|y^1|}{J|\bar{y}^1|}\bar{y}^2 > \frac{y^2}{J}$$

なので、自由可処分性により $(1/J)y = (y^1/J, y^2/J) \in Y_i$ である.

よって, $y_1=\cdots=y_J=(1/J)y,$ $y_j=0$ $(\forall j\geq J+1)$ とすれば, $\sum_j y_j=y$ が成立して証明が完了する.

6.10.9 命題 任意の i について X_i が凸, u_i が凹で, $\sum_i Y_j$ が凸ならば, V は凸である.

6.10.10 注意 命題の前提にある「 u_i が凹」という条件を「 u_i が準凹」に変えると一般には成り立たない。 すなわち,V は u_i の表現に依存するということである。 \succsim_i が凸であったとしても,凹な u_i で表現できない場合がある。 Kannai and Mantel(1978) を参照.

以下より純粋交換経済に話を限定する. 実行可能消費配分全体の集合を F とおくと, 効用可能性集合は,

$$\hat{V} = \{ (u_1(x_1), \dots, u_I(x_I)) \mid (x_i)_i \in F \}$$

と書ける.

以下で仮定する内容をここにまとめておく:

- 自由可処分経済: $\sum_{i} Y_{i} = -\mathbf{R}_{+}^{L}$.
- 消費サイドは、各 i について、 $X_i = \mathbf{R}_+^L$ 、 u_i は連続・単調・準凹。ただしここで単調というのは、 $x_i z_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ ならば $u_i(x_i) > u_i(z_i)$ 、つまりすべての財が増えれば厳密に改善するという意味である。

連続性と単調性から, $x_i - z_i \in \mathbf{R}_+^L$ ならば $u_i(x_i) \ge u_i(z_i)$ が従うから,任意の $x_i \in \mathbf{R}_+^L$ について $u_i(x_i) \ge u_i(0)$ である.そこで正規化として $u_i(0) = 0$ と仮定してよい.

142

 \bullet $\sum_i \omega_i = \bar{\omega} \in \mathbf{R}_{++}^L$ (もし 0 だったら、自由可処分経済では誰も消費できないので、そのような財を 除いた経済を考えてよい). すべてのiについて $\omega_i \in \mathbf{R}_+^L$.

このとき、 $(x_1,\ldots,x_I)\in \mathbf{R}_+^L \times \cdots \times \mathbf{R}_+^L$ が実行可能であることは、 $\sum_i x_i \leq \bar{\omega}$ と同値である.等号でな くてもよいのは、自由可処分によって捨ててしまうことができるからである。したがって当然、すべてのiについて $x_i \leq \bar{\omega}$ であって,実行可能配分の集合はコンパクト,それゆえ \hat{V} もコンパクトである.

6.10.11 補題

- 1. $\hat{V} \subseteq \prod_{i=1}^{I} [0, u_i(\bar{\omega})].$ 2. $(\hat{V} \mathbf{R}_+^I) \cap \mathbf{R}_+^I = \hat{V}.$
- $3. \ \hat{V} \cap \mathbf{R}_{++}^{I} \neq \emptyset$ (すべての消費者が正の効用を実現できる).

補題 ${f 6.10.11}$ の証明 2 は自由可処分の仮定 $\sum_i Y_i = -{m R}_+^L$ による.3 は,各消費者が均等に $(1/I)\bar{\omega}$ だけ 消費する消費配分を考えれば、 u_i の単調性から $u_i((1/I)\bar{\omega}) > 0$ である. ///

6.10.12 注意 2,3 からわかることとして,ある $(v_1,\ldots,v_I)\in \mathbf{R}_{++}^I$ が存在して $\prod_{i=1}^I [0,v_i]\subseteq \hat{V}$ である. すなわち、 \hat{V} の内部に長方形(直方体)領域をとることができる、I=2 のケースについて図示したものが 図 6.29 である.

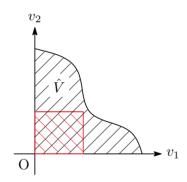


図 6.29 長方形を \hat{V} の内部にとれる

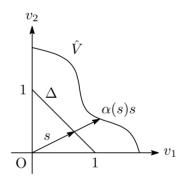


図 6.30 シェア s を伸ばせる上限が $\alpha(s)$ 倍

そこで,

$$\Delta^{I-1} = \left\{ s = (s_1, \dots, s_I) \in \mathbf{R}_+^I \middle| \sum_i s_i = 1 \right\}$$

と書こう. これは効用シェアの集合と解釈される. 次に、関数 $\alpha:\Delta^{I-1} \to \mathbf{R}_+$ を、

$$\alpha(s) = \sup\{a \in \mathbf{R}_+ \mid as \in \hat{V}\}\$$

と定義する. その図形的な意味は図 6.30 が表している.

6.10.13 補題

- 1. 任意の $s \in \Delta^{I-1}$ に対して $0 < \alpha(s) \le I \max\{u_1(\bar{\omega}), \dots, u_I(\bar{\omega})\}$.
- 2. 任意の $s \in \Delta^{I-1}$ に対して $\alpha(s)s \in \hat{V}$. さらにもし $(x_i)_i \in F$ かつ $\alpha(s)s = (u_i(x_i))_i$ ならば $(x_i)_i$ は 弱パレート効率的である.
- 3. α は連続.

6.10.14 注意 補題 6.10.13 の 1 は,具体的な上限の値よりも, $\alpha(s)$ の値域が有界であるということが重要である.

補題 **6.10.13** の証明(1 の証明)補題 6.10.11(3)より $0 < \alpha(s)$ が成り立つ.次に,任意の $s \in \Delta^{I-1}$, $(x_i)_i \in F$ について, $as \in \hat{V}$ を満たす a について考えると,補題 6.10.11(1)より $as \in \prod_{i=1}^{I} [0, u_i(\bar{\omega})]$ である.この a について上限をとると,ある i と j が存在して, $as_i = u_i(\bar{\omega}), as_j \leq u_j(\bar{\omega})$ である.もし, $s_i \in (0,1/I)$ であれば, $\sum_i s_i = 1$ より $s_j \in (1/I,1]$ が存在して, $a = \frac{u_i(\bar{\omega})}{s_i} \leq \frac{u_j(\bar{\omega})}{s_j} < Iu_j(\bar{\omega})$ であり,もし $s_i \in [1/I,1]$ であれば, $a = \frac{u_i(\bar{\omega})}{s_i} \leq Iu_i(\bar{\omega})$ である.

 $(2 \, の証明) \, A(s) = \{a \in {\it R}_+ \mid as \in \hat{V}\}$ と書くと、これは有界閉区間である.有界であることはこの補題の 1 から、区間であることは補題 6.10.11 の 2 から、閉であることは F がしたがって \hat{V} がコンパクトであることから従う.それゆえ各 $s \in \Delta^{I-1}$ に対して $\alpha(s)s \in \hat{V}$.

弱パレート効率的であることは背理法による。もし弱パレート効率的でないならば全員が改善できるので、その改善後の点から見て左下の長方形領域がすべて \hat{V} に入る(注意 6.10.12 のとおり)。これは $\alpha(s)$ が上限であったことに矛盾。 ///

 $(3 \ の証明) \ s^n \to s$ なる Δ^{I-1} 上の点列 (s^n) をとる. 示したいことは $\alpha(s^n) \to \alpha(s)$ だが,これは (1) $\limsup_n \alpha(s^n) \le \alpha(s)$ かつ (2) $\liminf_n \alpha(s^n) \ge \alpha(s)$ を示せば十分である.

(1) (s^n) の部分列 (s^{k_n}) であって, $\alpha(s^{k_n}) \to \limsup_n \alpha(s^n)$ なるものが存在する.このとき,

$$\alpha(s^{k_n})s^{k_n} \to \left(\limsup_n \alpha(s^n)\right)s$$

である. \hat{V} はコンパクトなので、 $(\limsup_n \alpha(s^n))$ $s \in \hat{V}$. したがって α の定義により、

$$\alpha(s) \ge \limsup_{n} \alpha(s^n).$$

(2) これには、任意の $\beta \in (0,\alpha(s))$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の n > N について $\alpha(s^n) > \beta$ が成立することを示せば十分である。 $(x_i)_i \in F, \alpha(s)_s = (u_i(x_i))_i$ とする。s で厳密に正の効用シェアを受け取る消費者の集合を $H = \{i \mid s_i > 0\}$ と書く。

 $i \notin H$ については、十分大きな任意の n について、ある $\delta_i^n \in [0,1]$ が存在して、

$$u_i(\delta_i^n \bar{\omega}) = \beta s_i^n$$

が成立するが, $s_i^n \to 0$ なので $\delta_i^n \to 0$ である.そこで $\sum_{i \notin H} \delta_i^n = \delta^n$ と書けば, $\delta^n \to 0$ である.そこで,十分大きな n に対し, $(z_i^n)_i$ を以下のように定める:

$$z_i^n = \begin{cases} (1 - \delta^n) x_i & (i \in H) \\ \delta_i^n \bar{\omega} & (i \notin H) \end{cases}$$

このとき,

$$\sum_{i} z_{i}^{n} = (1 - \delta^{n}) \sum_{i \in H} x_{i} + \sum_{i \notin H} \delta_{i}^{n} \bar{\omega} \leq (1 - \delta^{n}) \bar{\omega} + \delta^{n} \bar{\omega} = \bar{\omega}$$

であるから, $(z_i^n)_i \in F$ である. さらに, $i \in H$ について,

$$u_i(z_i^n) \to u_i(x_i) = \alpha(s)s_i > \beta s_i$$

であるが、この最右辺 βs_i は $(\beta s_i^n)_n$ の極限なので、十分大きな n に対し $u_i(z_i^n) > \beta s_i^n$ である。 $i \notin H$ については $u_i(z_i^n) = \beta s_i^n$ であった。よって $(u_i(z_i^n))_i \geq \beta s^n$ であり、なおかつ $(u_i(z_i^n))_i \in \hat{V}$ である。 $\hat{V} = (\hat{V} - \mathbf{R}_+^I) \cap \mathbf{R}_+^I$ なので、 $\beta s^n \in \hat{V}$ であるから、 $\alpha(s^n) \geq \beta$ 、したがって $\liminf_n \alpha(s^n) \geq \beta$. ///

対応 $E:\Delta^{I-1} \to F \times \Delta^{L-1}$ を以下の通り定義する: $((x_i)_i,p) \in E(s)$ であるのは, $((x_i)_i,p)$ が価格準均衡であり, $(u_i(x_i))_i = \alpha(s)s$ を満たすときまたそのときに限る. α の性質により,この $(x_i)_i$ は弱パレート効率的配分である.

無差別曲線に折れ曲がりがあるような場合, $(x_i)_i$ を 1 つ固定したとき,それをサポートする価格ベクトル p が複数ある.また,無差別曲線に平らな部分があるような場合,p を 1 つ固定したときそれに対応する配分 $(x_i)_i$ が複数ある.こういう可能性のため,E は写像ではない.

また、 $X:\Delta^{I-1} \to F$ および $P:\Delta^{I-1} \to \Delta^{L-1}$ は、 $E \circ F$ および Δ^{L-1} への射影とする.

6.10.15 補題

- 1. E, X, P はいずれも非空凸値で、閉グラフをもつ.
- 2. 任意の $s \in \Delta^{I-1}$ に対して、X(s) は、 $(u_i(x_i))_i = \alpha(s)s$ を満たす $(x_i)_i \in F$ の集合に一致する.
- 3. 任意の $s \in \Delta^{I-1}$, $(x_i^*)_i \in X(s)$, $(x_i^{**})_i \in X(s)$, $p \in P(s)$, $i \in \{1, \ldots, I\}$ に対して, $p \cdot x_i^* = p \cdot x_i^{**}$ が成立する. よって, $E(s) = X(s) \times P(s)$.

補題 6.10.15 の証明 2, 3, 1 の順に示す.

 $(2 \, の証明) \quad (x_i)_i \in X(s)$ ならば $(u_i(x_i))_i = \alpha(s)s$ となることは E の定義から直ちに従う.逆に,もし $(u_i(x_i))_i = \alpha(s)s$ ならば, $(x_i)_i$ は弱パレート効率的なので(補題 6.10.13 の 2),厚生経済学の第 2 定理(定理 6.3.23)により $p \neq 0$ が存在して $((x_i)_i, p)$ は価格準均衡.よって E(s) の定義から $((x_i)_i, p) \in E(s)$ で, $(x_i)_i \in X(s)$ である.

(1の前半の証明) $\alpha(s)s \in \hat{V}$ なので、 $(u_i(x_i))_i = \alpha(s)s$ を満たす $(x_i)_i \in F$ は少なくとも 1 つ存在する. したがって $E(s) \neq \emptyset$ であり、その射影として $X(s) \neq \emptyset$ 、 $P(s) \neq \emptyset$.

(3 の証明) $s,(x_i^*)_i,(x_i^{**})_i,p$ を与えられたとおりとする.一般性を失うことなく, $((x_i^*)_i,p)\in E(s)$ と仮定する* 26 .

このとき局所的非飽和により,すべての i について $p \cdot x_i^* \leq p \cdot x_i^{**}$ が成立することを示そう.もしある i について $p \cdot x_i^* > p \cdot x_i^{**}$ ならば,局所的非飽和により,ある x_i があって $x_i \succ_i x_i^{**}$, $p \cdot x_i^* > p \cdot x_i$ である.同じ s に対応する配分ゆえ $x_i^* \sim_i x_i^{**}$ なので, $x_i \succ_i x_i^*$ だが,これは $((x_i^*)_i, p) \in E(s)$ と仮定したこと,すなわち $((x_i^*)_i, p)$ が価格準均衡であるということに矛盾する.

iについて和をとることで、

$$p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right) \leq p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}^{**}\right)$$

である *27 . 一方, 利潤最大化条件を自由可処分の生産集合 $-\mathbf{R}_{\perp}^{L}$ に適用すれば,

$$p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right) \geq p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}^{**}\right)$$

が得られる. したがって,

$$p \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) = p \cdot \left(\sum_i x_i^{**}\right)$$

 $^{*^{26}}$ $p \in P(s)$ から、少なくとも 1 つ、これに対応する $(x_i)_i$ が存在する。そこで、 $p \cdot x_i = p \cdot x_i^{**}$ 、 $p \cdot x_i = p \cdot x_i^{**}$ を示すことができることをこれから見るが、わざわざ第 3 の $(x_i)_i$ をもってこなくても、このように仮定してよい。

 $x^{*27}\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \bar{\omega}, \sum_i x_i^{**} = \sum_j y_j^{**} + \bar{\omega}$ であるから,このとき $p\cdot\left(\sum_j y_j^*\right) \geq p\cdot\left(\sum_j y_j^{**}\right)$ が成り立っている.

であって,すでに見たように各 i について $p\cdot x_i^* \leq p\cdot x_i^{**}$ なのだから,結局これはすべての i について $p\cdot x_i^*=p\cdot x_i^{**}$ であることを意味する.

 $E(s) = X(s) \times P(s)$ を示すには、任意の $(x_i^*)_i \in X(s)$ と $p \in P(s)$ に対し、 $((x_i^*)_i, p) \in E(s)$ であることを言えばよい.この p に対応する実行可能配分のひとつを $(x_i)_i \in F$ とする.1 からそれは存在し、2 から $(u_i(x_i))_i = (u_i(x_i^*))_i = \alpha(s)s$ である.またいま示したように $p \cdot x_i = p \cdot x_i^*$ がすべての i について成り立つ.したがって $(x_i^*)_i$ もまた p との組で価格準均衡をなす.

(1 の後半の証明) X が凸値であることは選好の凸性より明らか。 P が凸値であることを示そう。 $p \in P(s)$ 、 $q \in P(s)$ 、 $t \in [0,1]$ をとる。 $(x_i^*)_i \in X(s)$ とする。 3 により、 $((x_i^*)_i,p) \in E(s)$ 、 $((x_i^*)_i,q) \in E(s)$ である。 ここで、任意の i と $x_i \in X_i$ に対し、

$$(tp + (1-t)q) \cdot x_i < (tp + (1-t)q) \cdot x_i^*$$

と仮定しよう、このとき、

$$t(p \cdot x_i - p \cdot x_i^*) + (1 - t)(q \cdot x_i - q \cdot x_i^*) < 0$$

だから、 $p \cdot x_i - p \cdot x_i^* < 0$ または $q \cdot x_i - q \cdot x_i^* < 0$ である.いずれの場合でも $x_i^* \succsim_i x_i$ である.よって

$$((x_i^*)_i, tp + (1-t)q) \in E(s).$$

したがって $tp + (1-t)q \in P(s)$ なので、P(s) は凸である.

あとはグラフが閉であることを示せば十分である. E のグラフ内の点列 $\left((s^n,(x_i^n)_i,p^n)\right)_n$ で,

$$(s^n, (x_i^n)_i, p^n) \to (s, (x_i^*)_i, p) \ (\in \Delta^{I-1} \times F \times \Delta^{L-1})$$

としよう. 収束先の $((x_i^*)_i, p)$ が準均衡であることと,s がそれに対応する効用シェアであることを示せば十分である.

任意にiをとり、 $p \cdot x_i なる<math>x_i \in X_i$ をとる. このとき、

$$\begin{cases} p^n \cdot x_i \to p \cdot x_i \\ p^n \cdot x_i^n \to p \cdot x_i^* \end{cases}$$

なので、十分大きなn に対して、 $p^n \cdot x_i < p^n \cdot x_i^n$ が成立する。 $((x_i^n)_i, p^n)$ は準均衡だったから、これより $x_i^n \succsim_i x_i$ が成立し、 \succsim_i の連続性より、 $x_i^* \succsim_i x_i$ が従う。したがって $((x_i^*)_i, p)$ は価格準均衡である。

 α の連続性から $\alpha(s^n)s_i^n \to \alpha(s)s_i, \ u_i$ の連続性から $u_i(x_i^n) \to u_i(x_i^*)$ であって,定義から $\alpha(s^n)s_i^n = u_i(x_i^n)$ だから, $\alpha(s)s_i = u_i(x_i^*)$,したがって $((x_i^*)_i, p) \in E(s)$ である.以上で E のグラフが閉であることが示された.

E が閉グラフをもつことから,P も閉グラフをもつことを示そう(X についてはこれと同様に証明できるので省略する)。 $\Delta^{I-1} \times \Delta^{L-1}$ 上の点列 $\left((s^n,p^n)\right)_n$,ただし $p^n \in P(s^n)$ で, $(s^n,p^n) \to (s,p)$ とする。 $p \in P(s)$ が成立していることを示したい.

このとき、任意の n について、 $(x_i^n)_i \in F$ が存在して、 $((x_i^n)_i, p^n) \in E(s^n)$ とできる。 $((x_i^n)_i)_{n=1,2,\dots}$ は 実行可能配分 F の点列で、F はコンパクトなので、収束部分点列が存在する。それを $((x_i^{k_n})_i)_n$ とすると、 $(x_i^{k_n})_i \to (x_i^*)_i \in F$ である。

よって $\left(s^{k_n},(x_i^{k_n})_i,p^{k_n}\right) \rightarrow (s,(x_i^*)_i,p)$ であって,各 $\left(s^{k_n},(x_i^{k_n})_i,p^{k_n}\right)$ は E のグラフに属しており E のグラフは閉とわかっているので, $(s,(x_i^*)_i,p)$ も E のグラフに属する.つまり, $((x_i^*)_i,p)\in E(s)$ である.したがって, $p\in P(s)$.これですべての証明が完了した. ///

6.11 根岸の方法とワルラス均衡の存在

私的所有経済 (ω_i) を考えよう. 任意の $p \in \Delta^{L-1}$ と、任意の i の $(x_i)_i \in F$ に対し、純供給(ネットサプライ)の価値額 $p \cdot (\omega_i - x_i)$ を考える. これは価格準均衡では 0 とは限らない.

まず、 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}^1, \dots, \bar{\omega}^L)$ について $\|\bar{\omega}\|_{\infty} = \max\{\bar{\omega}^1, \dots, \bar{\omega}^L\}$ とすると、

$$|p \cdot (\omega_i - x_i)| = \left| \sum_{l=1}^L p^l (\omega_i^l - x_i^l) \right| \le \sum_{l=1}^L p^l |\omega_i^l - x_i^l|$$

$$\le \sum_{l=1}^L p^l \bar{\omega}^l \le ||\bar{\omega}||_{\infty} \sum_{l=1}^L p^l = ||\bar{\omega}||_{\infty}$$

が成立する.ただし 1 行目から 2 行目への変形は $\omega_i^l \in [0,\bar{\omega}^l], \ x_i^l \in [0,\bar{\omega}^l]$ によっており,その後者は $\sum_i x_i = \bar{\omega}$ から従っている.そこで対応 $\Psi: \Delta^{I-1} \to [-\|\bar{\omega}\|_\infty, \|\bar{\omega}\|_\infty]^I$ を次のように定める:

$$\Psi(s) = \{ (p \cdot (\omega_i - x_i))_i \mid ((x_i)_i, p) \in E(s) \}.$$

すなわち、効用シェアsを達成する価格準均衡に対するネットサプライの価値額をI人分並べたベクトルの集合である。この対応の値域が凸コンパクトであることに注意せよ。

6.11.1 補題

- 1. 任意の $s \in \Delta^{I-1}$, $t \in \Psi(s)$ に対して, $\sum t_i = 0$ である.
- 2. 任意の $s \in \Delta^{I-1}$ に対して、 $0 \in \Psi(s)$ と、E(s) がワルラス準均衡を含むこととは同値である.
- 3. 任意の $s \in \Delta^{I-1}$, $t \in \Psi(s)$, $i \in \{1, ..., I\}$ に対して, $s_i = 0$ ならば $t_i > 0$.
- $4. \Psi$ は凸値かつ閉グラフをもつ.

補題 6.11.1 の証明 1 と 2 は定義によって明らか. 局所的非飽和性により, $p \cdot x_i = 0$.よって $p \cdot (\omega_i - x_i) \geq 0$ なので 3 が成立する.

4 は、閉グラフであることについては前の補題 6.10.15 と同様に示せる.凸値であることは以下のように示される.

 $s \in \Delta^{I-1}$, $t \in \Psi(s)$, $t' \in \Psi(s)$, $\theta \in [0,1]$ とする. $\theta t + (1-\theta)t' \in \Psi(s)$ を示したい. t および t' は E(s) に対するネットサプライの価値額のベクトルだから,

ある
$$((x_i)_i, p) \in E(s)$$
 が存在して, $t = (p \cdot (\omega_i - x_i))_i$,
ある $((x_i')_i, p') \in E(s)$ が存在して, $t' = (p' \cdot (\omega_i - x_i'))_i$

である。補題 6.10.15 により $E(s)=X(s)\times P(s)$ なので, $((x_i)_i,p')\in E(s)$ であり,さらに各 i について $p'\cdot x_i'=p'\cdot x_i$ が成立する。よって,

$$t' = (p' \cdot (\omega_i - x_i'))_i = (p' \cdot (\omega_i - x_i))_i$$

であって,

$$\theta t + (1 - \theta)t' = ((\theta p + (1 - \theta)p') \cdot (\omega_i - x_i))_i$$

である. ここで P(s) は凸なので $\theta p + (1-\theta)p' \in P(s)$ であり, $(x_i)_i \in X(s)$ だから,

$$((x_i)_i, \theta p + (1 - \theta)p') \in X(s) \times P(s) = E(s)$$

///

が成立する. よって $\theta t + (1-\theta)t' \in \Psi(s)$.

一般に $\Psi(s)$ は Δ^{I-1} に含まれないので、 Ψ に不動点定理は適用できない。 $0\in \Psi(s)$ なる $s\in \Delta^{I-1}$ の存在は次の定理から導出される:

6.11.2 定理 (不等式定理) S および T を、非空・凸・コンパクトな \mathbf{R}^I の部分集合とし、対応 $\Psi:S \to T$ を非空・凸値で閉グラフをもつものとする。このとき、ある $s^* \in S$ と $t^* \in \Psi(s^*)$ が存在して、任意の $s \in S$ に対して $s^* \cdot t^* > s \cdot t^*$ が成立する.

この証明は角谷の不動点定理と近似定理とによるので、それらを説明したあとにこの定理を証明しよう。 ここではまず、この不等式定理を使えばどのように $0 \in \Psi(s)$ なる s の存在が導出されるのかを見ておく.

6.11.3 定理 (均衡の存在定理) $0 \in \Psi(s)$ をみたす $s \in \Delta^{I-1}$ が存在する.

定理 6.11.3 の証明 先に定義した対応 $\Psi:\Delta^{I-1} \to [-\|\bar{\omega}\|_{\infty}, \|\bar{\omega}\|_{\infty}]^I$ は,不等式定理を使える条件を満たしていることを補題 6.11.1 で示したので,不等式定理により,ある $s^* \in \Delta^{I-1}$ と $t^* \in \Psi(s^*)$ が存在して,任意の $s \in \Delta^{I-1}$ に対して, $s^* \cdot t^* > s \cdot t^*$ が成立する. $t^* = 0$ を示せば十分である.

任意の i について, $s_i^*>0$ であるとする.このとき, $t_i^*=\max\{t_1^*,\ldots,t_I^*\}\geq 0$ である.次にある i が存在して $s_i^*=0$ であるとする.このとき,補題 6.11.1 の 3 によって, $t_i^*\geq 0$ である.したがって,任意の s_i^* に対して, $t_i^*\geq 0$ である. t_i^* は $\sum_i t_i^*=0$ であるので, $t_i^*=0$ である.

6.11.4 定理 (近似定理) S と T を、非空・凸・コンパクトな集合とし(次元は異なってもよい)、対応 $\Psi:S \to T$ を非空・凸値で閉グラフをもつものとする.このとき、任意の $\varepsilon>0$ に対してある連続写像 $\psi:S \to T$ が存在して、 ψ のグラフは Ψ のグラフの ε -近傍に含まれる、すなわち任意の $s \in S$ に対して、ある $s^* \in S$ と $t^* \in \Psi(s^*)$ が存在して、 $\|s-s^*\| + \|\psi(s)-t^*\| < \varepsilon$.

6.11.5 注意

- 1. 写像 ψ が連続なので、この定理は有用でその証明が難しい。
- 2. Ψ が閉グラフをもつことと、凸値であることはいずれも不可欠な仮定である.
- 3. ψ のグラフが Ψ のグラフの ε -近傍に含まれたとしても,任意の s に対して $\psi(s)$ が $\Psi(s)$ の ε -近傍に含まれるとは限らない.

定理 **6.11.4** の証明 まず任意の $\delta > 0$ に対し対応 $\Psi^{\delta}: S \to T$ を次のように定義しよう:

$$\Psi^\delta(s) := \left[igcup_{\{r \in S | \|r-s\| < \delta\}} \Psi(r)
ight]$$
 の凸包.

(ステップ $\mathbf{1})$ このとき,任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して, Ψ^δ は Ψ のグラフの ε -近傍に含まれることを背理法で示そう.

もしある $\epsilon > 0$ に対して、このような δ が存在しないなら、任意の $n \in \{1, 2, ...\}$ に対して、 $t^n \in \Psi^{1/n}(s^n)$ であるようなある $(s^n, t^n) \in S \times T$ が存在して、 (s^n, t^n) は Ψ のグラフから少なくとも ϵ 離れている.

 $\Psi^{1/n}(s^n)$ の定義と Carathéodory の定理により、任意の n について、 $t^n \in \Psi^{1/n}(s^n)$ は高々 1+I 個のベクトルで表される。ただし I は T を含むユークリッド空間の次元である。つまり、任意の $i \in \{0,1,\ldots,I\}$ に対しある $(r_i^n,w_i^n) \in S \times T$ とある $(\beta_i^n) \in \Delta^I$ が存在して、

$$||r_i^n - s^n|| < \frac{1}{n}, \quad w_i^n \in \Psi(r_i^n), \quad t^n = \sum_{i=0}^I \beta_i^n w_i^n$$

と書ける. (β_i^n) は凸結合のウェイトである. 任意の n に対し,

$$((s^n, t^n), (r_i^n, w_i^n)_{i=0,1,\ldots,I}, (\beta_i^n)_{i=0,1,\ldots,I})$$

はコンパクト集合 $(S \times T) \times (S \times T)^{1+I} \times \Delta^I$ に属するので、これらの点よりなる点列には収束部分点列が存在する。そこで、一般性を失うことなく、元の点列そのものが収束するとし、その極限を

$$((s,t),(r_i,w_i)_{i=0,1,...,I},(\beta_i)_{i=0,1,...,I})$$

と書く.

任意の n と i について, $\|r_i^n-s^n\|<1/n$ なので, $n\to\infty$ では $\|r_i-s\|\le 0$,すなわち $r_i=s$ である。 $w_i^n\in\Psi(r_i^n)$ だが Ψ は閉グラフをもつので極限においても $w_i\in\Psi(s)$. $(\beta_i)_i$ はコンパクト集合上の点列 (β_i^n) の極限なので $(\beta_i)_i\in\Delta^{I-1}$.さらに $\Psi(s)$ は凸なので, $\sum_{i=0}^I\beta_iw_i\in\Psi(s)$ であって, $t^n=\sum_{i=0}^I\beta_i^nw_i^n$ により $t=\sum_{i=0}^I\beta_iw_i$ が成立するので,結局 $t\in\Psi(s)$ である.

しかし (s^n,t^n) は Ψ のグラフから少なくとも ε 離れているから,(s,t) も Ψ のグラフから少なくとも ε 離れているはずである.これは矛盾である.

(ステップ $\mathbf{2})$ Ψ^{δ} のグラフは Ψ のグラフの ε -近傍に含まれるので, Ψ^{δ} が連続な選択子,すなわち連続写像 $\psi^{\delta}:S\to T$ であって各 $s\in S$ について $\psi^{\delta}(s)\in\Psi^{\delta}(s)$ なるものをもつことを示せばよい.

S はコンパクトなので、ある S の有限部分集合 $\{s_1,\ldots,s_K\}$ が存在して、任意の $s\in S$ に対してある $k=1,\ldots,K$ で $\|s-s_k\|<\delta$ とできる.すなわち、 s_k の δ -近傍の組は S の有限開被覆である.

よって、この開被覆に従属した 1 の分割が存在する.すなわち、それぞれの開集合 s_k について、ある連続写像 $\beta_k:S\to [0,1]$ が存在して、任意の $s\in S$ に対して

$$\sum_{k=1}^{K} \beta_k(s) = 1, \quad [\beta_k(s) > 0 \text{ if } ||s - s_k|| < \delta]$$

が成立する.

任意の k に対し、 $t_k \in \Psi(s_k)$ とする. そこで $\psi^{\delta}: S \to T$ を次のように定義する:

$$\psi^{\delta}(s) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k(s) t_k.$$

このとき各 β_k は連続ゆえ ψ^{δ} は連続写像である.

さらに,

$$\psi^{\delta}(s) = \sum_{\{k \mid \beta_k(s) > 0\}} \beta_k(s) t_k = \sum_{\{k \mid ||s - s_k|| < \delta\}} \beta_k(s) t_k$$

であるが、 Ψ^{δ} の定義により、 $\|s-s_k\|<\delta$ ならば $\Psi(s_k)\subseteq\Psi^{\delta}(s)$ なので、 $t_k\in\Psi(s_k)\subseteq\Psi^{\delta}(s)$. また $\Psi^{\delta}(s)$ は凸なので、 $\psi^{\delta}(s)\in\Psi^{\delta}(s)$ である. ///

P は非空凸コンパクトな \mathbf{R}^I の部分集合とする. 次の 2 つの不動点定理はここで証明はしない.

6.11.6 定理 (ブラウワーの定理) $f: P \to P$ は連続写像とする.このとき $f(p^*) = p^*$ となる $p^* \in P$ が存在する.

6.11.7 定理 (角谷の定理(定理 **6.8.3** の再掲)) $F:P \to P$ は非空・凸値・閉グラフをもつ対応とする. このとき $p^* \in F(p^*)$ となる $p^* \in P$ が存在する.

6.11.8 注意

- 1. 角谷の定理からブラウワーの定理が従うことは明らか.
- 2. ブラウワーの定理と近似定理から、角谷の定理が従う.

- 3. 角谷の定理と近似定理から、不等式定理が導出され得る. なお、前項2も考えあわせると、この前件はブラウワーの定理と近似定理でよい.
- 4. 不等式定理から角谷の定理が出る.
- 5. 不等式定理から、0 を含まないコンパクト凸集合 S と $\{0\}$ とに対する分離超平面定理. つまり、ある $q \in \mathbf{R}^I$ が存在して、任意の $p \in P$ に対して $p \cdot q > 0$ が得られる.

注意 6.11.8 の証明 2 の証明 P 非空・凸・コンパクトな集合とし、対応 $F:P \to P$ を非空・凸値・閉 グラフを持つとする。このとき近似定理より、対応 $F:P \to P$ 、任意の n に対して連続写像 $f^n:P \to P$ が存在して f^n のグラフは F のグラフの 1/n 近傍に含まれる。ブラウワーの定理より任意の n に対して $f^n(p_n^*)=p_n^*$ を満たす不動点 s_n^* が存在する。P はコンパクトなので、集積点が存在するが、任意の集積点 p^* は $f(p^*)=p^*$ を満たす。再度近似定理より、この $f(p^*)=p^*$ に対して $p^*\in F(p^*)$ が成立する。

3 の証明 仮に、対応 F について不等式定理の前提条件が、対応 $g(p,q)=\{r\in P|$ 任意の $s\in P$ に対し、 $r\cdot q\geq s\cdot q\}\times F(p)$ について角谷の不動点定理の前提条件の十分条件であるとしよう。すると、対応 F について不等式定理の前提条件が満たされれば、ある $(p^*,q^*)\in P\times Q$ が存在して、 $(p^*,q^*)\in g(p^*,q^*)$ が成立する。g の定義より、任意の $s\in P$ に対し、 $p^*\cdot q^*\geq s\cdot q^*$ であり、さらに $q^*\in F(p^*)$ だったから、不等式定理が成立していることがわかる。したがって、以下では、対応 F について不等式定理の前提条件が満たされていれば、対応 G について角谷の不動点定理の前提条件を満たすことを示す。

今, $P,Q\subseteq\mathbb{R}^L$ と $F:P\twoheadrightarrow Q$ は, 不等式定理の前提条件を満たすとしよう. このとき, (i) $P\times Q$ が非空, コンパクト, 凸であり, (ii) g のグラフは $P\times Q\times P\times Q$ の閉部分集合であり, (iii) 任意の $p\in P$ に対して F(p) が非空かつ凸であることを示せばよい.

まず, P と Q がそれぞれ非空, コンパクト, 凸であることから, その直積である $P \times Q$ も非空, コンパクト, 凸であり, (i) は満たされている.

さらに、g のグラフを G_g とすると、 $G_g = \{(p,q,y,z): (p,q) \in P \times Q$ かつ $(y,z) \in g(p,q)\}$. g の定義域と終域は、いずれも $P \times Q$ だったので、 $G_q \subseteq P \times Q \times P \times Q$. さらに、任意の n について $(y_n,z_n,p_n,q_n) \in G_g$ となるような任意の収束点列 $\{(p_n,q_n,y_n,z_n)\}_{n=1}^\infty$ を考える。まず、 $P \times Q$ はコンパクトであり、したがって閉集合であるので、 $\lim_{n\to\infty}(p_n,q_n) \in P \times Q$. さらに、n を任意の自然数とすると $(y_n,z_n) \in g(p_n,q_n)$ であるから、任意の $s \in P$ について $y_n \cdot q_n \geq s \cdot q_n$ が成立するので、 $(\lim_{n\to\infty}z_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}q_n)\geq s\cdot(\lim_{n\to\infty}q_n)$ が成立する。さらに、 $z_n\in F(p_n)$ が任意の n について成立する。F のグラフを G_F と書くと、これは任意の n について $(p_n,z_n)\in G_F$ であることと同値である。 G_F は閉集合であったので、 $\lim_{n\to\infty}(p_n,z_n)\in G_F$. すなわち、 $\lim_{n\to\infty}z_n\in F(\lim_{n\to\infty}p_n)$. これと、先に示した $(\lim_{n\to\infty}z_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}q_n)\geq s\cdot(\lim_{n\to\infty}q_n)$ より $\lim_{n\to\infty}(z_n,y_n)\in g(\lim_{n\to\infty}p_n,\lim_{n\to\infty}y_n)$. すなわち、 $\lim_{n\to\infty}(p_n,q_n,z_n,y_n)\in G_g$ が成立し、 G_g は閉集合であることがわかる。したがって、任意の g のグラフは $P \times Q \times P \times Q$ の閉部分集合であることが示された。よって、(ii) も満たされている。

 $\{r\in P:$ 任意の $s\in P$ に対し, $r\cdot q\geq s\cdot q\}=\arg\max_{s\in P}\ s\cdot q$ である。P はコンパクトなので、連続なs の関数 $s\cdot q$ は P 上で最大値を持つので、 $\arg\max_{s\in P}\ s\cdot q$ は任意の $q\in Q$ について非空である。また、F(p) は任意の $p\in P$ について非空であったので、任意の $(p,q)\in P\times Q$ について g(p,q) は非空である。さらに、今 $(p',q'),(p'',q'')\in g(p,q)$ であるとする。すると、任意の $s\in P$ について $p'\cdot q\geq s\cdot q$ かつ $p''\cdot q\geq s\cdot q$ が成り立ち、また、 $q',q''\in F(p)$ である。任意の $t\in [0,1]$ について p(t)=tp'+(1-t)p''、q(t)=tq'+(1-t)q'' と表記する。すると、任意の $s\in P$ について $p(t)\cdot q\geq s\cdot q$ が成立し、さらに、 $q(t)\in F(p)$ である。ただし、後者は任意の $p\in P$ について F(p) が凸であることから従う。よって、任意の $t\in [0,1]$ について $(p(t),q(t))\in g(p,q)$ 。任意の $(p,q)\in P\times Q$ について g(p,q) が凸であることが示された。よって、任意の $(p,q)\in P\times Q$ について g(p,q) が凸であることが示された。よって、任意の $(p,q)\in P\times Q$ について $(p(t),q(t))\in g(p,q)$ は非空かつ凸であり、(iii) も満たされている。

よって, (i), (ii), (iii) の全ての条件が満たされていることが示された.

よって、不等式定理より、ある $p^* \in P$ とある $r^* \in g(p^*)$ が存在し、任意の $p \in P$ について $p^* \cdot r^* \geq p \cdot r^*$ がわかる. $g(p^*) = F(p^*) - \{p^*\}$ であったから、ある $q^* \in F(p^*)$ が存在して、 $r^* = q^* - p^*$. これより、任意の $p \in P$ について $p^* \cdot (q^* - p^*) \geq p \cdot (q^* - p^*)$ が成立することがわかる. $F(p^*) \subseteq P$ より、 $q^* \in P$. よって、 $p^*(q^* - p^*) \geq q^* \cdot (q^* - p^*)$ が成立する。整理すると、 $0 \geq p^*(p^* - q^*) - q^*(p^* - q^*) = (p^* - q^*) \cdot (p^* - q^*)$. よって、 $p^* = q^*$. したがって、ある $p^* \in P$ が存在して、 $p^* \in F(p^*)$ であることが示され、不動点定理が証明された.

5 の証明今, $P \subseteq \mathbb{R}^L$ が分離超平面定理の前提条件を満たすとする。すなわち,P は非空,コンパクト,凸で 0 を含まないとする。Q = -P とし,さらに対応 $F: P \to -P$ を $F(p) = \{-p\}$ と定めると,これらの $P,Q \subseteq \mathbb{R}^L$ と対応 F について,不等式定理の前提条件が満たされることが以下のようにわかる。まず,-P が非空,コンパクト,凸であることは,P が非空,コンパクト,凸で 0 を含まないことから言える。さらに F のグラフを G_F とすると, $G_F = \{(p,-p): p \in P\} \subseteq P \times -P$ である.したがって,任意の n について $p^n \in P$ であるような任意の収束点列 $\{p^n\}_{n=1}^\infty$ について, $\lim_{n\to\infty} p^n \in P$ であれば, G_F が閉集合であることが言える。P のコンパクト性より,これが成立するので,F のグラフが $P \times -P$ の閉部分集合であることが示された.任意の $p \in P$ について $F(p) = \{-p\}$ は一点集合なので,非空性と凸性が言える.よって,不等式定理の前提条件が満たされていることが分かった.

不等式定理を用いると、ある $p^* \in P$ と $q^* \in F(p^*) = \{-p^*\}$ が存在して、任意の $p \in P$ に対し、 $p^* \cdot q^* \geq p \cdot q^*$ が成立する。 $q^* = -p^*$ なので、これを代入し整理するとと、 $p \cdot p^* \geq p^* \cdot p^*$. よって、 $q = p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^L$ と $c = p^* \cdot p^*$ とすると、任意の $p \in P$ に対して $p \cdot q \geq c$ である。 $0 \notin P$ より $p^* \neq 0$ なので、c > 0 となり、分離超平面定理が証明された. ///

6.12 生産経済における根岸の方法

最後に、これまで行ってきた均衡の存在証明の手順をここで振り返っておこう.

- 1. 実行可能配分(純粋交換経済では消費だけ)を定義した: $F = \{(x_i)_i \mid \sum_i x_i \leq \bar{\omega}\}$. F がコンパクト であることは容易に示される.
- 2. 効用可能性集合 $\hat{V} = \{(u_i(x_i))_i \mid (x_i)_i \in F\}$ を定義した. F がコンパクトであることと u_i が連続であることから, \hat{V} はコンパクトである(特に $u_i(0) = 0$ と定義すると, \hat{V} は非負象限 \mathbf{R}_+^I に含まれる).
- 3. 関数 $\alpha: \Delta^{I-1} \to \mathbf{R}_+$ を、効用シェア $s \in \Delta^{I-1}$ に対し、

$$\alpha(s) = \sup\{a \in \mathbf{R}_+ \mid as \in \hat{V}\}\$$

と定義した.これは連続であった.その証明は $\limsup_n \alpha(s^n) \leq \alpha(s)$ と $\liminf_n \alpha(s^n) \geq \alpha(s)$ を 示すことによったが,いま復習している全 7 ステップのうち,後述する生産経済ではこの後者だけが 難しい.

- 4. 厚生経済学の第 2 定理より、 $(u_i(x_i))_i = \alpha(s)s$ となる $(x_i)_i \in F$ は価格準均衡配分であり、これに対応する価格ベクトルをもってくればそれとの組は価格準均衡である。
- 5. 対応 $E:\Delta^{I-1} woheadrightarrow F imes \Delta^{L-1}$ を、

$$E(s) = [(u_i(x_i))_i = \alpha(s)s$$
 となる価格準均衡 $((x_i)_i, p)$ の集合]

と定義した.

6. 対応 $\Psi: \Delta^{I-1} \rightarrow \mathbf{R}^I$ を,

$$\Psi(s) = \{ (p \cdot (\omega_i - x_i))_i \mid ((x_i)_i, p) \in E(s) \}$$

と定義した.

7. 不等式定理により、 $0 \in \Psi(s)$ を満たす $s \in \Delta^{I-1}$ が存在する.

本節では以上のことを今度は生産経済について行う. ここで要請する仮定をまとめておく.

- 消費セクターについては今までどおりである。ただし、単調性、すなわち $x_i \gg z_i$ ならば $x_i \succ_i z_i$ という条件は、幾分奇妙になるということは注意しておきたい。生産経済では、効用に関係しないはずの原材料(インプット)の増加も要請しているからである。
- 生産セクターについては、 $Y:=\sum_j Y_j$ が閉・凸であること、 $Y-\mathbf{R}_+^L\subseteq Y$ (自由可処分)、そして、 $y+\bar{\omega}\in\mathbf{R}_{++}^L$ なる $y\in Y$ が存在するとする.
- $F = \{((x_i)_i, y) \mid$ すべての i について $x_i \in \mathbf{R}_+^L$, $y \in Y$; $\sum_i x_i = y + \bar{\omega} \}$ は非空かつコンパクト. これはもっとプリミティブな仮定から導出することもできるが、ここでは仮定とする.
- すべてのi について $\omega_i \in \mathbf{R}_+^L$, すべてのj について $0 \in Y_i$ (利潤が0を保証できる).

以上の仮定のもとで、生産経済の場合について上記の7ステップを順に見ていこう.

1は、Fがコンパクトであることを仮定したので問題ない。2の、 \hat{V} のコンパクト性と、

$$(\hat{V} - \mathbf{R}_{\perp}^{I}) \cap \mathbf{R}_{\perp}^{I} \subseteq \hat{V}, \quad \hat{V} \cap \mathbf{R}_{\perp \perp}^{I} \neq \emptyset$$

も同様である. 仮定より $y + \bar{\omega} \in \mathbf{R}_{++}^L$ を満たす $y \in Y$ が存在することにも注意せよ.

3 については、 \liminf に関する不等式を背理法で証明しよう. 背理法の仮定は $\liminf_n \alpha(s^n) < \alpha(s)$ である.そこで、 $\alpha(s^n) \to \beta$ なる $\beta < \alpha(s)$ をとる.また、 $\alpha(s^n)s^n$ を達成する実行可能配分を $((x_i^n)_i, y^n)$ 、極限での $\alpha(s)s$ を達成する実行可能配分を $((x_i)_i, y)$ とする.

生産セクターについての仮定により、 $\bar{y}+\bar{\omega}\in \mathbf{R}_{++}^L$ なる $\bar{y}\in Y$ が存在する. 任意の $m=1,2,\ldots$ に対し、

$$\bar{y}^m = \left(1 - \frac{1}{m}\right)y + \frac{1}{m}\bar{y}$$

とする. Y は凸集合と仮定したので, $\bar{y}^m \in Y$ である. すると,

$$(\bar{y}^m + \bar{\omega}) - \frac{1}{2m}(\bar{y} + \bar{\omega}) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)(y + \bar{\omega}) + \frac{1}{m}(\bar{y} + \bar{\omega}) - \frac{1}{2m}(\bar{y} + \bar{\omega})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{m}\right)\underbrace{(y + \bar{\omega})}_{\in \mathbf{R}_+^L} + \underbrace{\frac{1}{2m}\underbrace{(\bar{y} + \bar{\omega})}_{\in \mathbf{R}_{++}^L} \in \mathbf{R}_{++}^L}_{\in \mathbf{R}_{++}^L} \right)$$

$$(6.6)$$

である. これをうまく再配分すると、 $(x_i^n)_i$ を強パレート改善できて矛盾となることを示す.

以下,便宜的に $I=\{1,\ldots,I\}$ と書く.また, $H=\{i\in I\mid s_i>0\}$ と書く.そこで, $(\bar{x}_i^m)_i$ を次のように定義しよう:まず $i\notin H$ ならば,

$$\bar{x}_i^m = \frac{1}{2m|I \setminus H|}(\bar{y} + \bar{\omega})$$

とする. $i\in H$ ならば、各財 $l=1,\dots,L$ について、総供給 $y+\bar{\omega}\in \mathbf{R}_+^L$ において生産されているか否かに応じて分けて定義する:

$$\bar{x}_i^{lm} = \begin{cases} \frac{x_i^l}{y^l + \bar{\omega}^l} \left(\left(1 - \frac{1}{m} \right) (y^l + \bar{\omega}^l) + \frac{1}{2m} (\bar{y}^l + \bar{\omega}^l) \right) & (y^l + \bar{\omega}^l > 0 \text{ as } \tilde{\mathfrak{S}}), \\ \frac{1}{|H|} \left(\left(1 - \frac{1}{m} \right) (y^l + \bar{\omega}^l) + \frac{1}{2m} (\bar{y}^l + \bar{\omega}^l) \right) & (y^l + \bar{\omega}^l = 0 \text{ as } \tilde{\mathfrak{S}}). \end{cases}$$
(6.7)

このとき,任意のiとmについて $\bar{x}_i^m \in \mathbf{R}_{++}^L$ が成り立つ.さらに,

$$\begin{split} \sum_i \bar{x}_i^m &= \sum_{i \notin H} \bar{x}_i^m + \sum_{i \in H} \bar{x}_i^m \\ &\leq \frac{1}{2m} (\bar{y} + \bar{\omega}) + \left(\left(1 - \frac{1}{m} \right) (y + \bar{\omega}) + \frac{1}{2m} (\bar{y} + \bar{\omega}) \right) \\ &= \bar{y}^m + \bar{\omega} \end{split}$$

なので (最後の等号は式 (6.6) より), $(\bar{x}_i^m)_i$ は実行可能である.

これに対して効用水準は、任意の $i \notin H$ とmに対し、

$$u_i(\bar{x}_i^m) > 0$$

であって, $i \notin H$ では $u_i(x_i^n) \to 0$ だから,任意の m に対して n を十分大きくとれば $u_i(\bar{x}_i^m) > u_i(x_i^n)$ が 成り立つ.

他方, 任意の $i \in H$ に対しては, (6.7) より $m \to \infty$ のとき $\bar{x}_i^m \to x_i$ だから, $m \to \infty$ のとき

$$u_i(\bar{x}_i^m) \to u_i(x_i) = \alpha(s)s_i$$

が成立する.

また, $\alpha(s^n)s_i^n \to \beta s_i \ (n \to \infty)$ なので, $u_i(x_i^n) \to \beta s_i$ である.

ここで, β のとり方と $s_i>0$ によって $\alpha(s)s_i>\beta s_i$ なので,十分大きな n と m をとれば,任意の $i\in H$ に対し

$$u_i(\bar{x}_i^m) > u_i(x_i^n)$$

が成り立つ.

以上より結局,すべての $i \in I$ について $u_i(\bar{x}_i^m) > u_i(x_i^n)$ である.これは $(x_i^n)_i$ が弱パレート効率的であることに矛盾である.よって, $\liminf_n \alpha(s^n) \geq \alpha(s)$ であって, \limsup の式とあわせて, $\lim_n \alpha(s^n) = \alpha(s)$ が結論される.

7 ステップのうちの 4 すなわち第 2 定理は交換経済の場合と同様で、5 の均衡対応 E についても同様である.

6 の,不等式定理を適用するための対応 Ψ は,企業 j の利潤関数 π_j を用いて,

$$\Psi(s) = \left\{ \left(p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \pi_j(p) - p \cdot x_i \right)_i \middle| ((x_i)_i, p) \in E(s) \right\}$$

とする(収穫一定を仮定すると利潤は0なので右辺第2項は不要である).任意のiに対して π_i は連続関数なので,あとは以前と同様である.7ではいま定義したものに不等式定理を適用すればよい.

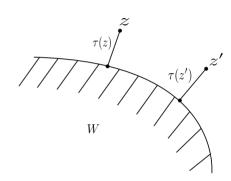
6.13 正則経済 (regular economy) の理論

ワルラス均衡の性質(特に transfer paradox が起こるための条件)を明らかにするために、それを微分(1階の条件)を使って表そう。そのために以下の条件を課す。

6.13.1 仮定

- (a) 任意の i について X_i は非空かつ開集合(むしろ,均衡での消費は X_i の内点であるという意味.あまり良い仮定ではない). \succ_i は, C^2 級で,なおかつ $\nabla u_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ かつ $\nabla^2 u_i$ は負値定符号である u_i で表される.
- (b) 総産出可能性集合 W は非空, 閉, 凸である.

 $\alpha(p)=\sup\{p\cdot x\mid x\in W\}$ と定義する。W を表現する写像(投影写像と呼ばれる)を定義し,それに微分を適用しよう。任意の $z\in \mathbf{R}^L$ について $\min_{x\in W}\|x-z\|_2$ を考えよう*28。W が凸なのでこの問題には解がひとつのみ存在する。これを $\tau(z)$ で表すと, $\tau:\mathbf{R}^L\to\mathbf{R}^L$ が定義できる。その性質は以下の通りである。



6.13.2 命題

- (a) 任意の z について, $z \in W$ であることと $\tau(z) = z$ が成立すること は同値である.
- (b) 任意の $z \in \mathbf{R}^L$ と任意の $x \in W$ について, $(z-\tau(z)) \cdot (x-\tau(z)) \le 0$ が成立する.
- (c) 任意の $z \in \mathbf{R}^L$ について, $\alpha(z \tau(z)) = (z \tau(z)) \cdot \tau(z)$ が成立する.これは (b) と同値.
- (d) τ は微分可能でないような W が存在する.

 $\boxtimes 6.31 \quad \tau(z)$

命題 6.13.2 の証明

(b) W が凸なので十分小さな $\varepsilon \geq 0$ に対して $\varepsilon x + (1-\varepsilon)\tau(z) \in W$ が成立する. よって,

$$\|(\varepsilon x + (1 - \varepsilon)\tau(z)) - z\|_2 \ge \|\tau(z) - z\|_2$$

が成立するので,

$$\frac{1}{2} \| (\varepsilon x + (1 - \varepsilon)\tau(z)) - z \|_2^2 \ge \frac{1}{2} \| \tau(z) - z \|_2^2$$
(6.8)

が成立し、(6.8) の左辺を ε で微分すると

$$((\varepsilon x + (1 - \varepsilon)\tau(z)) - z) \cdot (x - \tau(z)) \tag{6.9}$$

である. 任意の ε に対して (6.8) が成立し, $\varepsilon=0$ のとき (6.8) の左辺は $1/2\|\tau(z)-z\|_2^2$ であるので, (6.9) を $\varepsilon=0$ で評価すると $(\tau(z)-z)\cdot(x-\tau(z))\geq 0$ が成立する.

(c) (b) が $(z - \tau(z)) \cdot \tau(z) \ge (z - \tau(z)) \cdot x$ と書き直せ、これはすなわち $\tau(z)$ は $z - \tau(z)$ の下で利潤 (収入) を最大化しているということであることから従う。またこの逆も成立する(補題 6.13.4).

 $^{*^{28} \| \}cdot \|_2$ はユークリドのノルムを表す.

(d) 以下の例 6.13.3 から従う.

///

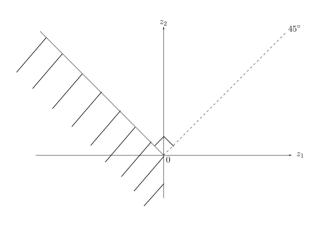
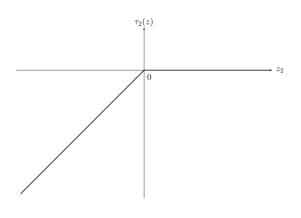


図 6.32 総生産可能性集合



 $\boxtimes 6.33 \quad \tau_2(z)$

6.13.3 例 図 6.32 で総生産可能性集合が表される状況を考える.このとき,任意の $z \in \mathbb{R}^2$ について, $z_1 \geq z_2 \geq 0$ ならば $\tau(z) = (0,0)$ であり, $z_1 \geq 0 \geq z_2$ ならば $\tau(z) = (0,z_2)$ である.よって,任意の $z_1 > 0$ について, $\tau_2(z)$ は $z_2 = 0$ で微分可能でない(図 6.33 参照).しかし,「ほとんど全ての点 z」で微分可能であることが知られている.

ここで, 命題 6.13.2 の (b) の逆も成立することを証明する.

6.13.4 補題 $w \in W$ かつ $p \in \mathbb{R}^L$ とする. もし $\alpha(p) = p \cdot w$ ならば $\tau(p+w) = w$.

補題 6.13.4 の証明 任意の $w \in W$ について

$$\|x-(w+p)\|_2^2 = \|(x-w)-p\|_2^2 = \|x-w\|_2^2 - 2p \cdot (x-w) + \|p\|_2^2 \ge \|p\|_2^2 = \|w-(w+p)\|_2^2$$
が成立する. τ の定義により $w=\tau(p+w)$ である.

6.13.5 命題 次の2つの命題は同値である.

- (1) 任意の $z \in \mathbb{R}^L$ について, $\alpha(z \tau(z)) = (z \tau(z)) \cdot \tau(z)$ が成立する.
- (2) 任意の $w \in \mathbb{R}^L$ と任意の $p \in \mathbb{R}^L$ について、もし $\tau(p+w) = w$ ならば $\alpha(p) = p \cdot w$.

命題 **6.13.5** の証明 まず (1) が成立するならば (2) が成立することを証明する. $w \in \mathbf{R}^L$ と $p \in \mathbf{R}^L$ として $\tau(p+w)=w$ を仮定する. z=p+w とおくと, $z-\tau(z)=(p+w)-w=p$ と $\tau(z)=w$ が成立する. よって (1) より $\alpha(p)=p\cdot w$, つまり (2) が成立する.

次に (2) が成立するならば (1) が成立することを証明する. $z \in \mathbf{R}^L$ とする. $w = \tau(z)$, $p = z - \tau(z)$ とおくと, p + w = z であるので, $\tau(p + w) = w$, $\tau(z) = w$ および $z - \tau(z) = p$ である. (2) より $\tau(p + w) = w$ が成立する, すなわち $(z - \tau(z)) \cdot \tau(z) = \alpha(z - \tau(z))$ が成立する.

次に、 u_i, α_i, τ を使ってワルラス均衡を定義しよう.

6.13.6 命題 $((x_1,...,x_I),p)$ がワルラス均衡であることと以下の 3 条件を満たすことは同値である.

- (a) 任意の i について、 $p \cdot x_i = \alpha_i(p)$ が成立する(予算制約)
- (b) 任意の i について,ある $\lambda_i>0$ が存在して, $p=\lambda_i \nabla u_i(x_i)$ が成立する(効用最大化)
- (c) $au\left(\sum_{i=1}^{I}x_i+p\right)=\sum_{i=1}^{I}x_i$ が成立する(利潤(収入)最大化と実行可能性)

 u_i は凹関数,W は凸集合なので,これらは $((x_1,\ldots,x_I),p)$ がワルラス均衡であるための十分条件である. よって均衡を見出すとは,LI+I+L 個の「未知数」 $((x_1,\ldots,x_I),(\lambda_1,\ldots,\lambda_I),p)$ で上記 I+LI+L 本の方程式を解くことである.ただし,実質的な未知数の数と方程式の数はひとつずつ少ないことを後で示す. ここで、パレート効率性を方程式で特徴付けよう.

6.13.7 補題 任意の $(x_1, \ldots, x_I) \in X_1 \times \cdots \times X_I$ について, (x_1, \ldots, x_I) がパレート効率的であることと,ある $(\lambda_1, \ldots, \lambda_I)$ とある p が存在して $((x_1, \ldots, x_I), (\lambda_1, \ldots, \lambda_I), p)$ が命題 6.13.6 の (b) と (c) を満たすことは同値である.

補題 **6.13.7** の証明 もし (x_1,\ldots,x_I) がパレート効率的ならば,(b) を満たす $(\lambda_1,\ldots,\lambda_I)$ と p が存在する. もしある $w\in W$ が存在して $p\cdot(w-\sum_{i=1}^I x_i)>0$ が成立するならば,ある $\varepsilon>0$ が存在して任意の i について

$$u_i\left(x_i + \varepsilon\left(w - \sum_{i=1}^{I} x_i\right)\right) > u_i(x_i)$$

が成立し、かつWは凸なので

$$\sum_{i=1}^{I} \left(x_i + \varepsilon \left(w - \sum_{i=1}^{I} x_i \right) \right) \in W$$

が成立する. しかし、これは (x_1,\ldots,x_I) がパレート効率的であることに矛盾する. よって、任意の $w\in W$ に対して $p\cdot w \leq p\cdot (\sum_{i=1}^I x_i)$ が成立する. したがって、補題 6.13.4 より $\tau (\sum_{i=1}^I x_i+p)=\sum_{i=1}^I x_i$ が成立する. これで (c) が示された.

次に (x_1,\ldots,x_I) はパレート効率的でないとする.このとき,任意の i についてある $v_i\in \mathbf{R}^L$ が存在して $\nabla u_i(x_i)v_i\geq 0$ が成立し,かつある i について $\nabla u_i(x_i)v_i>0$ が成立し,かつ $\sum_{i=1}^I x_i+\sum_{i=1}^I v_i\in W$ が成立する.よって,もし (b) が成立するならば,任意の i について $p\cdot v_i\geq 0$ が成立し,かつある i について $p\cdot v_i>0$ が成立する.したがって, $p\cdot (\sum_{i=1}^I v_i)>0$ が成立する.他方, $\sum_{i=1}^I x_i+\sum_{i=1}^I v_i\in W$ なので命題 6.13.2 の (b) により

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) - \tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) \right) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{I} x_i + \sum_{i=1}^{I} v_i \right) - \tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) \right) \le 0$$

が成立する. ここで上式の左辺を変形すると,

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} v_{i}\right) + \left(p + \sum_{i=1}^{I} v_{i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_{i} - \tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_{i} + p\right)\right) + \left\|\sum_{i=1}^{I} x_{i} - \tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_{i} + p\right)\right\|^{2}$$

であり, $p\cdot\left(\sum_{i=1}^{I}v_i\right)>0$ であるので $\left(p+\sum_{i=1}^{I}v_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{I}x_i-\tau\left(\sum_{i=1}^{I}x_i+p\right)\right)<0$ である. したがって (c) は成立しない. ///

よって、I+LI+L 本の方程式を解くには、まず $(\lambda_1,\ldots,\lambda_I)$ を固定した上で命題 6.13.6 の (b) と (c) の方程式を解き、パレート効率的配分を求め、次に、 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_I)$ を動かして (a) を解くことが考えられる.これがいわゆる根岸の方法である.

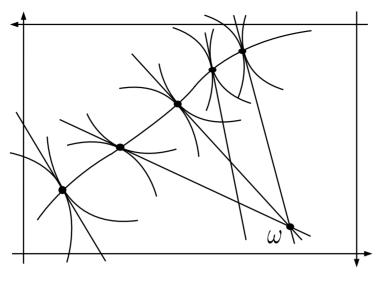


図 6.34 根岸の方法

他方,より標準的な(超過)需要アプローチは次のように考えられる.未知数 $x \in \mathbf{R}^L$ を導入し, (\mathbf{c}) の方程式を

(c')
$$\tau(x+p) - x = 0$$

(d)
$$x - \sum_{i=1}^{I} x_i = 0$$

とすると,(c) と (c')+(d) は同値であり,p を固定して (a),(b) を解くことで需要関数 $x_i=x_i(p)$ が得られ,(c') を解くことで供給対応 x=s(p) が得られる.よって (d) は $s(p)-\sum_{i=1}^I s_i(p)=0$ と書くことができる.左辺は超過需要関数 z(-1),すなわち超過供給関数である.

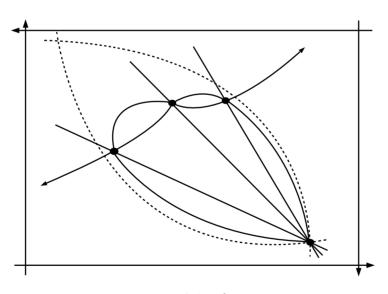


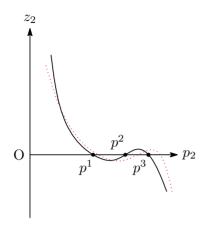
図 6.35 需要アプローチ

6.14 正則均衡の理論

ワルラス均衡がただ1つ存在すれば、一般均衡モデルは「良い」モデルと考えられる。しかし、一意性は一般には成立しない。

命題 6.7.1 で見たように,ワルラス均衡価格とは z(p)=0 の解である.いま 2 財の場合で $p_1=1$ と正規化し, p_2 に対する第 2 財の超過需要関数 z_2 が図 6.36,6.37 のようであるとする.初期保有や効用関数を少

6.14 正則均衡の理論 157



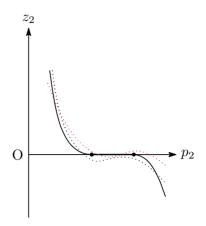


図 6.36 横軸と何度か交差する超過需要関数

図 6.37 横軸に張りついた超過需要関数

し摂動 (perturb) させてやると、超過需要関数は点線のようにずれる. すると左図 6.36 では 3 つの均衡の それぞれが連続的に変化するが、右図 6.37 のような横軸にべったりと張りついた超過需要の場合には、無限個あった均衡がなくなりやすいことが見てとれる.

これは経済モデルの性質としてはあまり好ましいものではない。モデルを構築する際に必要な観測には誤差がつきものであるが、これは例えば効用関数の推定を少し誤っただけで結果を大きく変えてしまう可能性を示すからである。

均衡の特徴づけとして,超過需要関数のかわりに,効用シェアに対するネットサプライの価値額を与える 関数 $s\mapsto \big(p(s)\cdot(\omega_i(s)-x_i(s))\big)_i$ を考えてみても,まったく同じような図が描ける(横軸に消費者 1 の効 用シェア s_1 ,縦軸にこの関数が与える消費者 1 の値をとる).超過需要の場合とパラレルの関係が成り立つのだが,以下の議論にはこちらのほうが便利である場合があるので,適宜どちらも使っていくことにする.

以下では純粋交換経済,すなわちすべての j について $Y_j=\{0\}$ とする(あるいは,選好の単調性を考えれば, $Y_j=-\mathbf{R}_+^L$ と仮定してもよい).任意の消費者 i の消費集合は $X_i=\mathbf{R}_{++}^L$ とし,選好 \succsim_i は 2 回連続 微分可能な効用関数 $u_i:\mathbf{R}_{++}^L\to\mathbf{R}$ で表現されるものとする.

これが弱単調性, すなわち $x_i \geq z_i$ ならば $u_i(x_i) \geq u_i(z_i)$ $(x_i \succsim_i z_i)$ を満たすならば, 勾配ベクトルの各成分は非負である:

$$\nabla u_i(x_i) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i^1}(x_i), \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_i^L}(x_i)\right) \in \mathbf{R}_+^L.$$

なお、勾配ベクトルは通常、行ベクトル(横ベクトル)とする.以下では任意の $x_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ について $\nabla u_i(x_i) \in \mathbf{R}_{++}^L$ を仮定する.このとき強単調性,すなわち $x_i \geq z_i, x_i \neq z_i$ ならば $x_i \succ_i z_i$ が成立する*29.以下,消費者理論の章などで見てきた命題をいくつか事実として再確認することがある.

6.14.1 命題 効用関数 u_i は 2 回連続微分可能と仮定したので、ヘッセ行列 $\nabla^2 u_i(x_i) \in \mathbf{R}^{L \times L}$ が存在する. このとき、次の (1), (2), (3) の条件は同値であり、いずれも (4) を含意する.

- (1) \gtrsim_i が凸.
- (2) u_i が準凹.
- (3) 任意の $x_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対して、ヘッセ行列 $\nabla^2 u_i(x_i)$ (これは対称行列) が以下の条件を満たす: $\nabla u_i(x_i)v=0$ である任意の $v\in\mathbf{R}^L$ に対して、

$$v^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) \quad v_{1 \times L} \leq 0.$$

 $^{^{*29}}$ この逆は真ではないが,ここでは解析的に取り扱いやすい $abla u_i(x_i) \in \mathbf{R}_{++}^L$ のほうを仮定する.

これを $\nabla^2 u_i(x_i)$ が $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^{\perp}$ 上で負値半定符号という.

(4) ラグランジュの 1 階の条件が解であることの必要十分条件. つまり, x_i が効用最大化問題

$$\max_{x_i \in \mathbf{R}_{++}^L} u_i(x_i) \quad \text{subject to} \ \ p \cdot x_i \le w_i$$

の解であることが、ある $\lambda_i > 0$ が存在して

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_i \nabla u_i(x_i) = p & (与配ベクトル \, \nabla u_i(x_i) \, が価格ベクトル \, p \, と平行) \\ p \cdot x_i = w_i & (厳密には等号は単調性 \, \nabla u_i(x_i) \in \textbf{\textit{R}}_{++}^L \text{から}) \end{array} \right.$$

が成り立つことと同値.

この (3) の条件は、図形的に言えば、 $\nabla u_i(x_i)$ と直交する超平面上で負値半定符号ということである。 $\nabla u_i(x_i)$ と直交する超平面を $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^{\perp}$ と書く、 $\langle p \rangle^{\perp}$ はベクトル p の直交補空間を表す記号である.

ただし以下では、より強い次の条件を仮定する。すなわち、任意の $x_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対して、ヘッセ行列 $\nabla^2 u_i(x_i) \in \mathbf{R}^{L \times L}$ が以下の条件を満たすものとする: $\nabla u_i(x_i)v = 0, v \neq 0$ である任意の $v \in \mathbf{R}^L$ に対して、 $v^\top \nabla^2 u_i(x_i)v < 0$.*30つまり、 $\nabla^2 u_i(x_i)$ は $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^\perp$ 上で負値定符号である。

- **6.14.2** 例 L=2 財とする.
 - (1) $u_i(x_i) = \sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2}$ とする. $\nabla^2 u_i(x_i)$ は \mathbf{R}_{++}^2 全体で負値定符号で、 u_i は強凹.

$$(2) u_i(x_i) = \left(\sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2}\right)^{\alpha} とする.$$

$$\nabla^{2} u_{i}(x_{i}) = \frac{\alpha}{4} \frac{\left(\sqrt{x_{i}^{1}} + \sqrt{x_{i}^{2}}\right)^{\alpha - 2}}{\sqrt{x_{i}^{1} x_{i}^{2}}} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{x_{i}^{2}}{x_{i}^{1}}} \left(\alpha - 2 - \sqrt{\frac{x_{i}^{2}}{x_{i}^{1}}}\right) & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \sqrt{\frac{x_{i}^{1}}{x_{i}^{2}}} \left(\alpha - 2 - \sqrt{\frac{x_{i}^{1}}{x_{i}^{2}}}\right) \end{bmatrix}$$

だから、 $\nabla^2 u_i(x_i)$ は \mathbf{R}^2_{++} 全体で (i) $\alpha < 2$ のとき負値定符号,(ii) $\alpha = 2$ のとき負値半定符号,(iii) $\alpha > 2$ のとき不定である.この効用関数は (1) のそれの単調変換なので,表現している選好は同一であるのに, $\nabla^2 u_i(x_i)$ の満たす性質が異なっているということがわかる.ただし, α の値にかかわらず $\nabla^2 u_i(x_i)$ は $\nabla u_i(x_i)$ と直交する直線上で負値定符号である.

6.14.3 補題 任意の $x_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対して、ヘッセ行列 $\nabla^2 u_i(x_i)$ が $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^{\perp}$ 上で負値定符号であるとする。このとき、 $\varphi_{\alpha}(z) = -\exp(-\alpha z)$ と書くと、ある $\alpha > 0$ が存在して、 x_i に十分近い任意の z に対し、 $\nabla^2 (\varphi_{\alpha} \circ u_i)(z)$ は \mathbf{R}^L 上で負値定符号である。

この補題が言っているのは次のことである.まず, $\varphi_{\alpha}\circ u_i$ というのは u_i の単調変換なので,同じ選好を表現していることに注意しよう.「ヘッセ行列 $\nabla^2 u_i(x_i)$ が \mathbf{R}^L 上で負値定符号」は,「 $\nabla^2 u_i(x_i)$ が $\nabla u_i(x_i)$ の直交超平面上で負値定符号」より強い条件だが,もし u_i が x_i において第 2 の条件を満たすなら,それに適当な単調変換を施して得られる効用関数は x_i の近傍で第 1 の条件をも満たす,ということである.

6.14.4 注意

• 最初にとる $x_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ は 1 点であったが、これを \mathbf{R}_{++}^L のコンパクト部分集合に置き換えても依然として補題は成立する.

^{*} *30 このとき \succsim_i は厳密に凸である.その逆は言えない.すなわち,厳密に凸であっても負値定符号にならない例がある.1 変数関数の場合で, $y=-x^4$, $y''=-12x^2$ のグラフを考えてみればよい.

6.14 正則均衡の理論 159

• しかし、任意の $x_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対して $\nabla^2 u_i(x_i)$ が \mathbf{R}^L 上で負値定符号であるような α は一般には存在しない.

• $\nabla u_i(x_i)$ が $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^{\perp}$ 上で負値定符号であることが重要であって、この条件を負値半定符号に置き換えることはできない。

6.14.5 例 \mathbf{R}_{++}^2 上で定義される効用関数 $u(x) = x_2/x_1$ を考える. $\nabla^2 u_i(x_i)$ は $\langle u_i(x_i) \rangle^{\perp}$ 上でゼロ. すなわち,負値半定符号かつ正値半定符号である. しかし,u のいかなる単調変換でも凹もしくは凸ではない.

さて、いま消費集合を $X_i = \mathbf{R}_{++}^L$ と仮定しているので、予算集合 $p \cdot x_i \leq w_i$ を満たす $x_i \in \mathbf{R}_{++}^L$ の集合は軸を含まずコンパクトでない、そこで、たとえば右図の図 6.38 ように第 1 財だけを好む選好のとき、最大化問題の解が存在しないことになる。

こういう状況が起こらず解が存在することを保証する条件として、文献では次の条件を課してきた:任意の $x_i \in R_{++}^L$ について、 $\{y \in R_{++}^L \mid y \succsim_i x_i\}$ の R^L の位相(R_{++}^L の相対位相ではない)に関する閉包が R_{++}^L に含まれる.要するに、無差別曲線が軸にぶつからないということである.コブ・ダグラス型や CES 効用関数はこの条件を満たしているが、図 6.38 のものは満たしていない.

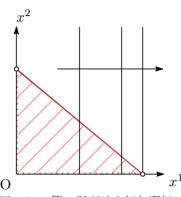


図 6.38 第1財だけを好む選好

練習問題 $6.14.1 \succsim_i$ がこの条件を満たし、連続な u_i で表されるとき、任意の価格と富水準のペア $(p,w_i) \in \mathbf{R}_{++}^L \times \mathbf{R}_{++}$ について、 (p,w_i) の下での効用最大化問題に解が存在することを証明せよ.

ただし, 今後は解の存在はむしろ仮定してしまうので, この事実を適用する機会はあまりない.

6.14.6 事実 \succsim_i が厳密に凸ならば, (p,w_i) に対して効用最大化解を与える需要関数 $x_i: \mathbf{R}_{++}^L \times \mathbf{R}_{++} \to \mathbf{R}_{++}^L$ は関数である.

6.14.7 命題 u_i は単調性を満たし, $\nabla^2 u_i(x_i)$ が $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^\perp$ 上で負値定符号であるとする.このとき需要関数 x_i は 1 回連続可微分である.

命題 6.14.7 の証明 写像 $\varphi_i: R_{++}^L \times R_{++} \times R_{++}^L \times R_{++} \to R^L \times R$ を次のように定義する:

$$\varphi_i(p, w_i, x_i, \lambda_i) = \begin{pmatrix} p - \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top \\ w_i - p \cdot x_i \end{pmatrix}$$

(勾配ベクトル ∇ は行ベクトルと考えている. p と x_i は列である). u_i は 2 回連続可微分, ∇u_i は 1 回連続可微分である. したがってこの φ_i は (1 回) 連続可微分である.

また,事実 6.14.6 で見たように, x_i が (p,w_i) の下での解であることと, $\lambda_i \in \mathbf{R}_{++}$ が存在して $\varphi_i(p,w_i,x_i,\lambda_i)=0$ が成り立つことは同値である(つまり,需要関数とは方程式体系 $\varphi_i(p,w_i,x_i,\lambda_i)=0$ の解にほかならない).よって,解空間 $\varphi_i^{-1}(0)$ の上で (x_i,λ_i) が (p,w_i) の連続可微分な関数ならば,需要 関数は可微分である.これを示したい.

陰関数定理によれば、このための十分条件は「 $\varphi_i(p,w_i,x_i,\lambda_i)=0$ ならば $D_{(x_i,\lambda_i)}\varphi_i(p,w_i,x_i,\lambda_i)$ が可逆である」ことである。ここで $D_{(x_i,\lambda_i)}\varphi_i(p,w_i,x_i,\lambda_i)$ とは、 (p,w_i,x_i,λ_i) で評価された φ_i の (x_i,λ_i) に関するヤコビ行列である。これは $(L+1)\times (L+1)$ 行列である。これを示していこう。

上記のヤコビ行列は,

$$D_{(x_i,\lambda_i)}\varphi_i(p, w_i, x_i, \lambda_i) = D_{(x_i,\lambda_i)} \begin{pmatrix} p - \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top \\ w_i - p \cdot x_i \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\lambda_i \nabla^2 u_i(x_i) & -\nabla u_i(x_i)^\top \\ -p^\top & 0 \end{pmatrix}$$

である.可逆とは行ベクトルが 1 次独立であることに同値だから,この行列の左から (v^\top,s) をかけて 0 に等しいとおいたとき v=0 かつ s=0 が成り立つことを示したい(1 次結合の係数が全て 0 ということ).かけた結果は.

$$v^{\top}(-\lambda_i \nabla^2 u_i(x_i)) + s(-p^{\top}) = 0$$
$$v^{\top}(-\nabla u_i(x_i)^{\top}) + s \cdot 0 = 0$$

すなわち,

$$\lambda_i v^\top \nabla^2 u_i(x_i) + s \lambda_i \nabla u_i(x_i) = 0$$
 (1 階の条件から $p = \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top$) (転置しただけ)

である. 第1式の両辺に右側からvをかけると,

$$\lambda_i v^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v + s \lambda_i \nabla u_i(x_i) v = 0$$

であって(これは実数の等号),第2式より第2項は0なので,

$$v^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v = 0$$

である. 第 2 式より $v \in \langle \nabla u_i(x_i) \rangle^{\perp}$ なので、これより v = 0 が得られる. そこで元の第 1 式に戻ると.

$$s\underbrace{\lambda_i}_{>0}\underbrace{\nabla u_i(x_i)}_{\in \mathbf{R}_{++}^L} = 0$$

だから、s=0 である. ///

練習問題 **6.14.2** Hicksian 需要関数の連続可微分性を証明せよ(ヒント:費用最小化問題の解について同じようにすればよい).

総超過需要関数 $z: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ を,

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p, p \cdot \omega_i) - \bar{\omega}$$

と定義する. x_i の可微分性から、これは連続可微分である. p がワルラス均衡価格であることと z(p)=0 とは同値であった.

0次同次性を使えば、任意のpに対して、

$$\mathop{Dz(p)}_{L\times L}\mathop{p}_{L\times 1}=0$$

が成り立つ. よって, $p \in \operatorname{Ker} Dz(p)$, すなわち $\langle p \rangle \subseteq \operatorname{Ker} Dz(p)$ である. ワルラス法則(均衡か否かによらず $p \cdot z(p) = 0$)より,

$$z(p) = 0$$
 ならば $p^{\top} Dz(p) = 0$ $1 \times L L \times L$

である. $p^{\top}Dz(p)=0$ は、p と Dz(p) の各列との内積が 0 ということなので、 $\langle p \rangle^{\perp} \supseteq \operatorname{Col} Dz(p)$ と同値である. ただし Col は列空間 (column space) の意味で、これは列ベクトルで張られる空間のことである.

 $\langle p \rangle \subseteq \operatorname{Ker} Dz(p)$ と $\langle p \rangle^{\perp} \supseteq \operatorname{Col} Dz(p)$ のいずれからも、ヤコビ行列 Dz(p) のランク $\operatorname{rank} Dz(p)$ が高々 L-1 であることが従う.この事実から Dz(p) は、 $\langle p \rangle^{\perp}$ 上の線形変換と考えてよい.

6.14.8 定義 ワルラス均衡(価格ベクトル)p が正則 (regular) であるとは,Dz(p) が $\langle p \rangle^{\perp}$ からそれ自身 への全単射であることとする.

6.14.9 補題 ワルラス均衡 p が正則であることは rank Dz(p) = L - 1 と同値である.

Dz(p) は L 次正方行列だが,rank Dz(p) = L (通常の意味での正則) は成立しない.しかしそれは上述のとおり 0 次同次性やワルラス法則という必ず成り立つ性質によっているので,1 つ次元を落としたところで正則かどうかを問題にするのである.

 $\dim\langle p \rangle^\perp = L-1$ なので、 $\langle p \rangle^\perp$ に属するベクトルは、(L-1) 個のベクトルで構成される基底によって座標表示される。すなわち、基底を 1 つ決めると、線形写像 $Dz(p):\langle p \rangle^\perp \to \langle p \rangle^\perp$ は、 $\mathbf{R}^{(L-1)\times(L-1)}$ の要素である (L-1) 次行列と同一視できる(その成分表示はもちろん基底のとり方に依存する)。すると (L-1) 次行列として行列式がとれるが、その行列式の値は基底のとり方に依存しない。正則な p について、その行列式は 0 ではない実数である。後で、この実数に $(-1)^{L-1}$ をかけたものの符号を、均衡価格ベクトル p の指数 (index) と呼ぶ。

6.15 正則均衡の性質

以下では正則均衡の含意を探ろう.

6.15.1 正則均衡の性質と指数

6.15.1 命題 (正則均衡の局所的一意性) $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ が正則均衡であるとする.このとき,ある $\delta > 0$ が存在して,任意の $q \in \mathbf{R}_{++}^L$ について, $\|p-q\| < \delta$ でありかつ $q \in \mathbf{R}_{++}^L$ が均衡価格ベクトルならば,q は p の スカラー倍である.

命題 6.15.1 の証明

総超過需要関数 $z: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ に対し, $\hat{z}: \mathbf{R}_{++}^{L-1} \to \mathbf{R}^{L-1}$ を次のように定義しよう:

$$\hat{z}(\hat{p}) = (z^1(\hat{p}, 1), \dots, z^{L-1}(\hat{p}, 1))$$

(0 次同次性とワルラス法則によって定義域と値域の両方の次元をひとつずつ下げることが出来る).このとき,L 次元の価格ベクトル $(\hat{p},1)$ が正則均衡であることと, $D\hat{z}(\hat{p})\in \mathbf{R}^{(L-1)\times(L-1)}$ が逆行列をもつこととは同値である*31.

さらに、任意の正の定数 $\alpha>0$ に対して、p が正則均衡であることと αp が正則均衡であることとは同値である。よって特に、p が正則均衡であることと $(p^1/p^L,\dots,p^{L-1}/p^L,1)$ が正則均衡であることとは同値である。

したがって逆関数定理により、もし p が正則均衡ならば、 \hat{z} は $(p^1/p^L, \dots, p^{L-1}/p^L)$ のまわりで(局所的に)全単射、すなわち $\hat{z}(\hat{p})=0$ である \hat{p} はこの $(p^1/p^L, \dots, p^{L-1}/p^L)$ に限られる。 つまり $p^L=1$ と正規

^{*31} そのことは,Dz(p) から最終行と最終列とを取り去ったものが $D\hat{z}(\hat{p})$ になっているという関係と,0 次同次性・ワルラス法則を使えば証明できる.

化された均衡価格ベクトルは局所的に一意なので、これで証明完了である。ここでは第L財がニュメレール(価値基準財)であるとしたが、もちろんどれを選んでも同じである。 ///

価格空間を次のように正規化する : $P=\{p\in \mathbf{R}_{++}^L\mid \|p\|=1\}$ とおく(z は 0 次同次なのでこのような正規化をしてよい). これは (L-1) 次元の多様体である.

 T_pP を、P の p における接空間 (tangent space) とする.これは p のまわりで多様体 P を最もよく近似する線形部分空間である(6.9.2 節も参照のこと).

写像 $\varphi: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}$ を、 $\varphi(p) = (\|p\|^2 - 1)/2$ と定義すると、 $P = \varphi^{-1}(0)$ である(P の定義 $\|p\|^2 = 1$ より).

よって、任意の $p \in P$ に対して、 $T_pP = \operatorname{Ker} \nabla \varphi(p)$. さらに φ の定義から $\nabla \varphi(p) = p^{\top}$ なので、 $\operatorname{Ker} \nabla \varphi(p) = \langle p \rangle^{\perp}$ である.

ここで,ワルラス法則(任意の p について $p \cdot z(p) = 0$)は, $z(p) \in \langle p \rangle^{\perp} = T_p P$ に同値である.このような,多様体 P 上の任意の点 p に対してその像 z(p) がその点 p における接空間 T_p に属する写像 z を vector field という.つまり z は P 上の vector field である.

p の正則性は、この vector field の p における z の微分が全単射であることと同値である.よって、多様体上の逆関数定理により、p は局所的に唯一の均衡である.

この結果を使って、均衡の有限性を示そう.

6.15.2 補題 総超過需要関数を $z: \mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ とし,z は境界挙動条件(命題 6.7.2)を満たすとする.このとき, $z^{-1}(0) \cap P$ はコンパクト集合である.

z は連続関数なので、 $z^{-1}(0)$ は \mathbf{R}_{++}^L の中では閉じていて(\mathbf{R}_{++}^L は \mathbf{R}^L からの相対位相を考える)、 $z^{-1}(0)\cap P$ は P の中では閉じているのだが、ここで示すのはそれが \mathbf{R}^L の中で閉じているということである.

補題 6.15.2 の証明 P より有界性は明らかなので、閉じていることを示せば十分である.

 $z^{-1}(0)\cap P$ が \mathbf{R}_{++}^L の境界から正の距離をもって離れていることを示せば十分である。均衡価格ベクトルの列があって P の端の部分に収束しているなら矛盾が生じるという背理法によって示せる。 $(p_n)_n$ が $z^{-1}(0)\cap P$ 上の点列であって $p_n\to p\in \mathbf{R}_+^L$ とする(\mathbf{R}_+^L は z の定義域 \mathbf{R}_{++}^L の閉包)。 ノルムの連続性から $\|p\|=1$. ここで $p\notin \mathbf{R}_{++}^L$ ならば,境界挙動条件からある財の超過需要は無限大に発散する。したがって $p\in \mathbf{R}_{++}^L$ である。よって $z^{-1}(0)\cap P$ は閉。 ///

この補題を使うと以下のことがわかる:

6.15.3 命題 もしすべての均衡が正則(このような経済を正則経済 regular economy と呼ぶ)ならば,その均衡の P に属する均衡価格ベクトルは高々有限個存在する.

命題 6.15.3 の証明 局所的一意性から, $z^{-1}(0)\cap P$ は離散であり,かつ上の補題 6.15.2 からコンパクトである.任意の離散かつコンパクトな集合は有限である. ///

すなわち、正則経済の均衡は高々有限個である.そして、正則経済ではすべての p が正則なので指数 (index) がとれるが、 $z^{-1}(0) \cap P$ が有限なのでそれらの和を考えることができる.

前述の通り、vector field $z:P\to \mathbf{R}^L$ のヤコビ行列 $Dz:\mathbf{R}_{++}^L\to\mathbf{R}^L$ は $\langle p\rangle^\perp$ 上の線形変換とみなすことができ、それを表現する行列は座標系(基底)のとり方に依存するが、行列式はそれに依存しないの

で、行列式の符号に $(-1)^{L-1}$ をかけたものを正則均衡 p の指数 (index) と呼ぶ* 32 . すなわち、行列 Dz は (L-1) 次行列とみなすとして、

$$index p = (-1)^{L-1} \operatorname{sgn}(\det(Dz(p)))$$

である. これは 1 または -1 である. ただし、ここで $Dz(p): \langle p \rangle^{\perp} \to \langle p \rangle^{\perp}$ と考えよ.

総超過供給関数 -z のヤコビ行列は D(-z)(p)=-Dz(p) であって,その行列式の値は,行列式の多重線形性より,

$$\det(-Dz(p)) = (-1)^{L-1} \det(Dz(p))$$

である. すなわち, p の指数とは, 総超過供給 -z の行列式の符号そのものである.

6.15.4 定理 (指数定理 (index theorem)) 正則経済では,

$$\sum_{p \in z^{-1}(0) \cap P} \operatorname{index} p = 1.$$

6.15.5 注意 上記定理の証明はしないが、この含意は以下の通り.

- 空なら和は0なので、少なくとも1つの均衡が存在することがわかる。
- 和の各項がすべて負なら和も負なので、和が正であることから少なくとも 1 つの(正則)均衡の指数 は +1 である.
- この和は (+1 の均衡の個数) -(-1 の均衡の個数) に等しいから、それが 1 なので、+1 の均衡が -1 の均衡よりも 1 つだけ多い、よって均衡は奇数個存在することがわかる。
- り衡が一意なら、その指数は +1 である。
- もし任意の均衡の指数が +1 ならば、それは一意である(均衡価格 p が具体的に求まらなくても $\det(Dz(p))$ がわかることがある.それが p に依存しないで +1 だとすれば、均衡は一意とわかる.ここでは総超過需要の行列式の符号だけで均衡の一意性が保証されることになる).

6.15.2 根岸の方法による指数の定義

これまでは総超過需要関数 z をもとにして正則均衡の指数を考えてきた。ところで,存在証明の節では, $\Psi(s)=\{(p\cdot(\omega_i-x_i))_i\mid ((x_i)_i,p)\in E(s)\}$ という対応を定義して,これに不動点定理(不等式定理)を適用したのであった。ここではこれに似た関数を定義して,それに対して指数を定義しよう。後で見るように厚生分析 (welfare analysis) では,z よりもこの関数のほうが便利なのである。

以下,任意のiの x_i についてヘッセ行列 $\nabla^2 u_i(x_i)$ が \mathbf{R}^L 全体で負値定符号であることを仮定する.

価格均衡の集合 E(s) を方程式体系で表して,それに対し陰関数定理を適用し,微分可能性を考える. $((x_i)_i,p)\in \mathbf{R}_{++}^{LI}\times\mathbf{R}_{++}^L$ が価格均衡であるとは,あるウェイトベクトル $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_I)\in\mathbf{R}_{++}^I$ が存在して,次の方程式体系が成立することと同値である:

$$\left\{
\begin{array}{c}
p - \lambda_1 \nabla u_1(x_1)^\top = 0 \\
\vdots \\
p - \lambda_I \nabla u_I(x_I)^\top = 0
\end{array}
\right\}$$
勾配ベクトル $\nabla u_i(x_i)^\top$ と価格ベクトル p は互いにスカラー倍
$$= 効用最大化条件$$

$$\bar{\omega} - \sum_{i=1}^{I} x_i = 0$$
実行可能性.

 $^{^{*32}}$ 正則均衡ならば Dz は全単射なので行列式は 0 でない.

この方程式体系を満たす $((x_i)_i, p)$ は λ の連続可微分な関数であることを示したい. $((x_i)_i, p)$ はこの体系で λ に陰に依存して書かれているが、これを陽に書き直すために、陰関数定理を用いる.

方程式体系の左辺は $((x_i)_i,p)$ の関数である. $((x_i)_i,p)$ が λ に関して陽に解けることを示すには,陰関数定理によりこの関数の $((x_i)_i,p)$ に関するヤコビ行列が可逆であることを示せばよい. 未知数 $((x_i)_i,p)\in \mathbf{R}_{++}^{LI}\times\mathbf{R}_{++}^{L}$ の数も方程式体系の本数も LI+L で一致していることに注意しよう.

 $((x_i)_i,p)$ に関するヤコビ行列を求めよう。第 i 消費者の 1 階条件 $p-\lambda_i \nabla u_i(x_i)=0$ の x_i に関する偏微 分は $-\lambda_i \nabla^2 u_i(x_i)$ で, x_j $(j\neq i)$ に関する偏微分は(外部性がないので)O (零行列)である。p に関する偏微分は I_L (L 次単位行列)。資源制約式 $\bar{\omega}-\sum x_i=0$ の x_i 偏微分は $-I_L$ で,p 偏微分は O. 以上をまとめると、

$$\begin{bmatrix}
-\lambda_1 \nabla^2 u_1(x_1) & O & \cdots & O & I_L \\
O & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & O & \vdots \\
O & \cdots & O & -\lambda_I \nabla^2 u_I(x_I) & I_L \\
-I_L & \cdots & \cdots & -I_L & O
\end{bmatrix}$$

と書ける. この各ブロックは $L \times L$ 行列で、全体は $(LI + L) \times (LI + L)$ 行列である.

これが可逆であることは,すべての行ベクトルが 1 次独立であることに同値である. そこでこの行列に左 から $(v_1^\top,\dots,v_I^\top,q^\top)$ をかけたものが 0 に一致するならば, $v_1=\dots=v_I=q=0$ が成り立つことを示せばよい.この積の x_i に関する列は,

$$v_i^{\top}(-\lambda_i \nabla^2 u_i(x_i)) + q^{\top}(-I_L) = 0,$$

すなわち,

$$\lambda_i v_i^\top \nabla^2 u_i(x_i) + q^\top = 0 \tag{6.11}$$

である. またpに関する列は,

$$v_1^{\top} I_L + \dots + v_I^{\top} I_L + q^{\top} O = \sum_{i=1}^{I} v_i^{\top} = 0.$$
 (6.12)

つまり, $\sum_{i=1}^{I} v_i = 0$ である. (6.11) に右側から v_i をかけると,

$$\lambda_i v_i^\top \nabla^2 u_i(x_i) v_i + q^\top v_i = 0$$

であり、これのすべてのiに関する和をとると、(6.12)とあわせて、

$$\sum_{i=1}^{I} \lambda_{i} v_{i}^{\top} \nabla^{2} u_{i}(x_{i}) v_{i} + q^{\top} \left(\sum_{i=1}^{I} v_{i} \right) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_{i} v_{i}^{\top} \nabla^{2} u_{i}(x_{i}) v_{i} = 0$$

がわかる.ところで $\lambda_i>0$ であり,2 次形式 $v_i^\top \nabla^2 u_i(x_i)v_i$ は $\nabla^2 u_i(x_i)$ が負値定符号より 0 以下である. したがって,すべての i について

$$\lambda_i v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v_i = 0$$

であり、ふたたび $\nabla^2 u_i(x_i)$ が \mathbf{R}^L 全体で負値定符号であることよりこれは $v_i=0$ でなければならない.最後に (6.11) に戻ると $v_i=0$ から q=0 が従う.

6.15.6 注意 $((x_i)_i,p)$ が λ の連続可微分な関数であることを示すために, $\nabla^2 u_i(x_i)$ が勾配ベクトル $\nabla u_i(x_i)$ を法線とする超平面 $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^{\perp}$ 上で負値定符号であると仮定するだけでは不十分である.実際,その際の価格均衡 $((x_i)_i,p)$ を λ の関数として解けないことがある.2 人 2 財いずれの消費者の効用関数も

 $u_i(x_i)=(x_i^1)^{1/2}(x_i^2)^{1/2}$ である場合,任意の価格均衡は $\lambda_1=\lambda_2$ なる λ とともに上記の方程式体系を解く. $\log x_i^1+\log x_i^2$ はこれと同じ選好を表現するが,こちらの場合は $((x_i)_i,p)$ に関するヤコビ行列は正則である.すなわち,効用表現 u_i の選び方に依存する.

したがって、この仮定のもとで、少なくとも局所的には、 λ に価格均衡 $((x_i)_i, p)$ を対応づける連続可微分写像が存在する。それを $((x_i(\lambda))_i, p(\lambda))$ と書くことにする。

そこで,

$$w(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda_i}p(\lambda)\cdot(x_i(\lambda) - \omega_i)\right)_{i=1,\dots,I}$$

と定義する.各要素は,正ならば持っている初期保有 ω_i よりも多くを受け取っており,負ならば少ないことを意味する. $1/\lambda_i$ をかけているのはこの写像を vector field にするためである.このように写像 $w: \mathbf{R}_{++}^I \to \mathbf{R}^I$ を定義する.0 次同次性より w の定義域を $\{\lambda \in \mathbf{R}_{++}^I \mid \|\lambda\| = 1\}$ に制限したとき,任意の λ に対して,その像 $w(\lambda)$ はこの多様体の λ における接空間 $\langle \lambda \rangle^\perp$ に属する.つまり w が vector field である.

 λ がワルラス均衡であることは $w(\lambda)=0$ と同値である. これは z(p)=0 とも同地である.

6.15.7 命題 この写像 w についても、0 次同次性 $w(t\lambda) = w(\lambda)$ と、ワルラス法則に類似したもの $\lambda \cdot w(\lambda) = 0$ が成り立つ.

z の場合と同様に、ヤコビ行列 $Dw(\lambda)$ は $\langle \lambda \rangle^{\perp}$ 上の線形変換と考えることができる.この $\langle \lambda \rangle^{\perp}$ 上の線形変換の行列式が 0 でなければこの均衡を正則といい、行列式の符号 $\mathrm{sgn}(\det Dw(\lambda))$ をこの正則均衡の指数と呼び index λ と書く*33.

式 (6.10) の実行可能性条件を $\tau(\sum_{i=1}^I x_i + p) - \sum_{i=1}^I x_i = 0$ に置き換えたときにもヤコビ行列

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -\lambda_i \nabla^2 u_i(x_i) & & & & I_L \\ & & & \ddots & & \vdots \\ \hline & \cdots & D\tau \left(\sum_{i=1}^I x_i + p \right) - I_L & \cdots & D\tau \left(\sum_{i=1}^I x_i + p \right) \end{bmatrix}$$

$$(6.13)$$

が階数 LI+L を持つこと,すなわちフルランクであることを証明する.ただし, τ が $\sum_{i=1}^{I} x_i + p$ で可微分であることが前提である.まず次の補題を証明する.

6.15.8 補題 $D\tau(\cdot)$ は対称で固有値は 0 と 1 の間に存在する.

補題 $\mathbf{6.15.8}$ の証明 $\gamma(z): \mathbf{R}^L \to \mathbf{R}$ を

$$\gamma(z) = \frac{1}{2} ||z - \tau(z)||^2$$

と定義する. まず γ が凸であることを示す. 任意の $z,z'\in \mathbf{R}^L$ と任意の $t\in [0,1]$ に対して, W が凸であ

^{*33} 超過需要に対しては $\operatorname{sgn}((-1)^{L-1}\det Dz(p))$ を指数と定義したのに対し、ここでは $(-1)^{L-1}$ がかけられていないことに注意せよ。ただしこれは超過供給 -z のヤコビ行列の行列式の符号 $\operatorname{sgn}(\det(D(-z)(p)))$ に他ならない。

ることより $t\tau(z) + (1-t)\tau(z') \in W$ が成立する. よって,

$$\gamma (tz + (1-t)z') \ge \frac{1}{2} \| (tz + (1-t)z') - (t\tau(z) + (1-t)\tau(z')) \|^2$$

$$= \frac{1}{2} \| t(z - \tau(z)) - (1-t)(z' - \tau(z')) \|^2$$

$$\ge \frac{1}{2} (t\| (z - \tau(z)) \|^2 + (1-t)\| z' - \tau(z') \|^2)$$

$$= t\gamma(z) + (1-t)\gamma(z')$$

が成立する. したがって γ は凸である.

 γ の可微分性と凸性より、任意の $z \in \mathbf{R}^L$ と任意の $v \in \mathbf{R}^L$ に対して、

$$\gamma(z+v) \ge \gamma(z) + (z-\tau(z)) \cdot v \tag{6.14}$$

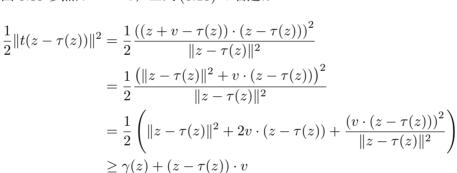
が成立することを示せば、 $\nabla \gamma(z) = z - \tau(z)$ が従う.

$$t = \frac{(z + v - \tau(z)) \cdot (z - \tau(z))}{\|z - \tau(z)\|^2}$$

とすると,

$$\gamma(z+v) \ge \frac{1}{2} ||t(z-\tau(z))||^2$$
 (6.15)

が成立する(右図 6.39 参照). ここで、上式 (6.15) の右辺は



であるので、式 (6.14) が成立することが示された。よって $\nabla \gamma(z)=z-\tau(z)$ が成立する。このことより、 γ が C^2 級であることと τ が C^1 級であることが同値であり、このとき

$$\nabla^2 \gamma(z) = I_L - D\tau(z)$$

6.15.9 命題 τ が $\sum_{i=1}^{I} x_i + p$ で可微分であるとする. このとき,式 (6.13) の行列は階数 LI + L を持つ.

命題 6.15.9 の証明 式 (6.13) の行列に $(v_1^\top,\dots,v_I^\top,q^\top)$ を左からかけると、この積の x_i に関する列と p に関する列はそれぞれ、

$$-\lambda_i v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) + q^{\top} \left(D\tau \left(\sum_{i=1}^I x_i + p \right) - I_L \right) = 0$$
 (6.16)

$$\sum_{i=1}^{I} v_i^{\top} + q^{\top} D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) = 0$$
 (6.17)

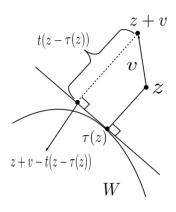


図 6.39

である. 式 (6.16) に右から v_i をかけ、さらに i について和をとると、

$$\sum_{i=1}^{I} \left(-\lambda_i v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v_i \right) + q^{\top} \left(D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) - I_L \right) \left(\sum_{i=1}^{I} v_i \right) = 0$$
 (6.18)

である. ここで式 (6.17) より,

$$q^{\top} \left(D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) - I_L \right) \left(\sum_{i=1}^{I} v_i \right) = q^{\top} \left(D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) - I_L \right) \left(-D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right)^{\top} q \right)$$

$$= q^{\top} \left(D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right)^{\top} - D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right)^{\top} \right) q$$

である. 補題 6.15.8 より $D\tau(z)$ は対称で全ての固有値は [0,1] に属する. よって,

$$D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p\right)^{\top} - D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p\right) D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p\right) = D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p\right) - D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p\right)^2$$

でありこれは正値半定符号である. したがって,式 (6.18) より,任意のiに対して

$$v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v_i = 0$$
$$q^{\top} \left(D\tau \left(\sum_{i=1}^I x_i + p \right) - I_L \right) \left(\sum_{i=1}^I v_i \right) = 0$$

が成立する. よって、任意のiに対して $v_i=0$ が成立する. このことにより、式(6.16)と式(6.17)より、

$$q^{\top} \left(D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) - I_L \right) = 0$$
$$q^{\top} D\tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i + p \right) = 0$$

であるので、 $q^{\top} = 0$ が成立する.

また、各消費者の需要関数の連続可微分性(よって総需要関数の連続可微分性)を示すには、 α_i が連続可微分であることを仮定して LI+L 個の未知数 $(\cdots,x_i,\cdots,\cdots,\lambda_i,\cdots)$ の方程式体系

$$\begin{cases}
 \vdots \\
 p - \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top = 0 \\
 \vdots \\
 \frac{1}{\lambda_i} (p \cdot x_i - \alpha_i(p)) = 0 \\
 \vdots
\end{cases}$$
(6.19)

///

のヤコビ行列が可逆であることを示せばよい.

6.15.10 命題 式 (6.19) の方程式体系から得られるヤコビ行列は可逆である.

命題 6.15.10 の証明 式 (6.19) のヤコビ行列を求めると,

である. ここで方程式の等号条件を代入すると.

である. この行列の左から

$$(\underbrace{\cdots v_i^{\top}}_{LI}\underbrace{\cdots \mu_i \cdots}_{I})$$

をかけると、この積のLI列目までとLI+1列目以降はそれぞれ、任意のiについて、

$$-\lambda_i v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) - \mu_i \nabla u_i(x_i) = 0$$
(6.20)

$$-v_i^{\mathsf{T}} \nabla u_i(x_i)^{\mathsf{T}} = 0 \tag{6.21}$$

である. 式 (6.21) はつまり,

$$\nabla u_i(x_i)v_i = 0 \tag{6.22}$$

である. 式 (6.20) の右から v_i をかけると,

$$\lambda_i v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v_i - \mu_i \nabla u_i(x_i) v_i = 0$$

であるので, 式(6.22)より,

$$v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v_i = 0$$

が成立する.式 (6.22) があるので, u_i の準凹性より任意の i について $v_i=0$ が成立する.さらに,式 (6.20) より任意の i について $\mu_i=0$ が成立する. ///

しかし、 α_i の 1 次同次性を仮定すると、両方を合わせた $(\cdots, x_i, \cdots, \cdots, \lambda_i, \cdots, p)$ の方程式体系

$$\begin{cases} p - \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_i} (p \cdot x_i - \alpha_i(p)) = 0 \\ \vdots \\ \tau \left(\sum_{i=1}^I x_i + p \right) - \sum_{i=1}^I x_i = 0 \end{cases}$$

の $(LI+I+L) \times (LI+I+L)$ のヤコビ行列は可逆ではない(詳しく考えよ). よってこのヤコビ行列のランクは LI+I+L-1 以下である. LI+I+L-2 以下のこともあるが,ランクが LI+I+L-1 に等しいとき,その均衡は正則であるという.

最後に根岸アプローチにおける超過需要について述べる。第i 消費者の需要関数を $x_i(p,w_i)$ とし、第i 消費者の富水準を α_i とする。また、 $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i(p) = \alpha(p) = \sup\{p \cdot x \mid x \in W\}$ とする。このとき、

$$z(p) = \tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i(p, \alpha_i(p) + p) \right) - \sum_{i=1}^{I} x_i(p, \alpha_i(p))$$

と定義すると, p が均衡価格であることと z(p) = 0 は同値である. また,

$$p \cdot \tau \left(\sum_{i=1}^{I} x_i(p, \alpha_i(p) + p) \right) \le \alpha(p)$$

であるので,

$$p \cdot z(p) \le \alpha(p) - \sum_{i=1}^{I} \alpha_i(p) = 0$$

である. よって、関数 $p \to p \cdot z(p)$ は均衡価格 p で最大値を達成する. したがって、均衡価格 p においては $\nabla(p \cdot z(p)) = 0$ である. すなわち、均衡価格 p において $z(p)^\top + p^\top Dz(p) = 0$ であるので、均衡価格 p において $p^\top Dz(p) = 0$ が成立する.

6.15.3 パレート効率的配分の集合の構造

パレート効率的配分の集合は、(I-1) 次元の多様体であることが証明できる.この次元は財の数 L に依存しないことに注意せよ.

パレート効率的配分の集合の性質を明らかにすることが目的であるが、パレート効率的配分の集合の性質は無差別曲線(選好関係)だけで決まるはずである。そこで以下では、すべての i と x_i について $\nabla^2 u_i(x_i)$ は $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^{\perp}$ 上で負値定符号であることを仮定する。

さらに、この集合は、効用水準のベクトル $(u_i(x_i))_i$ でパラメータ付けられ(LI 次元の配分の集合を考えるときに、I 次元のベクトルで考えられるということ).

配分 $x=(x_i)_i$ がパレート効率的であるということは、ある $(\lambda,p)\in \mathbf{R}_{++}^I \times \mathbf{R}_{++}^L$ が存在して、方程式体系

$$\left\{
\begin{array}{c}
\vdots \\
p - \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top = 0 \\
\vdots \\
\bar{\omega} - \sum_i x_i = 0
\end{array}
\right\} L \times I 本$$

$$\frac{1}{2}(\|p\|^2 - 1) = 0 \qquad (価格ベクトルの正規化)$$
(6.23)

が満たされるということと同値である.

6.15.11 命題 集合

$$M = \{(x, \lambda, p) \mid (x, \lambda, p) \text{ は (6.23) を満たす } \}$$

はI-1次元の多様体である.

命題 6.15.11 の証明 方程式体系 (6.23) の左辺を (x,λ,p) の写像と見るとき、これは、

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & -\lambda_i \nabla^2 u_i(x_i) & & & & & -\nabla u_i(x_i)^\top & & & I_L \\ O & & \ddots & & & & & \ddots & \vdots \\ \hline \cdots & & -I_L & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & p^\top \end{bmatrix}$$

である.この階数は LI+L+1 であり,方程式体系(6.23)の式の本数は LI+L+1 で,未知数は LI+I+L 個だから,自由度はその差 I-1 である.行ベクトルが 1 次独立であることを示そう.ヤコビ 行列の左側から $(\cdots,\underbrace{v_i^\top}_{\in \mathbf{R}^L},\cdots,\underbrace{q^\top}_{\in \mathbf{R}^L},\underbrace{\alpha}_{\in \mathbf{R}})$ をかけて 0 とおくと, $v_i=0$,q=0, $\alpha=0$ が成り立つことを示

せば十分である. x_i の列, λ_i の列, p の列に関する積は順に,

$$-\lambda_i v_i^\top \nabla^2 u_i(x_i) - q^\top = 0, \tag{6.24}$$

$$-v_i^{\mathsf{T}} \nabla u_i(x_i)^{\mathsf{T}} = 0, \tag{6.25}$$

$$\sum_{i=1}^{I} v_i^{\top} + \alpha p^{\top} = 0 \tag{6.26}$$

である. まず (6.25) と $p = \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top$ より、 $v_i \cdot p = 0$. (6.26) の右側から p をかけると、

$$\sum_{i=1}^{I} v_i^{\top} p + \alpha \cdot 1 = 0.$$

よって, $\alpha = 0$ が従う. よって (6.26) より

$$\sum_{i=1}^{I} v_i = 0. (6.27)$$

(6.24) の右側から $-v_i$ をかけて, i = 1, ..., I にわたる合計をとると,

$$\sum_{i=1}^{I} \left(\lambda_i v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v_i \right) + \sum_{i=1}^{I} \left(q^{\top} v_i \right) = 0$$

だが, (6.27) によって左辺第2項は0であるから, 結局,

$$\sum_{i=1}^{I} \left(\lambda_i v_i^{\top} \nabla^2 u_i(x_i) v_i \right) = 0$$

である.ここで $\lambda_i>0$ であり $\nabla^2 u_i(x_i)$ は $\langle \nabla u_i(x_i) \rangle^\perp$ 上負値定符号であった.そして (6.25) より v_i は $\nabla u_i(x_i)$ と直交するから,結局,すべての i について $v_i^\top \nabla^2 u_i(x) v_i \geq 0$.よって $v_i=0$ が従う.最後に (6.24) に戻って q=0 である. ///

 $(x,\lambda,p)\in M$ は,x さえわかれば (λ,p) はただひとつに特定できる.なぜならば, $p-\lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top=0$ だから $\|p\|=1$ ゆえ $\lambda_i=1/\|\nabla u_i(x_i)\|$ であり,また $p=(1/\|\nabla u_1(x_1)\|)\nabla u_1(x_1)^\top$ である(これは第1消費者でなくてもよい).これを以下に命題としてまとめる.

6.15.12 命題 $\{x \mid \text{ある}(\lambda, p) \text{ が存在して}(x, \lambda, p) \in M\}$ もまた I - 1 次元の多様体である.

次に、効用フロンティアを特徴づけよう. $(x,\lambda,p)\in M$ を 1 つとってくると、パレート効率的配分 $x=(x_i)_i$ から効用水準のプロファイル $(u_i(x_i))_i$ が定まる. x を動かしたときの $(u_i(x_i))_i$ の軌跡が効用フ ロンティアに一致する. この写像のヤコビ行列を使ってフロンティアを線形近似しよう.

6.15.13 命題 $(x,\lambda,p)\in M$ とする. $(u_1,\ldots,u_I):\mathbf{R}_{++}^{LI}\to\mathbf{R}^I$ の微分(ヤコビ行列)を、M の (x,λ,p) における接空間 $T_{(x,\lambda,v)}M$ に制限したものの値域は $\langle \lambda \rangle^{\perp}$ に一致する.

命題 **6.15.13** の略証 方程式体系 (6.23) の左辺を $\varphi(x,\lambda,p)$ で表すと,

$$T_{(x,\lambda,p)}M = \operatorname{Ker} D\varphi(x,\lambda,p)$$

である.

また,
$$\sum_i v_i = 0$$
 より $p \cdot \sum_i v_i = 0$ である.
$$\begin{bmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ \mu \\ q \end{bmatrix} \in T_{(x,\lambda,p)} M$$
 とすると, $D\varphi(x,\lambda,p)$ $\begin{bmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ \mu \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. これより $\sum_{i=1}^I \lambda_i \nabla u_i(x_i) v_i = 0$ が示される.よって値域が $\langle \lambda \rangle^\perp$ の部分集合であることがわかる.

逆の包含関係を示すには、 $\langle \lambda \rangle^{\perp}$ の任意の点が、適当な v_i を選ぶことで達成されるということを示 さなければならない。それには制約されたヤコビ行列の階数が I-1 であって全単射であることを 示す $(T_{(x,\lambda_n)}M$ の次元は I-1 であった). 任意の $(v_1,\ldots,v_I,\mu,q)\in \mathbf{R}^{LI}\times\mathbf{R}^I\times\mathbf{R}^L$ に対して, $D\varphi(x,\lambda,p)(v_1,\ldots,v_I,\mu,q)=0$ かつ, 任意の i に対して $\nabla u_i(x_i)v_i=0$ ならば, $v_1=\cdots=v_I=\mu=q=0$ を示せばよい. ///

6.15.4 2 つの指数の定義の関係

ワルラス均衡を1つ定めるということは、方程式体

$$\begin{cases}
p - \lambda_i \nabla u_i(x_i) = 0, & \forall i, \\
\frac{1}{\lambda_i} p \cdot (x_i - \omega_i) = 0, & \forall i, \\
\bar{\omega} - \sum_i x_i = 0
\end{cases}$$
(6.28)

を解くということである。超過需要zによる前述のアプローチは、この3式のうち上の2式を解き、それか ら第3式を満たすものを求めるということに等しい、一方で、いま述べている w のほうは、まず第1式と 第3式を解いてから、第2式を求めているのである.

ひとつの均衡に対し、zによる指数とwによる指数を定義したが、この2つは常に一致するということを これから見る. ただし, 実際の行列式の値は異なりうる.

ワルラス均衡 $(x,\lambda,p)\in \mathbf{R}_{++}^{LI} imes\mathbf{R}_{++}^{I} imes\mathbf{R}_{++}^{L}$ は,効用最大化・予算制約式・実行可能性を表す方程式体 系の解として特徴づけられる. そこで方程式体系 (6.28) の左辺を順に

$$\varphi_{1i}(x,\lambda,p) = p - \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top,$$

$$\varphi_{2i}(x,\lambda,p) = \frac{1}{\lambda_i} p \cdot (x_i - \omega_i),$$

$$\varphi_{3i}(x,\lambda,p) = \bar{\omega} - \sum_{i=1}^{I} x_i$$

と書こう. さらに

$$\varphi_1(x,\lambda,p) = (\varphi_{1i}(x,\lambda,p))_{i=1,\dots,I} \in \mathbf{R}^{LI},$$

$$\varphi_2(x,\lambda,p) = (\varphi_{2i}(x,\lambda,p))_{i=1,\dots,I} \in \mathbf{R}^I$$

とまとめて書き、これらを縦に並べて

$$\varphi(x,\lambda,p) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x,\lambda,p) \\ \varphi_2(x,\lambda,p) \\ \varphi_3(x,\lambda,p) \end{bmatrix}$$

と書く. すると (x,λ,p) がワルラス均衡であることと $\varphi(x,\lambda,p)=0$ が成立することは同値である.

6.15.14 命題 $\varphi(x,\lambda,p)=0$ ならば、index $p=index\lambda$

以下はその証明. この関数 φ のヤコビ行列 $D\varphi(x,\lambda,p)$ は,(LI+I+L) 次正方行列で,まず直接微分を施すと

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & O & \ddots & & & 0 & \vdots \\ & -\lambda_i \nabla^2 u_i(x_i) & & & & -\nabla u_i(x_i)^\top & & I_L \\ O & & \ddots & & 0 & & \ddots & \vdots \\ & \ddots & & & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & \frac{1}{\lambda_i} p^\top & & & -\frac{1}{\lambda_i^2} p \cdot (x_i - \omega_i) & & \frac{1}{\lambda_i} (x_i - \omega_i)^\top \\ 0 & & \ddots & 0 & & \ddots & \vdots \\ \hline \cdots & & -I_L & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & O \end{bmatrix}$$

に一致する. そして均衡条件は,

$$\varphi_{1i}(x,\lambda,p) = 0$$
 より $\frac{1}{\lambda_i} p^{\top} = \nabla u_i(x_i),$

$$\varphi_{2i}(x,\lambda,p) = 0$$
 より $-\frac{1}{\lambda_i^2} p \cdot (x_i - \omega_i) = 0$

なので,これは,

に等しい(右列中央ブロックの $(1/\lambda_i)(x_i-\omega_i)^{\top}$ は一般に 0 ではなく,0 であるのはいわゆる non-trade equilibrium である).

この各ブロックを

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ \hline -B^{\top} & O & D \\ \hline -C^{\top} & O & O \end{bmatrix}$$

と書き、さらにこの行列全体を E と書く、各ブロックの性質は以下の通り:

6.15.15 補題 E の最終行,列を除いて得られる行列を \hat{E} ,第 (LI+I) 行列を除いて得られる行列を \check{E} と 書くと, $indexp = sgn \det \hat{E} = sgn \det \check{E} = index \lambda$ が成立する.

- A はヘッセ行列を対角線上に並べたものだから対称で、 $\nabla^2 u_i(x_i)$ が負値定符号より $-\lambda_i \nabla^2 u_i(x_i)$ は 正値定符号,したがって A も正値定符号である.
- B はサイズ $LI \times I$ で、各列ベクトルは各成分が正より 1 次独立だから、rank B = I.
- C はサイズ $LI \times L$ で、I 行ごとに同一の単位行列 I_L を並べた形だから rank C = L.

6.15.16 命題 $\operatorname{rank} E < LI + I + L$, すなわち $\det E = 0$.

命題 6.15.16 の証明

$$E \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が成立する. 実際,

$$\left\{ \begin{array}{l} p - \lambda_i \nabla u_i(x_i)^\top = 0 \ \&\ \emptyset \ , \quad A0 + B\lambda + Cp = \left(-\lambda \nabla u_i(x_i)^\top + p\right)_i = 0, \\ \frac{1}{\lambda_i} p \cdot (x_i - \omega_i) = 0 \ \&\ \emptyset \ , \quad -B^\top 0 + O\lambda + Dp = \left(\frac{1}{\lambda_i} (x_i - \omega_i)^\top p\right)_i = 0, \\ -C^\top 0 + O\lambda + Op = 0 \end{array} \right.$$

///

である. したがって, $\operatorname{rank} E < LI + I + L$ である.

6.15.17 注意 実は $(0,\lambda^\top,p^\top)E=(0,0,0)$ も成立する.それゆえ E は $\left\langle \begin{bmatrix} 0\\\lambda\\p \end{bmatrix} \right\rangle^\perp$ 上で定義された線形変換とみなせる.

いよいよ本題に戻って,z の定義による D(-z)(p) と,w の定義による $Dw(\lambda)$ とから定まる指数が一致 することを見るために,陰関数定理を用いて D(-z)(p) と $Dw(\lambda)$ を A,B,C,D で表そう.

すでに見たように、z による定義では、最初に p を固定して個々人のレベルで効用最大化と予算制約式から z(p) を導出し、それから p を動かすことで実行可能性をあわせて解く、すなわち、任意の $p \in \mathbf{R}_{++}^L$ に対してまず

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda,p) = 0, \\ \varphi_2(x,\lambda,p) = 0 \end{cases}$$

を解く (x,λ) を求め、それを $f(p)=(f_x(p),f_\lambda(p))$ と書く(添字は偏微分でなく x 成分、 λ 成分という意味).次にこれを φ_3 に代入した

$$-z(p) = \varphi_3(f(p), p) = 0$$

を p に関して解くことで、最終的に方程式体系全体 $\varphi(x,\lambda,p)=0$ を解いた.

また、w による定義では、最初に (予算制約を満たしているとは限らない) 効用最大化と実行可能性の条件から $w(\lambda)$ を導出し、それから λ を動かすことで予算制約式をあわせて解く.すなわち、まず任意の $\lambda \in \mathbf{R}_{++}^I$ に対し

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda,p) = 0, \\ \varphi_3(x,\lambda,p) = 0 \end{cases}$$

を解き、その解 (x,p) を $g(\lambda) = (g_x(\lambda), g_p(\lambda))$ と書く、次にこれを φ_2 に代入した

$$w(\lambda) = \varphi_2(g_x(\lambda), \lambda, g_p(\lambda)) = 0$$

を λ に関して解けば、当初の $\varphi(x,\lambda,p)=0$ を解くことになる。 陰関数定理により、

$$Df(p) = -\left(D_{(x,\lambda)} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} (f(p), p)\right)^{-1} D_p \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} (f(p), p)$$

である.よって,連鎖律より,

$$\begin{split} D(-z)(p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \varphi_3(f(p),p) = D_{(x,\lambda)} \varphi_3(f(p),p) Df(p) + D_p \varphi_3(f(p),p) \\ &= -D_{(x,\lambda)} \varphi_3(f(p),p) \left(D_{(x,\lambda)} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} (f(p),p) \right)^{-1} D_p \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} (f(p),p) + D_p \varphi_3(f(p),p) \\ &= - \begin{bmatrix} -C^\top & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B^\top & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} + O \\ &= \begin{bmatrix} C^\top & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B^\top & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \end{split}$$

とわかる. なお,逆行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ -B^\top & O \end{bmatrix}^{-1}$ が実際に存在することは,ブロック行列 A が正値定符号であることと, $\operatorname{rank} B = I$ から従う.

他方, やはり陰関数定理により。

$$Dg(\lambda) = -\left(D_{(x,p)} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} (g_x(\lambda), \lambda, g_p(\lambda))\right)^{-1} D_{\lambda} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} (g_x(\lambda), \lambda, g_p(\lambda))$$

で, その全微分は,

$$\begin{split} Dw(\lambda) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \varphi_2(g_x(\lambda), \lambda, g_p(\lambda)) \\ &= -D_{(x,p)} \varphi_2(g_x(\lambda), \lambda, g_p(\lambda)) \left(D_{(x,p)} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} (g_x(\lambda), \lambda, g_p(\lambda)) \right)^{-1} D_\lambda \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} (g_x(\lambda), \lambda, g_p(\lambda)) \\ &+ D_\lambda \varphi_2(g_x(\lambda), \lambda, g_p(\lambda)) \\ &= - \begin{bmatrix} -B^\top & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ -C^\top & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} + O \\ &= \begin{bmatrix} B^\top & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ -C^\top & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} \end{split}$$

である。逆行列 $\begin{bmatrix} A & C \\ -C^{\top} & O \end{bmatrix}^{-1}$ が存在することは,同じく A が正値定符号であることと,rank C=L による.

6.15.18 補題 一般の行列 $A(N \times N, \overline{y})$, $E(N \times K)$, $F(K \times N)$, $G(K \times K)$ について,

$$\begin{bmatrix} A & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N & O \\ FA^{-1} & I_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & G - FA^{-1}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N & A^{-1}E \\ O & I_K \end{bmatrix}.$$

よって特に、

$$\det \begin{bmatrix} A & E \\ F & G \end{bmatrix} = \det A \times \det(G - FA^{-1}E)$$

である. したがって $\begin{bmatrix} A & E \\ F & G \end{bmatrix}$ が可逆であることと $G - FA^{-1}E$ も可逆であることは同値.

証明は容易なので省略する.

この命題により,これまでのブロック行列 A について, $\begin{bmatrix} A & B \\ -B^\top & O \end{bmatrix}$ は可逆である.なぜならば,

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ -B^\top & O \end{bmatrix} = \det A \times \det(B^\top A^{-1} B)$$

であって,A が正値定符号より A^{-1} も正値定符号であり,B の各列は 1 次独立だから $B^{\top}A^{-1}B$ も正値定符号,よって $\det(B^{\top}A^{-1}B)>0$. 同様にして, $\det\begin{bmatrix}A&C\\-C^{\top}&O\end{bmatrix}>0$ である.

6.15.19 補題 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ (ただし $S_{11} \in \mathbf{R}^{(N-1) \times (N-1)}$), $v = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ v_N \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^N$ ($\hat{v} \in \mathbf{R}^{N-1}$, $v_N \neq 0$); Sv = 0 とする. さらに,

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} I_{N-1} & 0 \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} I_{N-1} \\ -v_N^{-1} \hat{v}^{\top} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(N-1)\times(N-1)}$$

$$N \times (N-1)$$

と定義する. このとき, $\operatorname{sgn}(\det \hat{S}) = \operatorname{sgn}(\det S_{11})$ が成り立つ.

補題 6.15.19 の略証 簡単な計算により

$$\hat{S} = S_{11} \left(I_{N-1} + v_N^{-2} \hat{v} \hat{v}^{\top} \right)$$

が示される. このとき

$$\det \hat{S} = \det S_{11} \times \det \left(I_{N-1} + v_N^{-2} \hat{v} \hat{v}^{\top} \right)$$

であるが, I_{N-1} は正値定符号, $(1/v_N^2)\hat{v}^{\top}$ は正値半定符号なので,それらの和は正値定符号で,その行列式は正である.よって $\det \hat{S}$ と $\det S_{11}$ の符号は一致する. ///

この補題の解釈を考えよう. N 項ベクトル v $(v_N \neq 0)$ が与えられたとき,直交補空間 $\langle v \rangle^{\perp}$ 上のベクトルは,直交性によって最初の (N-1) 成分だけで決まる. 実際, $t=(t_1,\ldots,t_{N-1},t_N)^{\top} \in \langle v \rangle^{\perp}$ は, $v \cdot t=0$ すなわち $\sum v_i t_i = 0$ によって, $t_N = v_N^{-1} \hat{v} \cdot \hat{t}$ である $(\hat{t} := (t_1,\ldots,t_{N-1})^{\top})$.

それゆえ,補題の
$$\hat{S}$$
 の表式のうち,最初に作用する右端の $N \times (N-1)$ 行列 $\begin{bmatrix} I_{N-1} \\ -v_N^{-1} \hat{v}^{\top} \end{bmatrix}$ は, $\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{N-1} \end{bmatrix}$ を

超平面 $\langle v \rangle^\perp$ 上に写す変換である. よって \hat{S} はこのベクトルをさらに S によって変換し,その結果 N 次元ベクトルの第 N 項を落とすという操作を表す行列である. 補題の主張は,その行列式の符号が S の符号と一致することである.

$$D(-z)(p) = \begin{bmatrix} C^{\top} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B^{\top} & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$$
 の最後の 1 行 1 列を取り除くとは, $\begin{bmatrix} C^{\top} & O \end{bmatrix}$ の下端の 1 行

と, $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ の右端の 1 列を切ることに等しい.そこで次の記法を導入しよう:

$$\underset{LI\times L}{C} = \big[\underset{LI\times (L-1)}{\hat{C}} \big| \underset{LI\times 1}{*} \big], \quad \underset{I\times L}{D} = \big[\underset{I\times (L-1)}{\hat{D}} \big| \underset{I\times 1}{*} \big].$$

こうすれば、所望の D(-z)(p) の左上 $(L-1) \times (L-1)$ 小行列は、

$$\begin{bmatrix} \hat{C}^\top & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B^\top & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix}$$

である.

同様に.

$$\underset{LI\times I}{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} & * \\ LI\times (I-1) & LI\times 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{I\times L}{D} = \begin{bmatrix} \check{D} \\ * \end{bmatrix} \overset{((I-1)\times L)}{(1\times L)}$$

と書くと、 $Dw(\lambda)$ の左上 $(I-1) \times (I-1)$ 行列は、

$$\begin{bmatrix} \hat{B}^\top & -\check{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ -C^\top & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{B} \\ O \end{bmatrix}$$

である.

よって補題 6.15.19 を $Dz(p) \in \mathbf{R}^{L \times L}$ と $Dw(\lambda) \in \mathbf{R}^{L \times L}$ に適用すれば,p の指数と λ の指数が一致することを示すには以下の等式を示せば十分である:

$$\mathrm{index} p = \mathrm{sgn} \left(\det \left(\begin{bmatrix} \hat{C}^\top & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B^\top & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} \right) \right)$$

かつ

$$\mathrm{index} \lambda = \mathrm{sgn} \left(\det \left(\begin{bmatrix} \hat{B}^\top & -\check{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ -C^\top & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{B} \\ O \end{bmatrix} \right) \right).$$

が成立する. さらに,

$$E = \left[\begin{array}{ccc} A & B & C \\ -B^{\top} & O & D \\ -C^{\top} & O & O \end{array} \right]$$

からそれぞれ1行1列を抜いて次のように定義しよう:

$$\hat{E} = \left[\begin{array}{ccc} A & B & \hat{C} \\ -B^\top & O & \hat{D} \\ -\hat{C}^\top & O & O \end{array} \right], \quad \check{E} = \left[\begin{array}{ccc} A & \hat{B} & C \\ -\hat{B}^\top & O & \check{D} \\ -C^\top & O & O \end{array} \right].$$

$$\det \hat{E} = \underbrace{\det \begin{bmatrix} A & B \\ -B^{\top} & O \end{bmatrix}}_{>0} \det \left(\begin{bmatrix} \hat{C}^{\top} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B^{\top} & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} \right)$$

すなわち、 $\operatorname{sgn}(\det \hat{E}) = \operatorname{index} p$ かつ、 $\operatorname{sgn}(\det \check{E}) = \operatorname{index} \lambda$ が成立する. したがって、 $\operatorname{sgn}(\det \hat{E}) = \operatorname{sgn}(\det \check{E})$ を示せば十分である.

もし正則均衡でないケース,すなわち $\operatorname{rank} E \leq LI + L + I - 2$ ならば, $\operatorname{rank} \hat{E}$, $\operatorname{rank} \hat{E}$ もこれ以下であり, \hat{E} , \hat{E} の次数は LI + L + I - 1 なのだから, $\det \hat{E} = \det \check{E} = 0$ で符号は一致する.

そこで、 $\operatorname{rank} E = LI + L + I - 1$ と仮定しよう. 以下の補題を使う.

6.15.20 補題 $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$, rank S = N - 1; $v, w \in \mathbb{R}^N$; Sv = 0, $v^{\top}S = 0$, $v \cdot w \neq 0$ とする. このとき,

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} S & w \\ w^\top & 0 \end{bmatrix} = N + 1.$$

この補題は、Sをカーネルに属さないwで縁取りすると、次元が一気に2上がることを意味する.

補題 **6.15.20** の証明 問題の (N+1) 次行列の各行が 1 次独立であることを示せばよい. $x \in \mathbf{R}^N, y \in \mathbf{R}$ とし,

$$\begin{bmatrix} S & w \\ w^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx + yw \\ w \cdot x \end{bmatrix} = 0$$

とする. Sx = -yw より $v \cdot Sx = (v^\top S)x = 0$ であり,よって $-y(v \cdot w) = 0$. $v \cdot w \neq 0$ だから y = 0 である.よって Sx = 0 なので,ある実数 $\alpha \in \mathbf{R}$ があって $x = \alpha v$ であり, $0 = w \cdot x = \alpha w \cdot v$ より $\alpha = 0$ であるから,x = 0 が従う. ///

6.15.21 系 S,v は補題 6.15.20 のとおりで、 $w_1 \in \mathbf{R}^N, w_2 \in \mathbf{R}^N$ は次の条件を満たすとする:任意の $t \in [0,1]$ に対し、

$$v \cdot (tw_1 + (1-t)w_2) \neq 0.$$

このとき.

$$\operatorname{sgn}\left(\det\begin{bmatrix} S & w_1 \\ w_1^\top & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{sgn}\left(\det\begin{bmatrix} S & w_2 \\ w_2^\top & 0 \end{bmatrix}\right).$$

系 6.15.21 の証明 任意の $t \in [0,1]$ に対し、補題 6.15.20 により行列

$$\begin{bmatrix} S & tw_1 + (1-t)w_2 \\ (tw_1 + (1-t)w_2)^\top & 0 \end{bmatrix}$$

の rank は N+1 だから,その行列式は 0 でない.その行列式は t の連続関数なので,0 でないならば常に正であるか常に負であるかである.よって t=0 と t=1 のときの行列式の符号は一致する. ///

$$S=E,\,v=egin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ p \end{bmatrix}$$
とすると, $Sv=0,\,v^{\top}S=0$ が成立することは既に見た(命題 $6.15.16,$ 注意 $6.15.17$).

w としては \hat{E} と \check{E} のため2つとる必要がある.

 $w_1 \in \mathbf{R}^{LI+I+L}, w_2 \in \mathbf{R}^{LI+I+L}$ として、 w_1 は第 (LI+I+L) 項が 1 の単位ベクトル、 w_2 は第 (LI+I) 項が 1 の単位ベクトルをとる。すると余因子展開より、

$$\det \begin{bmatrix} S & w_1 \\ w_1^\top & 0 \end{bmatrix} = -\det \hat{E}, \quad \det \begin{bmatrix} S & w_2 \\ w_2^\top & 0 \end{bmatrix} = -\det \check{E}$$

である (k=1,2 いずれに対しても,まず最右列 $\begin{bmatrix} w_k \\ 0 \end{bmatrix}$ について,それから最下行 $w_k^{ op}$ によって余因子展開

また、
$$\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} tw_1 + (1-t)w_2 \end{bmatrix} = t\lambda_I + (1-t)p_L > 0$$
 なので、系 $6.15.21$ により、

$$\operatorname{sgn}\left(\det\begin{bmatrix} S & w_1 \\ w_1^\top & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{sgn}\left(\det\begin{bmatrix} S & w_2 \\ w_2^\top & 0 \end{bmatrix}\right).$$

が得られる. よって,

$$\operatorname{sgn}(\det \hat{E}) = \operatorname{sgn}(\det \check{E})$$

が得られる. これで $indexp = index\lambda$ が示された.

最後に transfer paradox について一言しておこう. index p=-1 という状況は何かというと,これは需要法則 (law of demand) の逆で,価格が上がると需要が上がるという状況である.指数定理によれば,たとえば 3 個の正則均衡があるときには 1 つは(1 つだけが)そういう均衡であることがわかる.さらに,これまでに見てきた 2 通りの指数の一致ということから,これは index $\lambda=-1$ と同値である.

このとき I=2 ならば、これは λ_1 が上昇すると w_1 は低下する。 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ をワルラス均衡とする。 $\lambda'=(\lambda_1',\lambda_2')$ が $\lambda_1'>\lambda_1$ 、 $\lambda_2'<\lambda_2$ のとき、 $p(\lambda')\cdot(x_1(\lambda')-\omega_1)<0$ が成り立つ。

そこでこれを、 $\omega_1' \ll \omega_1$ のような ω の移転で均衡にすることを考える。まず、 $\partial u_1(x_1(\lambda))/\partial \lambda_i = \sum_{l=1}^L (\partial u_1/\partial x_1^l)(\partial x_1^l/\partial \lambda_i)$ である。 $p(\lambda') \cdot (x_i(\lambda') - \omega_i') = 0$ が成立するように (ω_1', ω_2') を選ぶと、新しい (ω_1', ω_2') からの均衡が $u_1(x_1(\lambda')) > u_1(x_1(\lambda))$ となってしまう、すなわちすべての初期保有を減らしたにもかかわらず均衡での効用が上がるというのが transfer paradox である。Balasko (2013) によれば、均衡において transfer paradox が生じる必要十分条件が index $\lambda = -1$ である。

6.16 正則均衡の一般的分析

6.16.1 一般的分析

S を正の整数とし,Q を \mathbf{R}^S の開部分集合とする.この小節では, $q \in Q$ でパラメータ付けされた純粋交換経済を論じよう.この経済における超過需要関数を $z(\cdot,q):\mathbf{R}_{++}^L \to \mathbf{R}^L$ と書くことにして,パラメータ付けされた超過需要関数 (parameterized excess demand function) を $z:\mathbf{R}_{++}^L \times Q \to \mathbf{R}^L$ と定義しよう.つまり,超過需要関数 z の定義域をパラメータ空間 Q を含むように拡張したのである.

6.16.1 例 すべての消費者の選好関係 \succsim_i $(i=1,\ldots,I)$ と第 1 消費者を除くすべての消費者の初期保有量 ω_i $(i=2,\ldots,I)$ が与えられているとする.このとき,この(純粋交換)経済は,第 1 消費者の初期保有量 $\omega_1 \in \pmb{R}_{++}^L$ によってパラメータ付けされていることになる.つまり,パラメータ空間 Q は \pmb{R}_{++}^L に等しい.

6.16.2 例 第 1 消費者を除くすべての消費者の選好関係 \succsim_i $(i=2,\ldots,I)$ とすべての消費者の初期保有量 ω_i $(i=1,\ldots,I)$ が与えられているとする。今,第 1 消費者の選好関係 \succsim_1 がコブダグラス型効用関数 $u_1(x_1)=x_{11}^ax_{21}^{1-a}$ (ただし, $x_1=(x_{11},x_{21})$, $a\in(0,1)$ とする)で表現されているとする。このとき,パラメータ空間 Q は開区間 (0,1) に等しい。

6.16.3 定義 パラメータ空間 Q によるパラメータ付けが正則 (regular) であるとは、次の条件が満たされる ときをいう。パラメータ付けされた超過需要関数が連続微分可能であり、さらに任意の $(p,q) \in \mathbf{R}_{++}^L \times Q$ に関して、p がパラメータ q の下でワルラス均衡価格ベクトルであるときに $\mathrm{rank}\, Dz(p,q) = L-1$ が成り立つ。

 $Dz(p,q) = [D_p z(p,q) \ D_q z(p,q)]$ だから、パラメータ空間 Q によるパラメータ付けの正則性は任意のパラメータ $q \in Q$ に関する純粋交換経済の正則性よりも弱い条件である。例 6.16.1 と例 6.16.2 はともに正則なパラメータ付けであることが示すことができる。ぜひ確認してみてほしい。

練習問題 6.16.1 2 財よりなる純粋交換経済のパラメータ付けられた経済の超過需要関数を考えよう. パラメータの集合は単位区間 (0,1) であり, $q\in(0,1)$ は,第 1 消費者のコブ・ダグラス効用関数

$$u_1(x_1) = (x_1^1)^{1-q} (x_1^2)^q$$

を定めるものとする. ただしここで, $x_1=(x_1^1,x_1^2)\in \mathbf{R}_+^2$ である (第 1 消費者の初期保有量と他の消費者の効用関数と初期保有量は, いずれも q に依存しない). このパラメータ付けが正則であることを証明せよ.

任意のパラメータ空間 Q に対して,Q のほとんどすべての純粋交換経済についてある性質が成り立つとは,Q の開部分集合であって $Q\setminus Q'$ の測度がゼロであるような Q' が存在して,その性質が Q' 上の任意の純粋交換経済に関して成り立つことをいう*34.

次の定理は、パラメータ付けに関する正則性と経済に関する正則性の関係について述べた定理である.

 $^{*^{34}}$ 「ほとんどすべて」は測度論の概念である.これらについては解説しないが,きわめて直観的に述べれば「Q のほとんどすべて の経済である性質が成り立つ」とは Q からランダムにパラメータ q を選んだときに生成される経済では「普通」その性質が成り立つと考えて問題ない,という意味である.

6.16.4 定理 パラメータ空間 Q によるパラメータ付けが正則ならば,Q のほとんどすべての経済もまた正則である.

6.16.2 比較静学分析

パラメータ空間 Q とパラメータ付けされた超過需要関数 $z: \mathbf{R}_{++}^L \times Q \to \mathbf{R}^L$ が与えられているとする. 任意の $(\hat{p},q) \in \mathbf{R}_{++}^{L-1} \times Q$ に対して, $\hat{z}: \mathbf{R}_{++}^{L-1} \times Q \to \mathbf{R}^{L-1}$ を

$$\hat{z}(\hat{p},q) = (z_1((\hat{p},1),q),...,z_{L-1}((\hat{p},1),q))$$

と定義する. パラメータ q^* の下で, $(\hat{p}^*,1)$ がワルラス均衡価格ベクトルならば, $\operatorname{rank} D_{\hat{p}}\hat{z}\,(\hat{p}^*,q^*)=L-1$ が成立する. したがって,陰関数定理より,ある \mathbf{R}^{L-1} の開部分集合 V と Q の開部分集合 Q' と連続微分 写像 $p:V\to Q'$ が存在して, $(\hat{p}^*,q^*)\in V\times Q'$ が成立し,任意の $(\hat{p},q)\in V\times Q'$ に対して $(\hat{p},1)$ が q の 正則ワルラス均衡価格ベクトルであるとき,かつそのときに限り, $p(q)=\hat{p}$ が成り立つ.陰関数定理より, さらに

$$Dp(q^*) = -D_{\hat{p}}\hat{z} (\hat{p}^*, q^*)^{-1} D_q \hat{z} (\hat{p}^*, q^*)$$

が成立する.

参考文献

- [1] Balasko, Yves (2013). "The Transfer Problem: A complete characterization," *Theoretical Economics*.
- [2] Brown, Donald J. and Jan Werner (1995). "Arbitrage and Existence of Equilibrium in Infinite Asset Markets," *The Review of Economic Studies* **62**(1): 101–114.
- [3] Debreu, Gérard (1959). Theory of Value, John Wiley, and Sons.
- [4] Debreu, Gérard (1974). "Excess demand functions", Journal of Mathematical Economics 1: 15–21.
- [5] Hart, Oliver (1974). "On the Existence of Equilibrium in a Securities Model," *Journal of Economic Theory* 9: 293–311.
- [6] Kannai, Yokar, and Robert, Mantel (1978). "Non-Convexifiable Pareto Sets," *Econometrica* **46**: 571–75.
- [7] Kreps, David M. (2012). *Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets*. Princeton University Press.
- [8] Mantel, Rolf (1974). "On the characterization of aggregate excess demand", *Journal of Economic Theory* 7: 348–353.
- [9] Mas-Colell, Andreu (1985). The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach. Cambridge University Press.
- [10] Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
- [11] Sonnenschein, Hugo (1972). "Market Excess Demand Functions", Econometrica 40: 549–563.

第7章

非協力ゲームの理論

この章の内容は、展開形ゲームに関する節を除いて、MWG の第7章 A 節および第8章 A 節に相当する.

7.1 イントロダクション

一般均衡理論と比較すると、ゲーム理論の分析手法の特徴は以下の点である.

- 1. 各プレーヤーの行動や戦略(の変更)が他のプレーヤーの利得や効用にどのような影響を与えるかが明示されている.
- 2. 各プレーヤーの行動の順序や観察可能性が定式化で明記されている. これは特に非協力ゲーム理論の特徴であり,協力ゲーム理論は詳しく描写しない. 一般均衡理論でも取引の順番などは問題としなかった.
- 3. 各プレーヤーが均衡で他のプレーヤーの戦略(行動)に関していかなる予想をもつかを詳しく分析する.
- 4.「実際には起こらない」ことが仮に起こったとしたら、何が引き続き起こりうるかも分析する.

数学的に定式化する前に, 例を使って上述の点について見ていくことにする.

7.1.1 例 (複占) プレーヤーは企業 i=1,2 の 2 社とし、同質の財を生産する.それぞれの費用関数を C_i とする.市場の需要関数を D とする.各企業は生産量 q_i (≥ 0) を選ぶ.これが「行動」である.このとき、「均衡」においてはどのような q_1 と q_2 が選ばれるだろうか.

各企業が生産量を q_1 と q_2 にしたとき,市場価格は $D^{-1}(q_1+q_2)$ である.よって企業 i の利潤は $D^{-1}(q_1+q_2)q_i-C_i(q_i)$ である.企業 1 の利潤が企業 2 の行動(生産量)に依存し,逆も同様である.この点が上述の第 1 点にあたる.

1. q_1 と q_2 が同時に選ばれる場合を想定しよう. これはクールノー競争と呼ばれる. つまり,各企業は相手の生産量を実際に知る前に生産量を決めるとする. これは上述の第 2 点に関わる仮定である. 企業 1 を考える. 自社の利潤を最大にするように行動を選ぶのだから,最大化問題,

$$\max_{q_1} D^{-1}(q_1 + q_2^{e})q_1 - C_1(q_1)$$

の解がとるべき行動である.この式に登場している q_2^e は,実際に企業 2 が選ぶ生産量ではなく,企業 1 が予想している企業 2 の生産量である. q_1 と q_2 は同時に選ばれるのだから,企業 1 が q_1 を選ぶときは q_2 の値を知らず,「予想」を立てるだけである.

議論を簡単にするため、上の最大化問題の解が一意に存在すると仮定しよう. その解を,

$$q_1 = R_1(q_2^e)$$

と書くことにする(R は最適反応 best response を表す).同様に企業 2 は行動 $q_2=R_2(q_1^{\rm e})$ を選ぶ.「均衡」においては,両企業とも相手の予想に対しては最適に合理的に行動する,

$$q_1 = R_1(q_2^e), \quad q_2 = R_2(q_1^e)$$

ということと, その予想は正しい,

$$q_1 = q_1^e, \quad q_2 = q_2^e$$

ということを満たすこととする. これは「合理的期待」の仮定と呼ばれ、上述の第3点に関わる. これはまとめると.

$$q_1 = R_1(q_2), \quad q_2 = R_2(q_1)$$

が得られるが、こう書いたとき裏には合理的期待の仮定があることを忘れてはならない。また、 $q_1=R_1(R_2(q_1))$ が成立する。逆に、 $R_2(R_1(q_2))=q_2$ も成立する。

2. まず q_1 が選ばれ、企業 2 はこれを観察したうえで次に q_2 が選ばれる場合を考えよう. これはシュタッケルベルク競争と呼ばれる.

企業 2 は q_1 を観察しているので、とるべき生産量 q_2 は $R_2(q_1)$ に等しい。企業 1 はそれを見越して 利潤を最大化するので、この場合の最大化問題は、

$$\max_{q_1} D^{-1}(q_1 + R_2(q_1))q_1 - C_1(q_1)$$

である. この解である q_1 に対して一般には $q_1=R_1(R_2(q_1))$ は成立しない. 企業 1 が q_1 を選ぶとき, その変更が (企業 2 による) q_2 の選択に影響を及ぼすことを知っているからである.

今の最大化問題では R_2 と書いたが,実はここにも期待の要素がある.というのも,企業 2 が R_2 を使って (合理的に) 行動を選ぶというのは企業 1 による予想だから,これは実際には企業 2 の最適反応関数 R_2 そのものではなくて,予想される (最適) 反応関数 R_2^e であるべきだ.上の定式化では,相手の企業 2 が合理的に反応すると予想した上で,企業 1 は生産量を決めると想定している.相手が合理的であることを知っている(想定する)というこの仮定の重要性については後述する. この定式化では,企業 1 がどのような生産量 q_1 を選んだとしても,それに応じて企業 2 が選ぶ生産量 $q_2 = R_2(q_1)$ が定められている.この点が上述の第 4 点である.

7.2 正規形ゲーム

前述の状況を,一般性の高い数学的に定式化しよう. 正規形ゲーム (normal form game, game in normal form) は,次の3要素,

- 1. プレーヤー (主体) の集合 $\{1, 2, \dots, I\}$. これは有限とする.
- 2. 各プレーヤー i に対し、戦略 (行動) の集合 S_i .
- 3. 各プレーヤー i に対し、利得関数 $u_i: S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_I \to \mathbf{R}$.

で定義され,以上をまとめて,

$$\Gamma_N = (\{1, \dots, I\}, (S_i)_{i=1,\dots,I}, (u_i)_{i=1,\dots,I})$$

と書く. u_i は他のプレーヤーのとる行動に依存している. 以下では,

$$S = S_1 \times \cdots \times S_I,$$

 $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_I$

7.3 ナッシュ均衡 185

と書くことにする. またそれらに属する要素を,

$$s_i \in S_i, \quad s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_I) \in S_{-i},$$

$$s = (s_i, s_{-i}) = (s_1, \dots, s_I) \in S$$

と書く、厳密に言うと (s_i, s_{-i}) と (s_1, \ldots, s_I) とでは成分の順番が異なるので順序対としては異なるはずだが、ゲーム理論ではこのような表記をするということが多い。

7.2.1 例 (2 企業間の生産量競争) プレーヤーの数は I=2 で,各プレーヤーの戦略集合は $S_1=S_2=\mathbf{R}_+$ とする.利得関数はそれぞれ.

$$u_1(s_1, s_2) = D^{-1}(s_1 + s_2)s_1 - C_1(s_1),$$

 $u_2(s_1, s_2) = D^{-1}(s_1 + s_2)s_2 - C_2(s_2)$

とする.これは前節で見た 2 企業間の生産量競争のようだが,ここでは企業 2 のほうもひとつの生産量を選ぶという定式化になっている.クールノー競争はこうして表現できるが,シュタッケルベルク競争はこのようには表現できない.なぜならば,シュタッケルベルク競争における企業 2 の戦略とは,企業 1 の任意の行動 s_1 に対して,どの s_2 を企業 2 が選ぶかが特定されなければならないからである (つまり, \mathbf{R}_+ からそれ自身への関数が特定されていなければならない).

すなわち、 $S_1 = \mathbf{R}_+$ 、 S_2 は \mathbf{R}_+ から \mathbf{R}_+ への関数の集合とし、

$$u_1(s_1, s_2) = D^{-1}(s_1 + s_2(s_1))s_1 - C_1(s_1),$$

$$u_2(s_1, s_2) = D^{-1}(s_1 + s_2(s_1))s_2(s_1) - C_2(s_2(s_1))$$

と定義する。シュタッケルベルク競争では企業 2 は企業 1 の行動を見たうえで生産量を選択できる。したがって,企業 2 の戦略は企業 1 の生産量に自社の生産量を対応づける。それはひとつの実数ではなく, s_1 の関数である。

7.3 ナッシュ均衡

7.3.1 定義 $i \in \{1, \dots, I\}$, $s_i \in S_i$, $s_{-i} \in S_{-i}$ とする. s_i が s_{-i} に対する最適反応 (best response) であるとは、任意の $t_i \in S_i$ に対して、

$$u_i(s_i, s_{-i}) \ge u_i(t_i, s_{-i})$$

が成り立つことをいう. これはまた,

$$\max\{u_i(t_i, s_{-i}) \mid t_i \in S_i\} = u_i(s_i, s_{-i})$$

とも書ける.

最適反応の集合を、 $R_i(s_{-i})$ と書く.これは空集合であることもある. S_{-i} の各元 S_{-i} に対して最適反応の集合 $R_i(s_{-i}) \subseteq S_i$ を与えるこの関係 R_i は, S_{-i} から S_i への対応(correspondence)である.

7.3.2 定義 $s \in S$ とする. s がナッシュ均衡 (Nash equilibrium) であるとは、任意の i に対し $s_i \in R_i(s_{-i})$ が成立することをいう.

どのプレーヤーiをとってきても、他のプレーヤーがその戦略のリストsに登場している戦略 s_{-i} を使っている以上、自分が s_i でないほかの戦略を選ぶインセンティブはない、ということである.

各プレーヤーは自分の利害に従って行動するのだから、自分は相手の戦略を選ぶことはできないので、相手の戦略の部分は所与として行動しなければならないのだが、そうしたとき誰も戦略を変える誘因がないという状況がナッシュ均衡である.

逆に、 $s \in R(s)$ が成立しないなら、s は均衡とは呼びがたい。s がナッシュ均衡でないとすると、あるプレーヤーに、ほかの戦略を選ぶ誘因がある。それゆえ、s はあまり安定なものとは思われない。この点で、ナッシュ均衡は「ありうべき状態」の必要条件であると考えられる。

ナッシュ均衡は存在しないこともある. 混合戦略という戦略を導入することでナッシュ均衡の存在を保証 することができる.

一方で、ナッシュ均衡は複数存在することもある.これはどの状態が実際に実現するかわからないという 点でモデルの予想力を下げるものである.

ここで重要な問題は,各プレーヤーが他のプレーヤーの戦略をどのように予想できるかということである.クールノー競争では,同時に生産量を決定しているから,企業 1 は企業 2 の生産量を実際に観察することはできなかったが,ここでの一般的な枠組みでも事情は同じである.すべてのプレーヤーは同時に戦略を選ぶから,他のプレーヤーがどの戦略をとるかはまだ分からない.大げさだが厳密に書けば,上記のことは, $s_i \in R_i(s_{-i}^e), s_{-i}^e = s_{-i}$ ということであって,ある種の合理的期待の仮定が裏に隠れていることになる.また,異なるプレーヤーが 1 人の同じプレーヤーに対して抱く予想は同じであると仮定されている.

これからまずナッシュ均衡が存在するための十分条件を与え、それから混合戦略概念を紹介し、それから期待の合理性の概念を再び説明することにする.

7.3.3 定義 $s_i \in S_i, t_i \in S_i$ とする. t_i が s_i に強支配される $(t_i$ is strictly dominated by s_i) とは,任意の他のプレーヤーの戦略プロファイル $s_{-i} \in S_{-i}$ に対し,

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(t_i, s_{-i})$$

が成立することをいう.

このとき、任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ について、 $t_i \notin R_i(s_{-i})$ である.

$$R_i(S_{-i}) = \{R_i(s_{-i}) | s_{-i} \in S_{-i}\}$$

と書く. このとき, もし $t_i \in S_i$ が他の戦略に強支配されるならば, t_i は $R_i(S_{-i})$ に含まれない.

7.3.4 定義 $s_i \in S_i, t_i \in S_i$ とする. t_i が s_i に弱支配される $(t_i$ is weakly dominated by s_i) とは,任意の他のプレーヤーの戦略プロファイル $s_{-i} \in S_{-i}$ に対し,

$$u_i(s_i, s_{-i}) \ge u_i(t_i, s_{-i})$$

が成立し、かつ、ある他のプレーヤーの戦略プロファイル $s_{-i} \in S_{-i}$ に対し、

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(t_i, s_{-i})$$

が成立することをいう.

戦略の強支配と弱支配の関係については、 S_{-i} を消費者の集合に見立ててパレート改善のアナロジーで考えればよい.

7.3.5 注意 t_i が他の戦略に弱支配されていても, $t_i \in R_i(S_{-i})$ が成立することはある.ただしそのときは,それを弱支配する戦略も $R_i(S_{-i})$ に属する.また,弱支配される戦略がナッシュ均衡を成す場合もある.例えばベルトラン競争がそうである.ただし, t_i が他の戦略に強支配されるならば, $t_i \in R_i(S_{-i})$ が成立することはない.

7.4 均衡の存在定理 187

個々のプレーヤーの R_i について定義するかわりに、次のようにまとめて書きかえることもできる:

7.3.6 命題 対応 $R: S \to S$ を、任意の $s = (s_1, s_2, ..., s_I) \in S$ に対し、

$$R(s) = R_1(s_{-1}) \times R_2(s_{-2}) \times \cdots \times R_I(s_{-I})$$

と定義する. このとき, s がナッシュ均衡であるということと, $s \in R(s)$ とは同値である. つまり, s が R の不動点であるということである.

練習問題 7.3.1 同質財を生産する 2 企業間の競争を考えよう. どちらも限界費用は一定値 c>0 をとるとする. また, 需要関数は D で, 逆需要関数は D^{-1} で表すとする. いずれの企業とも財の価格を提示するものとし, 2 企業が提示する価格が等しいときは, 各企業がその価格での需要量の半分の量を供給するが, そうでなければ低い価格を提示する企業のみがその価格での需要量をすべて供給すると仮定する.

- 1. この競争を2プレーヤーの正規形ゲームとして定式化せよ.
- 2. このゲームのすべてのナッシュ均衡を求めよ.
- 3. D^{-1} は連続関数で,D(c) > 0 を満たすとき,各プレーヤーの弱支配される戦略と強支配される戦略をすべて求めよ.

7.4 均衡の存在定理

ナッシュ均衡の存在を保証するために、まず、任意のプレーヤーiについて、戦略集合 S_i は有限次元ユークリッド空間の非空コンパクト凸な部分集合と仮定する。

戦略集合が非空であることは当然の要請である。コンパクトであることは、そこで定義される関数である 利得関数が最大値をもつために要請する。有限次元といったが、この次元はプレーヤーによって異なってい てもかまわない。(1点集合を除いて)有限集合は凸集合ではないのでこの仮定は満たされない。

利得関数 $u_i:S\to \mathbf{R}$ は連続とする.最大化問題を解くために少なくとも自分の戦略集合の上で連続関数であることが必要なのだが,大事なのは,S 上で連続であることを言っており,他のプレーヤーの戦略の上でも連続であることを要請している.この仮定は最適反応が (上半) 連続的に変化することを保証する.任意の $s_{-i}\in S_{-i}$ について,偏関数

$$u_i(\cdot, s_{-i}): S_i \to \mathbf{R}$$

が準凹であるとする. u_i が S 上全体で準凹であるとは要請しない.

7.4.1 定理 任意の i について戦略集合 S_i が有限次元ユークリッド空間の非空コンパクト凸部分集合,利得 関数 u_i が連続,かつ任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $u_i(\cdot,s_{-i}):S_i \to \mathbf{R}$ が準凹であるとする.このとき,正規 形ゲーム Γ_N のナッシュ均衡が存在する.

次の証明は,一般均衡理論におけるワルラス均衡の存在証明にも使えるテクニックである.

定理 7.4.1 の証明 S は有限次元ユークリッド空間の非空コンパクト凸な部分集合である*1. u_i の連続性より,最適反応対応 $R_i:S_{-i}\to S_i$ は非空値をとる*2. また, s_i について $u_i(\cdot,s_{-i})$ が準凹なので, R_i は凸値である.つまり,任意の $s_{-i}\in S_{-i}$ について, $R_i(s_{-i})\subseteq S_i$ は非空かつ凸である.

 st^* 1 その次元は各 S_i のそれの合計であり,コンパクト集合の直積なのでコンパクトで,凸集合の直積なので凸である.

^{*2} 任意の $s_i \in S_i$ に対し, $R_i(s_{-i}) \neq \emptyset$ ということ.実はこの部分は, $u_i(\cdot,s_{-i}):S_i \to \mathbf{R}$ の連続性があれば十分である.例えば,ベルトラン競争の各プレーヤーの利得関数は連続ではない.

角谷の不動点定理を使うために, R_i のグラフは $S(=S_{-i}\times S_i)$ の閉部分集合であることを示そう.つまり, S_{-i} の点列 $(S_{-i}^n)_n$ と S_i の点列 $(S_i^n)_n$ について,任意の n に対して $S_i^n\in R_i(S_{-i}^n)$ と仮定すると, $n\to\infty$ のとき, $s_{-i}\in S_{-i}$ かつ $s_i\in S_i$, $s_{-i}^n\to s_{-i}$ かつ $s_i^n\to s_i$ ならば, $s_i\in R_i(s_{-i})$ が成立することを示せばよい*3.そのためには,任意の $t_i\in S_i$ に対して, $u_i(s_i,s_{-i})\geq u_i(t_i,s_{-i})$ を示せば十分である.実際,任意の n について,

$$u_i(s_i^n, s_{-i}^n) \ge u_i(t_i, s_{-i}^n)$$
 (7.1)

が成立するので、 u_i の連続性により、 $n \to \infty$ のとき、(7.1) の左辺は $u_i(s_i, s_{-i})$ へ、右辺は $u_i(t_i, s_{-i})$ へ それぞれ収束する*4. したがって、任意の $t_i \in S_i$ について、 $u_i(s_i, s_{-i}) \ge u_i(t_i, s_{-i})$ が成立する.

そこで、対応 $R: S \to S$ を、任意の $s \in S$ について $R(s) = (R_1(s_{-1}), \cdots, R_I(s_{-I}))$ と定めると、R は非空、凸値で、そのグラフは $S \times S$ の閉部分集合である。よって、角谷の不動点定理により、ある $s^* \in R(s^*)$ が存在する。命題 7.3.6 により、 s^* はナッシュ均衡である。

定理 7.4.1 の逆も成立する. つまり、定理 7.4.1 から不動点定理が導出される. ただし、分離超平面定理で示される場合もある(ゼロサムゲームなど). 練習問題 7.4.5 を参照せよ.

7.4.2 注意 連続性条件は以下の定理のように弱めることができる. さらに,連続性条件を弱めることで, 競争(ワルラス)均衡の存在証明にも利用できる.

7.4.3 定義 関数 $u_i: S \to \mathbf{R}$ がグラフ下半連続であるとは,任意の $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*) \in S$ に対して, S_{-i} における s_{-i}^* のある近傍 T_{-i} とある関数 $f_i: T_{-i} \to S_i$ が存在して, $s_i^* = f(s_{-i}^*)$ を満たし,かつ T_{-i} から \mathbf{R} への関数 $S_{-i} \mapsto u_i (f_i(s_{-i}), s_{-i})$ が s_{-i}^* で下半連続であること*5である.

7.4.4 定理 (Dasgupta and Maskin (1986)) 任意の i について戦略集合 S_i が有限次元ユークリッド空間の非空コンパクト凸部分集合であるとする。任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $u_i(\cdot,s_{-i}):S_i \to \mathbf{R}$ が準凹で, u_i は上半連続 * 6かつグラフ下半連続であるならばナッシュ均衡が存在する。

定理 7.4.4 の証明 角谷の不動点定理の仮定を R が満たすことを示せばよい. まず, u_i は s_i について上半連続なので,任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $R_i(s_{-i})$ は非空である (詳しく考えよ). また, $u_i(\cdot, s_{-i})$ が準凹関数なので, $R_i(s_{-i})$ は凸である. よって, R_i のグラフが閉であることを示せば証明完了である.

まず関数 $v_i: S_{-i} \to \mathbf{R}$ を

$$v_i(s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

(つまり任意の $s_i \in R_i(s_{-i})$ について $v_i(s_i) = u_i(s_i, s_{-i})$)

と定義する. 以下ではまず v_i が連続であることを示す. $(s_{-i}^n)_n$ は S_{-i} 上の点列で, $s_{-i}^* \in S_{-i}$ として, $s_{-i}^n \to s_{-i}^*$ を仮定する. 必要ならば部分列をとることで,一般性を失うことなく $\limsup_n v_i(s_{-i}^n)$ =

$$graph(R_i) = \{(s_{-i}, s_i) \in S_{-i} \times S_i \mid s_i \in R_i(s_{-i})\}\$$

^{*3} これは、閉グラフの本来の意味である以下の書き換えである.

とし、 $\left((s_{-i}^n,s_i^n)\right)_n$ を $\operatorname{graph}(R_i)$ 上の点列とする。また、 $(s_{-i},s_i)\in S_{-i}\times S_i$ とする。このとき、 $n\to\infty$ としたときに $(s_{-i}^n,s_i^n)\to (s_{-i},s_i)$ ならば、 $(s_{-i},s_i)\in\operatorname{graph}(R_i)$ が成立する(文献では upper semi-continuity とも言われる).

^{*4} S_{-i} についての連続性を使っていることに注意せよ.この部分で, u_i が S 全体で連続であることが必要になる.

 $^{^{*5}}$ u_i が連続ならばグラフ連続である. $T_{-i}=S_{-i}$ とし,任意の $s_{-i}\in S_{-i}$ について $f_i(s_{-i})=s_i^*$ とすればよい.

 $^{^{*6}}$ u_i が上半連続であるとは, $s^n \to s$ ならば, $\limsup_n u_i(s^n) \le u_i(s)$ が成立することである.

7.4 均衡の存在定理 189

 $\lim_n v_i(s^n_{-i})$ と仮定できる. $s^n_i \in R_i(s^n_{-i})$ とする. 必要ならば部分列をとることで,一般性を失うことなく,ある s^*_i が存在して $s^n_i \to s^*_i$ と仮定できる. よって,上半連続性により

$$\lim \sup_{n} v_{i}(s_{-i}^{n}) = \lim_{n} u_{i}(s_{i}^{n}, s_{-i}^{n}) \le u_{i}(s_{i}^{*}, s_{-i}^{*}) \le v_{i}(s_{-i}^{*})$$
(7.2)

が成立する(ここまではグラフ連続性を使っていない).次に, $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*)$ とする.グラフ連続性により, s_{-i}^* のある近傍 T_{-i} と,ある関数 $f_i: T_{-i} \to S_i$ が存在して, $s_i^* = f_i(s_{-i}^*)$ かつ, T_{-i} から \mathbf{R} への関数 $S_{-i} \mapsto u_i \left(f_i(s_{-i}), s_{-i} \right)$ が s_{-i}^* で下半連続である. v_i の定義より, $u_i \left(f_i(s_{-i}^n), s_{-i}^n \right) \leq v_i(s_{-i}^n)$ が成立するので, $\lim \inf_n u_i \left(f_i(s_{-i}^n), s_{-i}^n \right) \leq \lim \inf_n v_i(s_{-i}^n)$ が成立するが,グラフ下半連続性により

$$\liminf_{n} u_i \left(f_i(s_{-i}^n), s_{-i}^n \right) \ge u_i \left(f_i(s_{-i}^*), s_{-i}^* \right) = u_i(s_i^*, s_{-i}^*) = v_i(s_{-i}^*)$$

が成立する. よって,

$$v_i(s_{-i}^*) \le \liminf_n v_i(s_{-i}^n)$$
 (7.3)

が成立する. (7.2) と (7.3) より, $v_i(s_{-i}^n) \rightarrow v_i(s_{-i}^*)$ が成立する. よって, v_i は連続である.

 v_i が連続であることから R_i のグラフが閉であることを示そう。 $s_i^n \in R_i(s_{-i}^n)$ かつ, $s_{-i}^n \to s_{-i}^*$, $s_i^n \to s_i^*$ とする。 $v_i(s_{-i}^n) = u_i(s_i^n, s_{-i}^n)$ なので, $n \to \infty$ のとき, v_i の連続性と u_i の上半連続性により, $v_i(s_{-i}^*) \le u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$ が成立する。したがって, $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*)$ が成立する。

定理 7.4.4 を使って競争(ワルラス)均衡の存在定理を証明する. これは、MWG の 17 章 Appendix B に対応する内容である. Arrow and Debreu (1954, Econometrica) による初期の競争均衡の存在証明は、ここでの内容のようにナッシュ均衡の存在証明を用いておこなわれた.

7.4.5 定理 私的保有経済が以下の(1)から(5)の仮定を満たすとする.

- (1) 財空間は \mathbf{R}^L .
- (2) 任意の i について、消費集合 X_i が閉かつ凸であり、選好関係 \succ_i が連続かつ準凹な効用関数で表現可能であり、局所非飽和性を満たす。
- (3) 総生産可能性集合 W が閉, 凸, かつ自由化処分の仮定を満たす.
- (4) 実行可能配分の集合 $\{(x_1,\ldots,s_I)\in X_1\times\cdots\times X_I\mid \sum_i x_i\in W\}$ は非空かつ有界である (cf. Kreps (2012)).
- (5) 任意の i について,富水準 α_i は $\{p \in \mathbf{R}^L \mid \alpha(p) < +\infty\}$ 上で連続であり,任意の $p \in \mathbf{R}^L$ に対して, $\alpha(p) < +\infty$ ならば,ある $x_i \in X_i$ が存在して $p \cdot x_i < \alpha_i(p)$ を満たす(最小所得条件).

このとき,この私的保有経済には競争(ワルラス)均衡が存在する.

これらの仮定の下で, $W \neq \mathbf{R}^L$ が保証される.なぜなら,もし $W = \mathbf{R}^L$ ならば,実行可能配分の集合は $X_1 \times \cdots \times X_I$ に一致し,よって (2),(3),(4) によりこれはコンパクトである.よって任意の i について X_i もコンパクトであるがこれは局所非飽和性に矛盾する.

定理 7.4.5 の証明 有界性条件より,ある b>0 が存在して,任意の実行可能配分 (x_1,\ldots,x_I) と任意の i について $||x_i|| < b$ が成立する*7. $\hat{x}_i = \{x_i \in X_i \mid ||x_i|| \le b\}$ とおく.これは凸かつコンパクトである.また,b を十分大きくとれば,任意の $p \in \mathbf{R}^L$ に対して, $\alpha(p) < +\infty$ ならば,ある $x_i \in \hat{X}_i$ が存在して $p \cdot x_i < \alpha_i(p)$ を保証できる(詳しい証明は省略). $\hat{W} = \{x \in W \mid ||x|| \le Ib\}$ とおくと,これも凸かつコ

^{*7} ここでは厳密な不等号を使うことが重要である.

ンパクトである*8. また,任意の実行可能配分 (x_1,\dots,x_I) と任意の i について, $x_i\in\hat{X}_i$ かつ $\sum_i x_i\in\hat{W}$ が成立する.

正規形ゲームを次のように定義する.プレーヤーの集合を $\{1,\ldots,I,I+1\}$ とする. $i\leq I$ のプレーヤーi は消費者で,戦略集合は \hat{X}_i である.プレーヤーI+1 はオークショニア(生産者)で,戦略集合は以下で定める価格空間 P である.まず, $\Delta=\{p\in \mathbf{R}_+^L\mid \sum_\ell p^\ell=1\}$ とする.次に, $\Delta'=\{p\in\Delta\mid \alpha(p)<+\infty\}$ とする.さらに, $\Delta''=\{p\in\Delta'\mid \text{ある }x\in\hat{W}$ が存在して, $p\cdot x=\alpha(p)<+\infty\}$ とする.このとき,価格空間 P を Δ'' の凸包と定義する.W は凸で $W\neq\mathbf{R}^L$ なので Δ' は非空凸集合である. Δ'' がコンパクト集合であることは容易に示される.よって,P はコンパクトで Δ' に包まれる.最後に,P は非空であることを示そう.これには Δ'' が非空であることを示せば十分である. (x_1,\ldots,x_I) を実行可能配分の 1 つとする.局所非飽和性と \succ_i の凸性により,ある $z\in\mathbf{R}^L\setminus\{0\}$ が存在し,任意の $\lambda\geq 0$ について, $x_1+\lambda z\in X_1$ が成立する*9. $x^\lambda\in W$ である.よって, $x^\lambda\in W$ なる最大の λ を λ で表すと $x^{\bar{\lambda}}\in\partial W$ であり,W は閉なので $x^{\bar{\lambda}}\in W$ である.したがって, $x^{\bar{\lambda}}\in W$ である. $x^{\bar{\lambda}}$ において W を支持するベクトルを p とすれば, $||p||^{-1}p\in\Delta''$ であるので Δ'' は非空である.

利得関数は以下のように定める。まず、任意 $i \leq I$ について、 $m_i < \min_{x_i \in X_i} u_i(x_i)$ とし、利得関数 $\hat{u}_i : \hat{X}_i \times P \to \mathbf{R}$ を次のように定義する。

$$\hat{u}_i(x_i,p) = \begin{cases} u_i(x_i) & (p \cdot x_i \leq \alpha_i(p) \text{ のとき}) \\ m_i & (p \cdot x_i > \alpha_i(p) \text{ のとき}). \end{cases}$$

次に, i = I + 1, すなわちオークショニアについては, 利得関数 $\hat{u}_{I+1}: \hat{X}_1 \times \cdots \times \hat{X}_I \times P \to \mathbf{R}$ を

$$\hat{u}_{I+1}(x_1,\ldots,x_I,p) = p \cdot \left(\sum_i x_i\right) - \alpha(p)$$

と定義する*10. $\hat{u}_1,\dots\hat{u}_I,\hat{u}_{I+1}$ はどれも上半連続,グラフ下半連続かつ自分の戦略について準凹である. i=I+1 については, α は連続かつ凸なので, \hat{u}_{I+1} は連続かつ自分の戦略 p について凹である。 $i\leq I$ については,準凹性は容易に示すことができ,上半連続性は, $p\cdot x_i=\alpha_i(p)$ のとき $u_i(x_i)$ (> m_i) が $\hat{u}_i(x_i,p)$ の値であることによる.グラフ下半連続性は最小所得条件より従う*11.

以上より,ナッシュ均衡(不動点)が存在する.それを (x_1^*,\dots,x_I^*,p^*) と書く. (x_1^*,\dots,x_I^*,p^*) がワルラス均衡であることを示そう.まず,任意の $i\leq I$ について, \hat{u}_i の定義により, $p^*\cdot x_i^*\leq \alpha_i(p^*)$ および,任意の $x_i\in \hat{X}_i$ について, $x_i\succ_i x_i^*$ ならば $p^*\cdot x_i>\alpha_i(p^*)$ が成立する.また, $p^*\cdot (\sum_i x_i^*)\leq \alpha(p^*)$ が成立する.よって, \hat{u}_{I+1} の定義より,任意の $p\in P$ に対して,

$$p \cdot \left(\sum_{i} x_{i}^{*}\right) \le \alpha(p) \tag{7.4}$$

が成立する.

次に, $\sum_i x_i^* \in W$ を背理法で示そう. $\sum_i x_i^* \notin W$ とする.実行可能配分 W の要素のひとつを (x_1,\ldots,x_I) とする.そこで, $\varepsilon \in [0,1]$ として, $x^\varepsilon := \varepsilon \sum_i x_i^* + (1-\varepsilon) \sum_i x_i = \sum_i (\varepsilon x_i^* + (1-\varepsilon) x_i) := \sum_i x_i^\varepsilon$ を考えよう. $x^0 \in W$ だが, $x^1 \notin W$ である. x^ε なる最大の $\varepsilon \in (0,1)$ を ε とおく.このとき, $x_i^{\bar{\varepsilon}} \in X_i$ なので, $||x^{\bar{\varepsilon}}|| < bI$ が成立する.よって, $\varepsilon > \bar{\varepsilon}$ だが $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$ は十分小さい ε をとると, $||x^\varepsilon|| < bI$ が

 $^{^{*8}}$ Gale and Mas-Colell (1979)

 $^{^{*9}}$ z は X_1 の漸近錘 (asymptotic cone) に属するとすればよい.

 $^{^{*10}}$ $\alpha(p)$ は総供給の価値額なので,オークショニアは超過需要の価値額を最大化するよう行動する.最大の超過需要の財に正の価格を与える

 $^{^{*11}}$ 実は,最小所得条件の下での需要関数の連続性の証明と同じである.

7.4 均衡の存在定理 191

成立する. x^{ε} の W への射影を z^{ε} と書くと, $z^{\varepsilon} \in W$ で $x^{\bar{\varepsilon}} \in W$ であることより, $||z^{\varepsilon} - x^{\bar{\varepsilon}}|| \leq ||x^{\varepsilon} - x^{\bar{\varepsilon}}||$ が成立する. よって, 必要ならばさらに ε を小さくとれば, $||z^{\varepsilon}|| < bI$ が成立する. したがって, $z^{\varepsilon} \in \hat{W}$ が成立する.

$$p = \frac{1}{||x^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}||} (x^{\varepsilon} - z^{\varepsilon})$$

とおけば, $p\cdot z^{\varepsilon}=\alpha(p)$ なので $p\in P$ である.しかし, $p\cdot (x^{\varepsilon}-z^{\varepsilon})=||x^{\varepsilon}-z^{\varepsilon}||>0$ なので, $p\cdot x^{\varepsilon}>\alpha(p)$ である.他方, $p\cdot x^0\leq \alpha(p)$ なので, $p\cdot x^1>\alpha(p)$ が成立する.ところが, $p\cdot x^1=p\cdot (\sum_i x_i^*)$ なので,これは,(7.4) に矛盾する.よって, $\sum_i x_i^*\in W$ が成立する.これで実行可能性が示された.

したがって, $x_i^* \in \hat{X}_i$ であるので, $||x_i^*|| < b$ が成立する.もし, $p^* \cdot x_i^* < \alpha_i(p^*)$ ならば, $||x_i|| < b$, $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$,および $x_i \succ_i x_i^*$ を満たす $x_i \in X_i$ が存在するが,これは i の利得最大化に矛盾する.よって,任意の i について, $p^* \cdot x_i^* = \alpha_i(p^*)$ が成立する.このことより, $p^* \cdot (\sum_i x_i^*) = \alpha(p^*)$ が成立するので,収入最大化も示された.

最後に,背理法で効用最大化条件を示そう.仮に,ある i とある $x_i \in X_i$ について, $x_i \succ_i x_i^*$ かつ $p^* \cdot x_i^* \le \alpha_i(p^*)$ が成立するとする. \hat{X}_i についてこのような $x_i \in \hat{X}_i$ が存在しないのは, x_i^* がナッシュ均 衡を成すことから従う.最小所得条件より,ある $\hat{x}_i \in X_i$ が存在して, $p^* \cdot \hat{x}_i < \alpha_i(p^*)$ が成立する. x_i の 代わりに $\varepsilon \hat{x}_i + (1-\varepsilon)x_i$ を使うことで,一般性を失うことなく $p^* \cdot x_i < \alpha_i(p^*)$ と仮定できる. $||x_i^*|| < b$ なので,十分小さな $\varepsilon > 0$ について, $||\varepsilon x_i + (1-\varepsilon)x_i^*|| < b$ が成立する.また, $p \cdot (\varepsilon x_i + (1-\varepsilon)x_i^*) < \alpha_i(p^*)$ も成立する.局所非飽和性により,ある $(x_i^n)_n$ が存在して,任意の n について $x_i^n \succ_i x_i^*$ かつ $x_i^n \to x_i^*$ が成立する.よって,十分大きな n に対して,

$$\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon) x_i^n \succ_i x_i^*$$

$$||\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon) x_i^n|| < b$$

$$p^* \cdot (\varepsilon x_i + (1 - \varepsilon) x_i^n) < \alpha_i(p^*)$$

が成立する.特に $\varepsilon x_i + (1-\varepsilon)x_i^n \in \hat{X}_i$ であるが,これは x_i^* がナッシュ均衡であることに矛盾する.よって効用最大化条件が示された. ///

7.4.6 注意 \hat{u}_i $(i \leq I)$ は x_{-i} や p に依存しても構わないので, u_i も x_{-i} や p に依存しても構わない.したがって,外部性や貨幣錯覚を効用関数が持つ場合でも以上の証明は適用できる.

さきに、 S_i は(2 点以上の)有限集合ではありえないと注意した。 S_i が 2 点以上を含む有限集合のとき、 S_i は凸でないから、存在定理が適用できないことになる。このとき、いわば S_i 上のくじを考え、 S_i を以下のように拡張することを考える。

7.4.7 定義 $\Delta(S_i)$ を、 S_i 上の確率分布の集合、すなわち $\{\sigma_i: S_i \to \mathbf{R}_+ | \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}$ とする*12. このとき、 $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ を混合戦略 (mixed strategy) という.

いちばんわかりやすいのはじゃんけんの例で、 S_i を $\{$ グー,チョキ,パー $\}$ という 3 点集合とすれば、 $\Delta(S_i)$ はそれぞれの手に対して与える確率を定めた確率分布全体の集合である.

 $\Delta(S_i)$ は混合戦略の集合であり、 Σ_i と書くことも多い.

戦略の集合を混合戦略に拡張し、確率的に行動を選ぶとしたとして、そのとき利得を新たに定めねばならない、そこで、 u_i の定義域を、これまでの

$$S = S_1 \times \cdots \times S_I$$

 $^{^{*12}}$ 前章の不確実性下の意思決定の文脈では, S_i が帰結の集合 C であり,くじの集合は $\mathcal L$ と書いていた.

から、混合戦略集合の直積 $\Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_I)$ 、すなわち、

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_I$$

に、以下のように拡張する.

まず、各 Σ_i は、純粋戦略の集合 S_i を含むと考えられる。というのも、ある戦略に確率 1 を与える(退化した)混合戦略は、純粋戦略と考えられるから、純粋戦略の集合は混合戦略の集合の部分集合と考えられるのである。それゆえ、定義域を拡張するときには、もともとの純粋戦略の与える利得水準は変えないように定義しなければならない。

任意の $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I) \in \Sigma$ に対し,

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2)\cdots\sigma_I(s_I)u_i(s_1, s_2, \dots, s_I)$$

$$(7.5)$$

とする.これは純粋戦略から得られる利得の期待値である,よって期待効用関数である.すなわち混合戦略から得られる利得は,期待利得であると定義するのである.混合戦略というと戦略の概念を拡張するだけに聞こえるが,効用関数を期待効用関数に拡張することもその定義の一部であることに留意せよ.

いま,個々のプレーヤーが選ぶ確率分布(混合戦略)にはなんら制約をおいていないが,混合戦略の組 $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_I)$ は, $S=S_1\times\cdots\times S_I$ 上の確率分布としては特殊である.混合戦略の組が与える S上の確率分布は,各成分ごとの積である.つまり, σ_1,\ldots,σ_I はいずれも独立である.これは戦略の選択の独立性を仮定していることに他ならない.独立性を仮定しない場合は,いわゆる「相関均衡」が得られる.

7.4.8 例 I=2, $S_1=\{T,B\}$, $S_2=\{L,R\}$ とする. 純粋戦略 T を確率 2/3, B を確率 1/3 で選ぶプレーヤー 1 の混合戦略を考える(これを (2/3,1/3) と書く). また,純粋戦略 L を確率 3/4, R を確率 1/4 で選ぶプレーヤー 2 の混合戦略を考える(同様に (3/4,1/4) と書く).

純粋戦略集合の直積 $S=S_1\times S_2$ は 4 つの要素をもつ集合 $\{(T,L),(T,R),(B,L),(B,R)\}$ だが,上記の混合戦略の組が与える S 上の確率分布は以下の表 7.1 のようになる.このとき,表 7.1 が周辺分布から出たことをいったん忘れて 2×2 の表と見ると,周辺分布を逆算することで,独立性が確かめられる.

他方,この形で表せない確率分布は以下の表 7.2 のようなものがある。例えば,利得が表 7.3 で与えられる場合,期待利得は 1 のままであるが,他方,各プレーヤーが自分の戦略を確率 1/2 ずつで選ぶなら,戦略空間上の確率分布は表 7.4 の通りである。期待利得はそれぞれ 1/2 である。

	L	R
T	1/2	1/6
B	1/4	1/12

主 7 1	C	上の確率分布
<i>x</i> ∨ / I		

	L	R
T	1/2	0
В	0	1/2

表 7 9

	L	R
T	1,1	0,0
В	0,0	1,1

表 7.3 利得表

	L	R
T	1/4	1/4
В	1/4	1/4

表 7.4

混合戦略のナッシュ均衡では、各純粋戦略がとられる確率の分布が相手にも予想されていると想定されている。プレーの結果として実際に観察されるのは、確率分布そのものでなく、あくまで実現された純粋行動である。ところが、ナッシュ均衡では各プレーヤーは、相手が確率的に行動すると予想している。それゆえ、混合戦略とは、実際の行動ではなく、各プレーヤーの他のプレーヤーの選択についての予想の中にのみ存在する(と考えるゲーム理論の研究者もいる)。

もし、任意のiについて純粋戦略の集合 S_i が無限集合ならば、混合戦略の期待利得は

$$\int_{S} u_i(s)d\sigma(s) = \int_{S_1} \int_{S_2} \cdots \int_{S_I} u_i(s_1, s_2, \cdots, s_I)d\sigma(s_1)d\sigma(s_2) \cdots d\sigma(s_I)$$

7.4 均衡の存在定理 193

である. *13 この時,ナッシュ均衡の存在定理を適用できるが,その証明は煩雑であるので,ここでは任意の i について純粋戦略の集合 S_i は有限集合であるとする. L_i を S_i に含まれる有限の戦略の数とする. プレーヤー i の混合戦略の集合を

$$\Sigma_i = \left\{ p = (p^1, p^2, \cdots, p^{L_i}) \in \mathbf{R}_+^{L_i} \mid \sum_{\ell} p^{\ell} = 1 \right\}$$

とする.ただし, $\ell \in \{1,2,\cdots,L_i-1,L_i\}$ とし p^ℓ は ℓ 番目の純粋戦略に与える確率である. Σ_i は非空,凸,コンパクトな集合である.プレーヤーi の任意の混合戦略は $\sigma_i = \left(p_i^{\ell_i}\right)_{\ell_i} \in \mathbf{R}_+^{L_i}$ として表せる.つまり $\sigma_i = p_i^{\ell_i} \in \Sigma_i$ である.プレーヤーi の期待利得 $u_i(\sigma_i)$ は

$$\sum_{s \in S} \sigma_1(s) \sigma_2(s) \cdots \sigma_I(s) u_i(s) = \sum_{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_I} p^{\ell_1} p^{\ell_2} \cdots p^{\ell_I} u_i(s)$$

である. $u_i(s)$ は $(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_I)$ に対して一定である. よって,

$$u_i(\sigma_i) = \sum_{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_I} p^{\ell_1} p^{\ell_2} \cdots p^{\ell_I} (\text{constant}(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_I))$$

である.これより, $u_i(\sigma_i)$ は $(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_I)$ の I 次多項式であり, $(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_I)$ に対して連続関数である.また, $u_i(\sigma_i)$ は $p_i^{\ell_i}$ に関してアフィン関数である.よって, $p_i^{\ell_i}$ に対して準凹関数である.以上より定理 7.4.1 の前提条件を満たすため,ナッシュ均衡が存在し以下の定理が成立する.

7.4.9 定理 任意の i について純粋戦略の集合 S_i が有限集合ならば、ナッシュ均衡が存在する.

また、ナッシュ均衡はある種の変換に関して頑強である。任意のiについて、 f_i を $f_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ である強単調な関数であるとする。この f_i を用いて正規形ゲーム Γ_N の利得関数を変換した正規形ゲームを $\hat{\Gamma}_N$ ($\{1,2,\cdots,I\}$, $\{S_i\}_I$, $\{f_i\circ u_i\}_I$)とすると以下の命題が成立する。

7.4.10 命題 任意の $s \in S$ について,s が Γ_N の純粋戦略ナッシュ均衡であることと,s が $\hat{\Gamma}_N$ の純粋戦略ナッシュ均衡であることは同値である.

戦略を混合戦略に拡張するならば、次の命題が成立する.

7.4.11 命題 任意の i について f_i がアフィン関数でならば、任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し、 σ が Γ_N の混合戦略 ナッシュ均衡であることと、 σ が $\hat{\Gamma}_N$ の混合戦略ナッシュ均衡であることは同値である.

純粋戦略とは異なり混合戦略では利得関数が期待利得であるため、ある f_i が単調であることだけでなくアフィンであることを要請することに注意せよ.

混合戦略の期待利得である (7.5) を変形すると,

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s)$$

$$= \sum_{(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}} \sigma_i(s_i) \underbrace{\sigma_{-i}(s_{-i})}_{=\Pi_{j \neq i} \sigma_j(s_j)} u_i(s_i, s_{-i})$$

$$= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i})$$

が成立する. つまり、 $u_i(\sigma)$ は下線部分の(s_i についての)期待値である. よって、 $\sigma_i \in R_i(\sigma_{-i})$ かつ $\sigma_i(s_i) > 0$ であるならば、 $s_i \in R_i(\sigma_{-i})$ が成立する. また、 $\sigma_i(s_i) > 0$ ならば $s_i \in R_i(\sigma_{-i})$ が成立するならば、 $\sigma_i \in R_i(\sigma_{-i})$ も成立する.

 $^{^{*13}}$ 積分の順序を無視するために,直積測度を採用する.

練習問題 7.4.1 正規形ゲーム Γ_N の混合戦略 σ がナッシュ均衡であるとき,もとのゲームの利得関数を単調変換したゲーム $\hat{\Gamma}_N$ において σ がナッシュ均衡でない例を挙げよ.

練習問題 7.4.2

1. 以下の 2 人正規形ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡と混合戦略ナッシュ均衡をすべて求めよ.

	s_2^1	s_{2}^{2}
s_1^1	1,3	1,3
s_1^2	2, 2	0,0

表 7.5 問 1

2. 以下の2人正規形ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡と混合戦略ナッシュ均衡をすべて求めよ.

	s_2^1	s_{2}^{2}
s_1^1	2, 2	2, 2
s_1^2	2, 2	2, 2
s_1^3	5,1	0,0
s_1^4	0,0	1,5

表 7.6 問 2

3. 以下の2人正規形ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡をすべて求めよ.

	s_2^1	s_{2}^{2}	s_{2}^{3}	s_2^4
s_1^1	4,0	4,0	4,0	4,0
s_1^2	4,0	4,0	4,0	4,0
s_1^3	2,4	2,4	6, 2	6, 2
s_1^4	2,4	2,4	4,6	5, 5

表 7.7 問 3

練習問題 7.4.3 2 人のプレーヤーより成る正規形ゲーム $\Gamma_N=(\{1,2\},(\Delta(S_1),\Delta(S_2)),(u_1,u_2))$ を考えよう. ここで, $S_i=\{1,2,\ldots,N_i\}$ とし $(N_i$ は正の整数), $\Delta(S_i)$ は S_i 上の全ての混合戦略の集合であるとする. 任意の $\sigma_1\in\Delta(S_1)$ に対し,もし σ_1 が他のいかなる(混合)戦略によっても強支配されないならば,ある $\sigma_2\in\Delta(S_2)$ が存在して, σ_1 は σ_2 への最適対応であることを証明せよ(ヒント:任意の $n\leq N_1$ に対して, $v^n=(u_1(n,1),u_1(n,2),\ldots,u_1(n,N_2))\in \mathbf{R}^{N_2}$ と定義し, $\{v^1,v^2,\ldots,v^{N_1}\}$ の凸包に分離超平面定理を適用せよ).

練習問題 7.4.4 前問 (練習問題 7.4.3) の性質を持たない 3 人プレーヤーより成る正規形ゲーム

$$\Gamma_N = (\{1, 2, 3\}, (\Delta(S_1), \Delta(S_2), \Delta(S_3)), (u_1, u_2, u_3))$$

の例を挙げよ.

練習問題 7.4.5 練習問題 7.4.3 と同様の 2 人のプレーヤー i=1,2 より成る正規形ゲーム $\Gamma_N=(\{1,2\},(\Delta(S_1),\Delta(S_2),(u_1,u_2))$ を考えよう.ただしここではさらに,任意の $(s_1,s_2)\in S_1\times S_2$ に対し, $u_1(s_1,s_2)+u_2(s_1,s_2)=0$ が成立すると仮定する. u_1 を u と書くことにする. u_2 は u に一致することに注意せよ.

7.5 相関均衡 195

1. このゲームにナッシュ均衡が存在することと,

$$\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} u(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} u(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$(7.6)$$

が成立することは同値であることを証明せよ.

2. (ナッシュ均衡の存在を仮定せずに)以下の不等式を証明せよ.

$$\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} u(\sigma_1, \sigma_2) \le \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} u(\sigma_1, \sigma_2).$$

(ヒント:まず、任意の $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2)$ に対し、 $\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} u(\sigma_1, \sigma_2) \leq u(\sigma_1, \sigma_2)$ が成立することを示せ、)

3. (ナッシュ均衡の存在を仮定せずに)以下の不等式を証明せよ.

$$\max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} u(\sigma_1, \sigma_2) \geq \min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} u(\sigma_1, \sigma_2).$$

(ヒント:任意の $\sigma_1 \in \Delta(S_1)$ に対して $\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} u(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{s_2 \in S_2} u(\sigma_1, s_2)$ が成立すること に注意し、問 7.4.3 のヒントと同様の方法で分離超平面定理を適用せよ.)

4. 任意の $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2)$ に対し, $u(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ が (7.6) の両辺の値に等しいならば, (σ_1^*, σ_2^*) はナッシュ均衡であるか?ナッシュ均衡であるなら,そのことを証明せよ.ナッシュ均衡でなければ,その例を挙げよ.

7.5 相関均衡

混合戦略においては戦略の選択の独立性が仮定された。本節では、独立性を満たすとは限らない、より一般的な(任意の)S 上の確率分布を考える。 σ_i で S_i 上の周辺分布を表し、 $\sigma_{-i|i}$ で S_i が与えられたときの S_{-i} 上の条件付き分布を表すとする。このとき、

$$u_{i}(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s)u_{i}(s)$$

$$= \sum_{(s_{i}, s_{-i}) \in S_{i} \times S_{-i}} \sigma_{i}(s_{i}) \underbrace{\sigma_{-i|i}(s_{-i} \mid s_{i})}_{\neq \Pi_{j \neq i} \sigma_{j}(s_{j})} u_{i}(s_{i}, s_{-i})$$

$$= \sum_{s_{i} \in S_{i}} \sigma_{i}(s_{i}) \sum_{\underline{s_{-i} \in S_{-i}}} \sigma_{-i|i}(s_{-i} \mid s_{i}) u_{i}(s_{i}, s_{-i})$$

$$(7.7)$$

である.

7.5.1 定義 σ が相関均衡(Correlated equilibrium)であるとは、任意の i と任意の s について s_i が (7.7) の下線部の最適反応であること.つまり、任意の $t_i \in S_i$ に対して、

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i|i}(s_{-i} \mid s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i|i}(s_{-i} \mid s_i) u_i(t_i, s_{-i})$$
(7.8)

が成立することである.

(7.8) において, $\sigma_{-i|i}$ で条件付けに使われる s_i は両辺で同じである.したがって,相関均衡は,仲裁者が確率分布 σ に従って各プレーヤーがとる純粋戦略を選択し,各プレーヤーは仲裁者から自分がとるべき純粋戦略のみ知らされる状況だと考えられる.

7.5.2 注意

///

- 任意のナッシュ均衡は相関均衡である. さらに,(複数の)ナッシュ均衡上の任意の確率分布は相関 均衡である.
- 相関均衡の集合は凸である. より正確には、相関均衡を S 上の確率分布とみたとき、その集合は凸集合である. また、ナッシュ均衡の集合の凸包より大きいこともある.
- 相関均衡の存在は分離超平面定理で証明可能である(cf. Hart and Schmeidler (1989))
- より一般的な状態空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された確率変数を使って定式化することも可能だが,S 上の確率分布を考えるここでの定式化と同値である(Revelation Principle).誘因両立的な直接メカニズムのみに分析対象を限定できるというメカニズムデザイン的発想と関連付けられる.
- サンスポット均衡のような応用が考えられる.

7.5.3 命題 $\sigma^1, \dots, \sigma^N$ を相関均衡とする. $(\mu^1, \dots, \mu^N) \in \mathbf{R}_+^N$ を $\sum_n \mu^n = 1$ ととると, $\sum_n \mu^n \sigma^n = \sigma^*$ も相関均衡である.

命題 **7.5.3** の証明 任意の n について σ^n は相関均衡なので,任意の i,任意の $(s_i,s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$,任意の $t_i \in S_i$ に対して,

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma^n(s_i, s_{-i}) \left(u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(t_i, s_{-i}) \right) \ge 0$$

が成立する. 両辺に μ^n をかけ, n について和をとると,

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma^*(s_i, s_{-i}) \left(u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(t_i, s_{-i}) \right) \ge 0$$

が得られる. よって, σ^* も相関均衡である.

7.5.4 注意 $\sigma \in \Delta(S)$ を $\sigma \in \mathbf{R}^{|S|}$ とし、上記の不等式では $u_i(s_i,s_{-i})-u_i(t_i,s_{-i})$ を係数(定数)とみなせ、

7.6 合理性の共有知識

本節では,ナッシュ均衡概念が前提とする,合理的期待の制約の度合いを明らかにしよう.ナッシュ均衡とは,すべてのプレーヤー i について $s_i \in R_i(s_{-i})$ であるような戦略プロファイル $s \in S$ のことだったが,ここに現れる他のプレーヤーの戦略 s_{-i} は,あくまで予想である.

ゲーム的状況では、他人がとる行動にしたがって自分のとるべき行動も変わるのだから、各プレーヤーが どんな行動をとるかを予想するときに重要なのは、他のプレーヤーは合理的に行動しているということを 知っているということである。それは、個々のプレーヤーが単に合理的に行動するということ以上の要求で ある。

そして、相手がどういう行動をとってくるかを正しく予想するためには、実はそれでも不十分であって、「すべてのプレーヤーが合理的であることをすべてのプレーヤーは知っている」ことを知っているということ、それをまたすべてのプレーヤーが知っているということ、というような、無限の連鎖(高階の信念)が必要である。例えば、この連鎖が99回成り立っていても100回目が成り立たない場合と、連鎖が無限に成立している場合では均衡が異なる例を作ることができる。

このように、任意のオーダーで「すべてのプレーヤーが合理的である」ことが全員に知られている状況は、合理性の共有知識 (common knowledge of rationality: CKOR) と呼ばれる.

7.6 合理性の共有知識 197

7.6.1 共有知識

共有知識についての古典的な例を用い、その考えがどのようなものかを示す.

7.6.1 例 先生が 1 人生徒が 3 人いるとする. それぞれの生徒を生徒 1, 生徒 2, 生徒 3 とする. 各生徒は,赤か白の帽子をかぶっており,他の生徒の帽子の色は分かるが自分の帽子の色は分からないとする. また,各生徒の帽子の色は赤であるとする. この時,先生が各生徒に順次,自分の帽子の色が分かるかと尋ねてもみな「分からない」と答える. ここで,先生が「少なくとも 1 人の帽子の色は赤である」と,各生徒に伝えまた順次,生徒に自分の帽子の色が分かるかと尋ねと,生徒 1 は「分からない」と答え,その答えを知った生徒 2 も「分からない」と答えるが,生徒 2 答えを知った生徒 3 は「分かった」と答える.

なぜ、この例が成立するかは以下のように考えられる。生徒1は他の生徒の帽子がどちらとも赤のため、「分からない」と答える。その答えを知った生徒2は「他の生徒の帽子の色は分かること」、「少なくとも1人の帽子の色は赤である」が共有知識であるため、つまり生徒1が「他の生徒の帽子の色は分かること」、「少なくとも1人の帽子の色は赤である」ことを知っていることを生徒2は知っているため、自身と生徒3の帽子の色は少なくとも一人は赤であることを知る。生徒3の帽子の色は赤であるため、生徒2は自身の帽子が赤でも白でもありうるので「分からない」と答える。生徒2の答えを知った生徒3も同じく「他の生徒の帽子の色は分かること」、「少なくとも1人の帽子の色は赤である」が共有知識である。もし、生徒3の帽子の色が白であるならば、生徒1は「分からない」と答え、生徒2は、生徒3が白であることから「分かった」と答えることを生徒3は知る。生徒2は「分からない」と答えたので、生徒3は自身が赤であることを知り、「分かった」と答えるのである。ここで特に面白いのは、先生が言ったことである「少なくとも1人の帽子の色は赤である」を全員知ってはいたが、他の生徒が知っているかはどうかは(先生が言う前は)知らなかったことである。

上記の例以外にも、3人同時に尋ねることを繰り返す、3人から N 人に拡張する、赤の帽子をかっぶっている生徒を K < N 人に拡張するといった場合でも、共有知識を用いることで、同じような結果を得ることができる.

7.6.2 ナッシュ均衡における合理的期待の仮定と合理性の共有知識

合理性の共有知識の仮定のみに基づいて、全てのプレーヤーがナッシュ均衡戦略を選ぶなら、ナッシュ均 衡概念は正当化されるが、合理性の共有知識の仮定を満たす戦略プロファイルが他にも存在するなら、ナッ シュ均衡は合理性の共有知識よりも強いことを仮定していることがわかる.

実は、合理性の共有知識のみから予想される戦略プロファイルは、ナッシュ均衡ではないものも含みうる。このことを見るために合理性の共有知識の状況で生起する戦略プロファイル $s \in S$ が満たすべき性質を考えていこう。

(1) 各プレーヤーは合理的なのだから、すべてのプレーヤーi について、

$$s_i \in R_i(S_{-i}) \ (= \{ s_i \in S_i \mid$$
ある $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $s_i \in R_i(s_{-i}) \})$

である。すなわち、合理的なプレーヤーは相手のプレーヤーの戦略のどれかに対しては最適反応である戦略だけをとるはずである(どんな場合を想定しても最適反応になりえないような戦略は、合理的なプレーヤーに選ばれるはずがない)。そこで、 $S_i^1=R_i(S_{-i})$ と書こう。またその直積を $S^1=S_1^1\times\cdots\times S_I^1$ と書く。

- (2) 各プレーヤーは,他のプレーヤーが全員合理的であり,合理的なプレーヤーならどの戦略に対しても最適ではない戦略はとらないと予想する.したがって S^1 に属する戦略プロファイルしかとられないということを予想できるのだから,すべてのプレーヤー i について, $s_i \in R_i(S^1_{-i})$ が成立するはずである.この右辺を S^2_i と書く. $S^1_{-i} \subseteq S_{-i}$ だから, $S^2_i = R_i(S^1_{-i}) \subseteq R_i(S_{-i}) = S^1_i$ である.したがってその直積を $S^2 = S^2_1 \times \cdots \times S^2_I$ と書くと, $S^2 \subseteq S^1$ である.
- (3) 同様にして、 $s_i \in R_i(S_{-i}^2)$ となるはずであり、この右辺を S_i^3 と書くと、 $S_i^3 \subseteq S_i^2$ である.やはり直積を S^3 と書くと、 $S^3 \subseteq S^2$.
- (n) 任意の正の整数 n についても、同じように、 $S_i^n = R_i(S_{-i}^{n-1})$ で $S_i^n \subseteq S_i^{n-1}$ が成立する.

 $s\in S$ が合理性の共有知識の状況で起こりうるということは、 $s\in \bigcap_{n=0}^\infty S^n$ が成立することである.この共通部分を S^∞ と書く.

7.6.2 命題

- (1) 任意のナッシュ均衡 $s \in S$ について, $s \in S^{\infty}$ である.
- (2) n を任意の正整数とする. $S^n=S^{n+1}$ ならば, $S^n=S^{n+1}=S^{n+2}=\cdots$ が成立する. よって $S^n=S^\infty$ である.
- (3) もしすべての i について S_i が有限集合ならば、ある n が存在して $S^n = S^\infty \neq \emptyset$ が成立する.
- (4) 任意の i について S_i はコンパクトであり, u_i が連続ならば $S^{\infty} \neq \emptyset$ である.

ただし、ナッシュ均衡が一意であっても S^{∞} は2点以上含むことがある.

練習問題 7.6.1 命題 7.6.2 を証明せよ.

命題 7.6.2 の (1) から,もし Γ_N に少なくとも 1 つのナッシュ均衡が存在し,かつ S^∞ が 1 点集合ならば,その元はナッシュ均衡であり,ナッシュ均衡は実はただ 1 つのみ存在するということがわかる.

7.6.3 例 (両性の争い) 次のような利得表をもつ両性の争い (battle of the sexes) ゲームを考えよう.

	L	R
T	2, 1	0,0
В	0,0	1,2

表 7.8 両性の争い

このゲームには純粋戦略の範囲で 2 つのナッシュ均衡 (T,L),(B,R) がある。 プレーヤー 1 の 2 つの戦略 T および B は,それぞれ相手の戦略 L および R に対する最適反応であるから, $S_1^1=\{T,B\}=S_1$ のままである。同様に, $S_2^1=\{L,R\}=S_2$ である。したがって命題 7.6.2 の (2) から, $S^\infty=S$ が成立する。

7.6.4 例 (マッチングペニー) 次のような利得表をもつマッチングペニー (matching pennies) ゲームを考えよう.

このゲームには純粋戦略ナッシュ均衡は存在しないが、どの戦略も相手のどれかの戦略に対しては最適反応なので、前の例と同じく $S^\infty=S$ である.

上の2つの例の相違点は、相手のどの戦略に対する最適反応であるかという最適反応の連鎖が異なることである.

	L	R
T	1, -1	-1, 1
B	-1, 1	1, -1

表 7.9 マッチングペニー

両性の争いの例 7.6.3 では,プレーヤー 1 の戦略 T が最適であるのはプレーヤー 2 の戦略 L に対してであり,その L が最適であるのは同じ T に対してであった.B への最適反応は R で,R への最適反応は B である.そこでこの例では (T,L) と (B,R) が共にナッシュ均衡である. $S^\infty=S$ なので,合理性の共有知のみでは,どちらのナッシュ均衡が選ばれるかは分からない.

マッチングペニーの例 7.6.4 では、プレーヤー 1 の戦略 T が最適であるのはプレーヤー 2 の戦略 L に対してだが、その L が最適であるのは T ではなく B に対してであり、 B はまた別の R に対して最適で、その R が T に対して最適、というようにして 4 項のサイクルができ、これらの戦略すべてが S_1^1 , S_2^1 に残る.

つまり、後者の例では予想が食い違っており、合理性の共有知識で言うような信念の無限の連鎖によって 正当化できる(合理性の共有知識だけでは排除できない)にもかかわらず、ナッシュ均衡ではない、実際に、 この例では(純粋戦略)ナッシュ均衡は存在しない。

7.6.5 例 (クールノーモデル) プレーヤーは 2 企業で,限界費用一定の同一の費用関数, $C_1(q)=C_2(q)=cq$ をもつとする.線形の需要関数は D(p)=(a-p)/b,ただし a>c>0,b>0 とする.価格は負でもあり得るものとする.逆需要関数は $D^{-1}(q)=a-bq$ であることに注意せよ.

競争均衡では、両企業は価格を所与として行動するから、均衡価格は p=c、総均衡生産量は $q_1+q_2=(a-c)/b$ である。仮に独占であるとすると、p=(1/2)a+(1/2)c、q=(a-c)/2b が成立する。

反応関数 R_1 は,

$$R_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_2 & \left(q_2 \le \frac{a-c}{b}\right) \\ 0 & \left(q_2 > \frac{a-c}{b}\right) \end{cases}$$

である. R_2 も同様だから,クールノー均衡 (ナッシュ均衡) は $q_1=R_1(q_2),q_2=R_2(q_1)$ から導出できて, $q_1=q_2=(a-c)/3b,p=(1/3)a+(2/3)c$ であり,価格と総生産量は競争均衡と独占の間にある.

以下では, $S_1=S_2={\bf R}_+$ とする.このとき, $S={\bf R}_+^2$ である. $S\supset S^1\supset S^2\supset S^3\supset \cdots$ が成立し, S^∞ は,前述のクールノー均衡の 1 点集合 $\{(\frac{a-c}{3b},\frac{a-c}{3b})\}$ に一致することを以下で示そう.

企業は同一の戦略集合と利潤関数をもつので、一方の企業についてだけ考える.まず、いかなる予想についても決して最適反応になりえない生産量をすべて除外すると.

$$S_i^1 = R_i(S_{-i}) = \left[0, \frac{a-c}{2b}\right]$$

が得られる.この右端は独占生産量である.これを $[\underline{s}^1,\overline{s}^1]$ と書くことにする.

次に、相手がこの中から生産量を選ぶとしたときに、最適反応になりえないものを除外すると、

$$S_i^2 = R_i(S_{-i}^1) = \left[\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\overline{s}^1, \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\underline{s}^1 \right] = \left[\frac{a-c}{4b}, \frac{a-c}{2b} \right]$$

とわかる.これを $[\underline{s}^2,\overline{s}^2]$ と書くことにする.上端は S_i^1 のそれに等しいが,下端は S_i^1 のそれより大きい.その次は,

$$S_i^3 = R_i(S_{-i}^2) = \left[\frac{a-c}{4b}, \frac{3(a-c)}{8b}\right]$$

である. 今度は下端が変わらず上端が小さくなった.

一般に、 $S_i^n = [\underline{s}^n, \overline{s}^n]$ とすると、

$$S_i^{n+1} = \left([\underline{s}^{n+1}, \overline{s}^{n+1}] \right) = \begin{cases} \left[\frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}\underline{s}^n, \overline{s}^n \right] & (n+1)$$
 が偶数)
$$\left[\underline{s}^n, \frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}\overline{s}^n \right] & (n+1)$$
 が奇数)

が成立し, したがって,

$$S_i^{n+2} = \left\lceil \frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}\underline{s}^n, \frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}\overline{s}^n \right\rceil$$

が成立する. つまり.

$$\underline{s}^{n+2} = \frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}\underline{s}^n$$

と

$$\overline{s}^{n+2} = \frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}\overline{s}^n$$

が成立する.

 $\underline{s}^n<(a-c)/3b$ ならば、いま得た表式から、 $\underline{s}^n<\underline{s}^{n+2}<\underline{s}^{n+4}<\cdots$ で成立し、 $n\to\infty$ のとき $\underline{s}^n\to(a-c)/3b$ が成立する(上に有界な単調増加列は収束し、その極限値は上の漸化式からただちに求まる)。 同様に、 $\overline{s}^n>(a-c)/3b$ ならば、 $\overline{s}^n>\overline{s}^{n+2}>\overline{s}^{n+4}>\cdots$ が成立し、 $n\to\infty$ で $\overline{s}^n\to(a-c)/3b$ が成立する(\underline{s}^n と同様)。 最後に、 $\underline{s}^0=0<(a-c)/3b$ と $\overline{s}^0=(a-c)/2b>(a-c)/3b$ に注意すれば、

$$\bigcap_{n} S^{n} = \left\{ \left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b} \right) \right\}$$

が成立することがわかる. これはナッシュ均衡戦略プロファイルの 1 点集合である. 例 7.6.5 を図解すると以下のようになる.

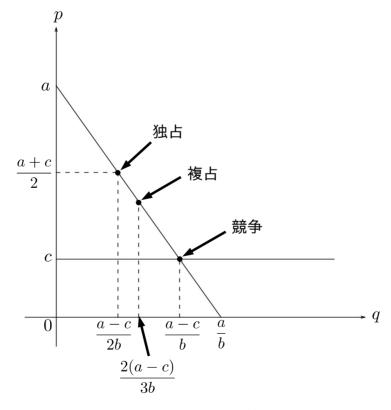


図 7.1 生産量の比較

7.7 展開形ゲーム **201**

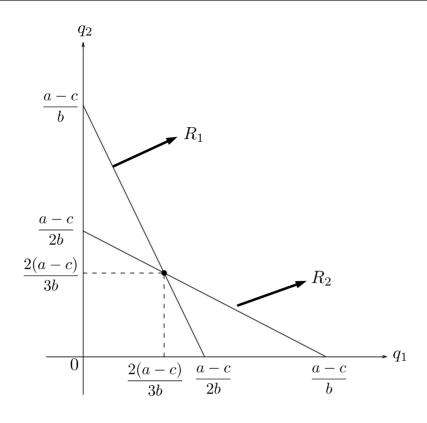


図 7.2 ナッシュ均衡

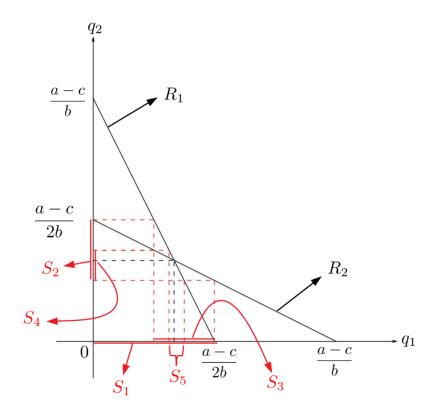


図 7.3 R_2 を使うことから S_1^n を定める iteration

7.7 展開形ゲーム

これ以降の内容は、MWG の第7章 C-D 節に相当する.

これまでの正規形ゲームでは,各プレーヤーの戦略 s_i は同時に選ばれると考えていた.同時にというのは,相手の選択を知らないで選ぶということである.そこで,相手の戦略を予想することができるのかを明らかにするために,合理化可能性に触れた.

以下では、全体の戦略そのものは同時に選ぶのだが、戦略を形作る個々の行動は逐次的に選ばれるという 状況で、各プレーヤーが個々の行動をとる順序や情報を明示的にモデル化する。これが本節以降で扱う展開 形ゲーム (extensive-form game) である。

展開形ゲームは常に正規形に書き直すことができるので、これまでのナッシュ均衡概念がそのまま適用できることになる。ところが、後述するが、そうすると 7.1 節のイントロダクションで述べた 4 点のうち最後の 2 点など見失われてしまう展開形特有の問題があるので、ナッシュ均衡概念を見直す必要が生ずる。また、複数の展開形ゲームが同一の正規形ゲームに帰着されることもある。

7.7.1 例 (シュタッケルベルク競争) 企業 1 は製品を 100 個作るか 10 個作るか決めることができる. それに応じて、すなわち企業 1 の生産量を観察したあとで、企業 2 は 50 個作るか 5 個作るかを決める*¹⁴. この状況は下のような樹形図の形に表すことができる. 点や枝に付した数字などについては、次の小節で一般の枠組みの定義と並行して例示に用いることとする.

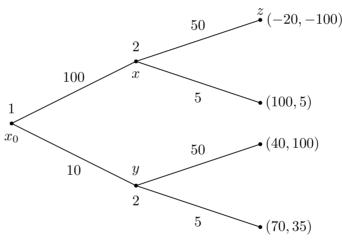


図 7.4 シュタッケルベルク競争

7.7.1 展開形ゲームの構成要素

展開形ゲームの一般的な定式化は,以下の構成要素から成る.

- 1. 非空有限集合 X^{*15} . 各点 $x \in X$ はノード (結節点) である.これは各プレーヤーが行動を選ぶタイミングを表している.行動を選ぶためにはそれまでの経緯を知らなければいけないので,それまでの経緯も表している.特に初期点 (initial node) と呼ばれるノードがただひとつ存在する.これはしばしば x_0 で表される.これはゲームが始まる状況について全てのプレーヤーが合意しているということである.
- 2. 写像 $p: X\setminus \{x_0\}\to X$. ノードの順序づけを表す. p(x) は x の直前のノードを意味するものとする. この順序は、どういう順番でゲームが展開していくかを表現する.

^{*14} 利得は、例 7.6.5 と同様の線形需要 $D^{-1}(q)=a-bq$ 、線形費用関数 $C_1(q)=C_2(q)=cq$ (共通)で、 $a=10,\,b=1/15,\,c=8$ としたものである.

 $^{^{*15}}$ 有限集合であるので,クールノー競争,シュタッケルベルク競争,繰り返しゲームなどを排除している.

7.7 展開形ゲーム **203**

ひとつのノードが枝分かれしているときには,その行先の (複数の) ノードに p を施すと,そのノードに戻る.上の例 7.7.1 の場合,たとえば $p(x)=p(y)=x_0$ である.任意のノードの直前のノードはただひとつのみ存在するので,p は写像である.

逆像 $p^{-1}(x)$ は、x の直後のノードの集合である.こちらのほうは 1 点とは限らない.

直後の点がないような点の集合 $\{x\in X\mid p^{-1}(x)=\varnothing\}$ を T と書き,終点 (terminal node),すなわちゲームが終わったことを示すノード全体の集合とする.後で定式化するように,ここに到達すると利得が確定する.

- 3. 非空有限集合 A. これは「行動」の集合である. 上の例 7.7.1 の場合, $A = \{100, 10, 50, 5\}$ である.
- 4. 写像 $\alpha: X\setminus \{x_0\}\to A$. $\alpha(x)$ は,p(x) から x に移るのに必要な行動を意味する.例では $\alpha(x)=100$ である. $\alpha\left(p^{-1}(x)\right)$ は x においてとることができる行動の集合である.
- 5. 非空有限集合 \mathcal{I} . これはプレーヤーと自然 (nature) とをあわせた集合である。自然は偶然的な事象の実現値を決める仮想的な主体である。たとえば、企業が研究開発に成功するか失敗するかという偶然的な事柄を、「自然」という架空のプレーヤーの行動として記述するのが慣習となっている。プレーヤーを 1 から I の番号、自然を番号 0 とすると、 $\mathcal{I} = \{0,1,\ldots,I\}$ と書ける。
- 6. 写像 $\iota: X\setminus T\to \mathcal{I}$. $\iota(x)$ は、x で行動をとるプレーヤーである. $\iota(x)\neq 0$ のとき x は意思決定 ノードで、 $\iota(x)=0$ のときチャンスノード(自然が行動する手番)である. 上の例 7.7.1 の場合、 $\iota(x_0)=1,\iota(x)=\iota(y)=2$ である. ι は $X\setminus T$ 上の分割を与える.
- 7. チャンスノードでの確率分布 $\beta_0: \iota^{-1}(0) \times A \to [0,1]$. 各チャンスノードにおいて,各「行動」に与えられる確率を表す.つまり,
 - (a) 任意の $(x,a) \in \iota^{-1}(0) \times A$ について、 $a \notin \alpha(p^{-1}(x))$ ならば、 $\beta_0(x,a) = 0$.
 - (b) 任意の $x \in \iota^{-1}(0)$ について, $\sum_{a \in A} \beta_0(x, a) = 1$.
 - (a) と (b) より,この和の範囲は $\sum_{a \in \alpha(p^{-1}(x))}$ と等しい.つまり, $\beta_0(x,\cdot) \in \Delta\left(\alpha\left(p^{-1}(X)\right)\right)$ である.
- 8. (利得) 関数 $u: (\mathcal{I}\setminus\{0\})\times T\to \mathbf{R}$. これは、任意のプレーヤー $i\in\mathcal{I}\setminus\{0\}$ について、 $u_i:T\to \mathbf{R}$ を定めることおよび $u:T\to \mathbf{R}^{|\mathcal{I}\setminus\{0\}|}$ と定めることと同値である.

さらに、これらの構成要素は、整合性 (consistency) の条件を満たさなければならない. たとえば、

- p(x)=y かつ p(y)=x は成立しない.より一般に, $p(x_1)=x_2, p(x_2)=x_3, \cdots, p(x_n)=x_1$ が成立する x_1,x_2,\cdots,x_N は存在しない.すなわち,サイクルがあってはならない.
- $x \neq y$ かつ $p(x) = p(y) \ (= z)$ ならば、 $\alpha(x) \neq \alpha(y)$ である.下の図を参照.

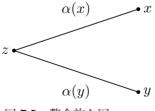
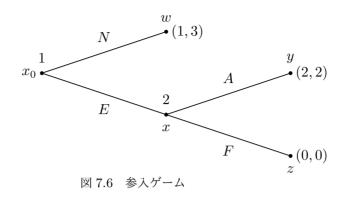


図 7.5 整合的な図

この性質により、任意の $x\in X$ に対して、ある (x_1,x_2,\cdots,x_N) が存在して、任意の $n=1,\cdots,N$ について $p(x_n)=x_{n-1}$ が成立する。よって、X の任意の元は、初期点からそこに至る経路と同一視できる。特に $x\in T$ である場合、このような経路を「プレイ」とも呼ぶ。利得関数の定義域を、T ではなく、プレイの集合とすることもできる。

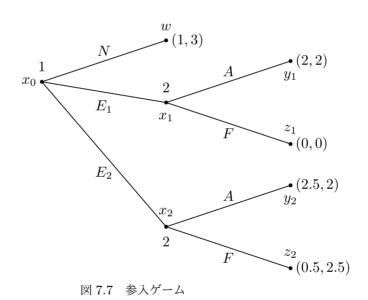
7.7.2 例 企業 1 は参入企業,企業 2 は既存企業で,もし企業 1 が参入 (E) すると,企業 2 はそれに

対して戦う (Fight, F) か受容する (Accommodate, A) かを決定する. この例では, $T = \{w, y, z\}$,



 $A=\{N,E,A,T\}$ であり,意思決定ノードでの行動者は $\iota(x_0)=1,\iota(x)=2$ で与えられ,x を導く行動は $\alpha(x)=E$ で与えられる.

7.7.3 例 次のように,企業 1 には E_1 , E_2 の 2 通りの参入のしかたがあるものとする. E_2 はたとえば低品質のものを使ってコストを下げて参入するというように解釈できる.



展開形ゲームにおける新しい均衡概念をまだ定式化していないが,このゲームで常識的にどんなことが起こりそうかを考えてみよう.企業 1 は,参入しないと利得 1 が確定する.一方, E_1 で参入すると 2 か 0 だが,企業 2 はそのとき A を選択するだろうから,2 になる. E_2 で参入すると,企業 2 は F を選択するだろうから 0.5 になる.こうした先読みをすると,企業 1 はおそらく最初の E_1 で参入するだろう.

この議論で大事だったのは、企業 1 が E_1 , E_2 のどちらで参入してきたのかを、企業 2 のほうが区別できたことである。ただし、低品質かどうかというのは、使ってみないとなかなかわからないものである。そこで、 E_1 , E_2 という 2 通りの参入のしかたを他社が区別できないとするとどうなるかということが問題になる。

企業 1 の立場で考えてみよう. 仮に企業 2 が A を選ぶなら, E_1 で参入すれば利得 2, E_2 でいけば 2.5 なので, E_2 のほうがよい.企業 2 が F を選ぶ場合も,やはり E_2 のほうがよい.つまり,企業 2 が,参入のしかたを区別できず,企業 1 の行動に対して個別に対応する行動を選べないとするならば, E_2 は E_1 を強支配することになる.よって,企業 1 は E_2 で参入するだろう.

7.7 展開形ゲーム **205**

このように、プレーヤーが持つ情報が異なれば、プレーヤーがとる行動も異なりうる.よって、展開形 ゲームを描写するときに、手番や順序を記述するだけでなく、どのノードをプレーヤーが区別できるかをも 記述する必要がある. どれを区別できるかで選べる行動が変わり、正確に均衡を予想できないのである.

そこで、先に触れなかった展開形ゲームの最後の構成要素を導入しよう.

9. $X\setminus T$ の分割 $\mathcal{H}: 2$ つのノード x と y が \mathcal{H} の同じ要素に属するとは,x と y を区別できないということと解釈する.これを $x\sim y$ と書く.ゲームツリーでは,区別できないノードを点線で結んで表現するのが慣習である.

例 7.7.3 では,まず $X \setminus T = \{x_0, x_1, x_2\}$ であり,区別できる場合には $\mathcal{H} = \{\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}\}$,区別できない場合には $\mathcal{H} = \{\{x_0\}, \{x_1, x_2\}\}$ である.

 $X \setminus T$ の分割で各プレーヤーのもっている情報を描写しようというのが、 \mathcal{H} を導入する目的である. この \mathcal{H} を情報分割 (information partition)、 \mathcal{H} に属する各々の要素を情報集合 (information set) という.

これもやはり整合性の条件をみたしていなければいけない.2 つのノードが区別できない,すなわち $x \sim y$ とする.そのときは $\iota(x) = \iota(y)$,すなわちその点で行動するプレーヤーが同じでなければいけない.換言すれば, \sim が生成する $X \setminus T$ 上の分割は, ι が生成する $X \setminus T$ 上の分割と少なくとも同程度には細かい.また,とれる行動も同じ,すなわち, $x \sim y$ ならば $\alpha(p^{-1}(x)) = \alpha(p^{-1}(y))$ でなければならない.

次に、展開形ゲームの重要な概念である、完全情報を定義する。ここで、プレーヤーiの情報集合の集合を \mathcal{H}_i と書く、 $(\mathcal{H}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ は \mathcal{H} の分割である。

7.7.4 定義 展開形ゲームにおいて, \mathcal{H} の任意の要素が一点集合(singleton)である場合,すなわち $x \sim y$ が成立するのは x = y のときに限られる場合,その展開型ゲームは完全情報であると呼ぶ.

以上により、展開形ゲーム $\Gamma_E = (X, p, A, \alpha, \mathcal{I}, \iota, \beta_0, u, \mathcal{H})$ が定義された.

7.7.2 完全記憶の仮定

分析の都合上排除したい情報分割があるので、それを説明しよう.

7.7.5 例 次のようなゲームツリーを考えよう.

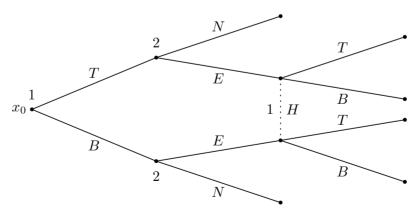
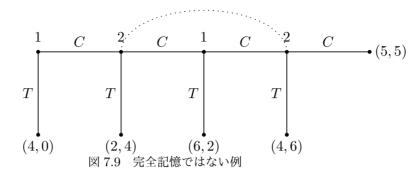


図 7.8 完全記憶ではない例

もしこの点線で結ばれた 2 点をプレーヤー 1 が区別できなかったならば,プレーヤー 1 は自分が最初に とった行動が T だったか B だったか忘れていることになる.完全記憶 (perfect recall) の仮定は,こういった状況を排除する仮定である.

7.7.6 例 次のようなゲームツリーを考えよう.この例ではプレーヤー 2 は,プレーヤー 1 から自分の手番 に回ってきたのが最初の手番なのか 2 回目なのかがわからなくなっている.つまり,ある (x_1, x_2, \cdots, x_N) が存在して, $p(x_2) = x_1, p(x_3) = x_2, \cdots, p(x_N) = x_{N-1}$ かつ $x_1 \sim x_N$ が成立している.



この講義ノートでは触れないが、完全記憶にはいろいろな定義の仕方があり、定義のしかたによっては 2 番目の例が排除されないことがある。Kreps(1990) は簡単なバージョン、Myerson(1991) はもう少し複雑なバージョンの定義を与えている。

7.7.3 展開形ゲームにおける純粋戦略の定義

展開形ゲームにおける戦略とは、各ノードでどの行動をとるかを完全に定めた計画である.以下で厳密に 定義する.

 $i \neq 0$ とする。プレーヤーi の意思決定ノードの全体は $\iota^{-1}(i)$ である。 $x \in \iota^{-1}(i)$ (プレーヤーi が動く手番), $y \in p^{-1}(x)$ (x の直後の点の1 つ)とすると,x から y に行くには行動 $\alpha(y)$ が必要である。展開形ゲームのプレーヤーi の純粋戦略 s_i とは,任意の $x \in \iota^{-1}(i)$ に対して $\alpha(p^{-1}(x))$ の元を対応させることであり,ノード $x \in \iota^{-1}(i)$ でとる行動を $s_i(x)$ と書く.ここで, \mathcal{H} に従って, $x \sim y$ ならば $s_i(x) = s_i(y)$ であると仮定する.これも整合性の要請である.以上をまとめると,展開形ゲームの純粋戦略 s_i は, \mathcal{H} -可測な写像 $s_i:\iota^{-1}(i) \to A$ であり,

 $\{s_i = (s_i(x))_{x \in \iota^{-1}(i)} \mid$ 任意の $x \in \iota^{-1}(i), y \in \iota^{-1}(i)$ に対して $s_i(x) \in \alpha(p^{-1}(x)),$ かつ $x \sim y$ ならば $s_i(x) = s_i(y)\}$ の要素である.この集合を S_i と書くことにする.

7.7.7 注意 純粋戦略は、自分または他のプレーヤーの行動いかんによっては実際には到達しないノードについても、そこでどんな行動をとるかという計画を記述している。これは、そのような計画が与えられないと、他のプレーヤーの利得最大化条件を定義できないからである。したがって、戦略には、他のプレーヤーの予想(期待)という側面がある。均衡の定義にあたり、この予想が正しいという合理的期待の仮定を後で課す。

この純粋戦略によって,展開形ゲームから正規形ゲームを構成することが出来る. $S=S_1 \times \cdots \times S_I$ と書く.もし $\iota^{-1}(0)=\varnothing$ ならば,すなわち自然の手番がないならば,1 つの戦略プロファイル $s\in S$ に対して,プレイと終点がそれぞれ 1 つ定まる.このことを以下で確かめよう.まず, $p(x_1)=x_0$ を満たすとする.ノード x_1 に到達するためには,初期点 x_0 において行動 $\alpha(x_1)$ が取られている必要がある.よって,もし s がとられているときに x_1 に到達するなら, $s_{\iota(x_0)}(x_0)=\alpha(x_1)$ が成立する.同様に, $p(x_2)=x_1$ を満たすノード x_2 に到達するためには,やはり行動 $\alpha(x_2)$ が取られる必要がある.よって,もし s がとられているときに x_2 に到達するなら, $s_{\iota(x_1)}(x_1)=\alpha(x_2)$ が成立する. $x_N\in T$ とし,これを N 回目まで繰り返すと, $s_{\iota(x_{n-1})}(x_{n-1})=\alpha(x_n)$ が $n=1,\ldots,N$ について得られる.一方,自然の手番がある場合,s によって決まるのは T 上の確率分布である.この点については後で記述する.

7.7 展開形ゲーム **207**

この s によって u_i は S 上で定義されたと考えられるので $u_i:S\to R$ を定義できる.これは戦略プロファイルが決まれば利得が決まるということだから,正規形が与えられたことになる.これは展開形ゲームの正規形表現と呼ばれる.また,その正規形ゲームにおけるナッシュ均衡を,展開形ゲームのナッシュ均衡と呼ぶ.

7.7.8 注意 プレーヤーは戦略を展開形ゲームが始まる前に選ぶ、つまりプレーヤーはゲームが実際に始まる前に、自らのノードでの行動を全て計画しており、実際にはゲームが始まると、もともと決めていた計画を粛々と行動を実行すると仮定されている.

7.7.4 混合戦略と行動戦略

各プレーヤーの戦略集合を拡張する二つの方法を与えよう。第一に、プレーヤーが純粋戦略を確率的に選ぶように戦略集合を拡張する。この戦略を混合戦略と呼び、プレーヤーi の混合戦略を σ_i で表す。この集合を Σ_i で書く。これは、展開形ゲームの純粋戦略に対して、定義 7.4.7 とまったく同様に定義される。すなわち、7.4.7 節で定めたように、展開形ゲームの混合戦略とは、 S_i が有限なら

$$\{\sigma_i: S_i \to \mathbf{R}_+ \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}$$

である.ここで,純粋戦略は混合戦略を確率 1 または 0 で選ぶ戦略と考えられるので $S_i \subset \Sigma_i$ が成り立つ.この混合戦略に対する効用は,正規形ゲームの時と同様に定義することもでき,

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma_1(s_1) \cdots \sigma_I(s_I) u_i(s)$$

である. これにより、混合戦略を考慮しても展開形ゲームの正規形表現が可能である.

第二に、プレーヤーが各ノード (厳密には情報集合) での行動を確率的に選ぶように戦略集合を拡張する. この戦略を行動戦略 (behavioral strategy) と呼び、プレーヤーi の行動戦略を b_i で表す. 行動戦略の集合、

$$\{\beta_i: \iota^{-1}(i) \to \Delta(A) \mid \text{任意の}, x \in \iota^{-1}(i), y \in \iota^{-1}(i)$$
に対して $\beta_i(x) \in \Delta(\alpha(p^{-1}(x))),$ かつ $x \sim y$ ならば $\beta_i(x) = \beta_i(y)\}$

を、 B_i と書く、行動戦略 β_i における、ノード $x \in \iota^{-1}(i)$ で行動 a をとる確率を $\beta_i(x,a)$ と書くと、 $\sum_{a \in \alpha(p^{-1}(x))} \beta_i(x,a) = 1$ が成立する、純粋戦略は行動戦略の特殊例であり、各ノードでの行動を確率 1 または 0 でとると考えることが出来るので $S_i \subset B_i$ が成り立つ、 $B = B_1 \times \cdots \times B_I$ と書く、また、 $\beta_{\iota^{-1}(x_{n-1})}(x_{n-1},\alpha(x_n))$ はノード x_{n-1} から、その直後のノード x_n に移る確率である、 $x \sim y$ ならば $\beta_i(x) = \beta_i(y)$ なので、 β_i を \mathcal{H} 上の写像と考えることができる、つまり、 $\beta_i = (\beta_i(H))_{H \in \mathcal{H}}$ と書ける、分布のプロファイル $(\beta_i(H))_{(i,H) \in (I \setminus \{0\}) \times \mathcal{H}, H \in \mathcal{H}_i}$ は独立であると仮定する。

 $x\in T$ とし, $(x_1,\cdots,x_{N(x)})$ を x に至るプレイ,すなわち,任意の $n\geq 1$ について $p(x_n)=x_{n-1}$ とする.よって $x=x_{N(x)}$ である. β_0 が「自然」が与える確率分布であることを想起すると,x が実現する確率 $\pi(x|\beta)$ は,独立性の仮定より,

$$\pi(x \mid \beta) = \prod_{n=1}^{N(x)} \beta_{\iota^{-1}(x_{n-1})}(x_{n-1}, \alpha(x_n))$$
 (7.9)

である. これを用いて、 $u_i: B \to \mathbf{R}$ を以下のように定義する.

$$u_i(\beta) = \sum_{x \in T} \pi(x|\beta) u_i(x) = \sum_{x \in T} \left[\prod_{n=1}^{N(x)} \beta_{\iota^{-1}(x_{n-1})}(x_{n-1}, \alpha(x_n)) \right] u(x)$$

7.7.9 注意 これまで,プレーヤーi の純粋戦略 s_i ,行動戦略 β_i をプレーヤーi の手番 $x \in \iota^{-1}(i)$ 上で 定義した.しかし,これらの戦略をプレーヤーi の情報集合の集合 \mathcal{H}_i 上に定義する方が都合が良い場合がある.プレーヤーi の純粋戦略 s_i ,行動戦略 b_i は,情報集合の集合 \mathcal{H}_i 上に対しても,手番 $\iota^{-1}(i)$ 上に定義したときと同様に定義できる.すなわち,プレーヤーi の純粋戦略 s_i は $s_i:\mathcal{H}_i\to A$ であり,各情報集合 $H\in\mathcal{H}_i$ 上で取られる行動を $s_i(H)$ と書くと, $S_i=\{(s_i(H))_{H\in\mathcal{H}_i}|$ 任意の $H\in\mathcal{H}_i$ に対して $s_i(H)\in\alpha(p^{-1}(H))\}$ と定義することも可能である.同様にプレーヤーi の行動戦略 β_i も $\beta_i:\mathcal{H}_i\to\Delta(A)$ であり, $\beta_i=\{(\beta_i(H))_{H\in\mathcal{H}_i}|$ 任意の $H\in\mathcal{H}_i$ に対して $\beta_i(H)\in\Delta\left(\alpha(p^{-1}(H))\right)\}$ と定義することもできる.こちらの定義を採用している文献もある.

一般に、任意の行動戦略に対して、それと同じ T 上の確率を与える混合戦略が存在することが知られている。以下では、完全記憶の条件が満たされるならば、展開形ゲームの混合戦略と行動戦略、およびこれらの複合戦略 $\Delta(B_i) \equiv \Gamma_i$ は同じ確率分布を T 上で与える、すなわち同じ期待利得をもたらすことを証明する。 $\Delta(B_i) \equiv \Gamma_i$ は B_i で定まる確率分布をランダムに選択しているものであり、複合くじのようなものである* 16 .

7.7.10 定理 (Kuhn の定理) もし展開形ゲームが完全記憶を満たすならば、任意の $i \neq 0$ 、 $\gamma_i \in \Gamma_i$ に対し、ある $\beta_i \in B_i$ 、 $\sigma_i \in \Sigma_i$ が存在し、任意の $\gamma_{-i} \in \Gamma_{-i}$ に対し、 (γ_i, γ_{-i}) 、 (σ_i, γ_{-i}) 、 (β_i, γ_{-i}) のいずれも同じ確率分布を T 上に与える。 すなわち、これらの(戦略プロファイルにおいて全てのプレーヤーの)期待利得プロファイルは同じである。

よって、戦略プロファイルは、一般性を失うことなく、 $\Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_I$ または $B_1 \times \cdots \times B_I$ に属すると仮定できる.

また,より一般に以下の命題が成立する.

7.7.11 命題 任意の $i \neq 0$, $\beta_i \in B_i$ に対し、ある $\sigma_i \in \Sigma_i$ が存在して、任意の $\gamma_{-i} \in \Gamma_{-i}$ に対し、 (β_i, γ_{-i}) と (σ_i, γ_{-i}) が同じ確率分布を T 上に与える.

7.7.10 の証明 $x' \in T$ とする. x' を達成する経路を (x_1, x_2, \cdots, x_N) とする. つまり、任意の $n \ge 1$ について $p(x_n) = x_{n-1}$ が成立し、 $x' = x_N$ である. ここで、任意の i について、

$$\mathcal{N}_i = \{ n = 1, \dots, N \mid \iota(x_{n-1}) = i \}$$

とすると、 $(\mathcal{N}_i)_{i=0,1,\dots,I}$ は $\{1,\dots,N\}$ の分割である。各 \mathcal{N}_i は x' へ導くプレイの中でプレーヤー i が行動を選ぶノードの集合である。

 γ が x' に与える確率は,

$$\sum_{\beta \in B} \pi(x'|\beta) \left(\prod_{i=1}^{I} \gamma_i(\beta_i) \right)$$

$$= \sum_{\beta \in B} \left(\prod_{n=1}^{N(x_N)} \beta_{\iota(x_{n-1})}(x_{n-1}, \alpha(x_n)) \right) \times \left(\prod_{i=1}^{I} \gamma_i(\beta_i) \right)$$

$$= \sum_{\beta \in B} \prod_{i=0}^{I} \left(\prod_{n \in \mathcal{N}_i} \beta_i(x_{n-1}, \alpha(x_n)) \gamma_i(\beta_i) \right)$$

$$= \prod_{i=0}^{I} \sum_{\beta \in B} \left(\prod_{n \in \mathcal{N}_i} \beta_i(x_{n-1}, \alpha(x_n)) \gamma_i(\beta_i) \right)$$

 $^{^{*16}}$ ここでは複合戦略 $\Delta(B_i)$ は、有限個の B_i の元にのみ正の確率を付与するとする.

7.7 展開形ゲーム **209**

ここで、 $\gamma_0(\beta_0)=1$ とした.これは、i に関する積であり、各因数 (factor) には β_i と γ_i が登場する.したがって、以下のことを示せば十分である.任意の i と $\gamma_i\in\Gamma_i$ に対して、ある $\beta_i^*\in B_i$ とある $\sigma_i\in\Sigma_i$ が存在し、

$$\sum_{\beta_{i} \in B_{i}} \prod_{n \in \mathcal{N}_{i}} \beta_{i}^{*}(x_{n-1}, \alpha(x_{n})) \gamma_{i}(\beta_{i}) = \prod_{n \in \mathcal{N}_{i}} \beta_{i}^{*}(x_{n-1}, \alpha_{i}(x_{n}))$$

$$= \sum_{\{s_{i} \in S_{i} \mid \text{ 任意の } n \in \mathcal{N}_{i} \text{ について}, \alpha(x_{n}) = s_{i}(x_{n-1})\}} \sigma_{i}(s_{i})$$

ここでは二つの特殊ケースについて証明を与える。

(1) $\gamma_i=\beta_i\in B_i$ のケース. $\beta_i^*\in B_i$ が与えられたとする. $\beta_i^*=(\beta_i^*(H,\alpha))_{H\in\mathcal{H}_i}$ とする. この, β_i^* に対して σ_i を以下のように定める. 任意の $s_i\in S_i$ に対して

$$\sigma_i(s_i) = \prod_{x \in \iota^{-1}(i)} \beta_i^*(x, s_i(x))$$

この時、両辺を $\{s_i \in S_i |$ 任意の $n \in \mathcal{N}_i$ に対して, $\alpha(x_n) = s_i(x_{n-1})\}$ について足し合わせると、左辺は、

$$\sum_{\{s_i \in S_i | \text{ 任意の } n \in \mathcal{N}_i} \sigma_i(s_i)$$

であり、右辺は任意の $n \in \mathcal{N}_i$ について、 $s(x_{n-1})$ で $\alpha(x_n)$ をとる行動戦略の組み合わせを全て足し合わせたものなので、

$$\prod_{n \in \mathcal{N}_i} \beta_i^*(x_{n-1}, \alpha(x_n))$$

に等しい. よって,

$$\sum_{\{s_i \in S_i \mid \text{ 任意の } n \in \mathcal{N}_i \text{ に対して}, \alpha(x_n) = s_i(x_{n-1})\}} \sigma_i(s_i) = \prod_{n \in \mathcal{N}_i} \beta_i^*(x_{n-1}, \alpha(x_n))$$

が成立する.

(2) $\gamma_i = \sigma_i \in \Sigma_i$ のケース. 任意の $x \in X$ について,

$$S_i(x) = \{s_i \in S_i |$$
ある $s_{-i} \in S_{-i}$ が存在して, $\pi(x|s_i, s_{-i}) = 1\}$

と定義する*17. σ_i に対して, $\beta_i^* \in B_i$ を次のように定める.

$$\beta_i^*(x,a) = \begin{cases} \sum_{s_i \in S_i(y)} \sigma_i(s_i) \\ \sum_{s_i \in S_i(x)} \sigma_i(s_i) \end{cases}, \quad \left(\sum_{s_i \in S_i(x)} \sigma_i(s_i) > 0 \text{ かつ } p(y) = x, \alpha(y) = a \text{ ならば} \right)$$
任意, (さもなくば)

また、完全記憶より $\iota(x)=\iota(y)=i$ なので、 $x\sim y$ ならば、初期点 x_0 から x および y に至るプレイに登場する $\iota^{-1}(i)$ の要素は同一なので、 $S_i(x)=S_i(y)$ が成立する. よって、もし $p(z)=x, p(w)=y, \alpha(z)=\alpha(w)$ ならば、 $\beta_i^*(x)=\beta_i^*(y)$ が成立し、

$$\prod_{n \in \mathcal{N}_i} \beta_i^*(x_{n-1}, \alpha(x_n))$$

$$= \prod_{n \in \mathcal{N}_i} \frac{\sum_{s_i \in S_i(x_n)} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in S_i(x_{n-1})} \sigma_i(s_i)}$$

$$= \sum_{s_i \in S_i \mid H \neq 0, n \in \mathcal{N}_i \mid S \neq 1, T, \alpha(x_n) = s_i(x_n, s_n)} \sigma_i(s_i)$$

 $^{^{*17}}$ (p(x)=y ならば、 $S_i(x)=\bigcup_{y\in p^{-1}(x)}S_y$ に注意して) (s_i,s_{-i}) がもたらすプレイが x を含むということ.

が成立する.

///

7.7.12 例 7.7.3 の展開形ゲームを用いて Kuhn の定理が完全記憶の下で成り立つことを例証する.

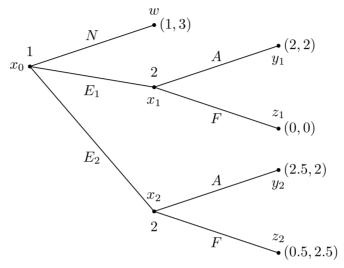


図 7.10 Kuhn の定理の例証

プレーヤー 1 の純粋戦略の集合 S_1 は $\{N,E_1,E_2\}$ である。また,混合戦略 σ_1 はこの 3 つの純粋戦略に確率を置くものである。 $\sum_{s_1\in S_1}\sigma_1(s_1)=1$ なので,独立な変数は 2 つであることに注意してほしい。行動戦略 β_1 は,プレーヤー 1 の手番は初期点にしかないので,混合戦略と一致する。

プレーヤー 2 の純粋戦略 s_2 は $(s_2(x_1), s_2(x_2))$ で表され,(A,A), (A,F), (F,A), (F,F) の 4 通りである. 行動戦略はノード x_1 で A を選ぶ確率とノード x_2 で A を選ぶ確率で特定化される.したがって,2 つの変数で記述される.

このようなもとで、例えばプレーヤー 1 が行動 E_1 を、プレーヤー 2 が行動 A を選ぶようなゲームのプレイ $x'=(x_0,x_1,y_1)\in X$ が実現する確率を求めよう。両プレーヤー共に混合戦略をとる場合、x' が実現する確率は、

$$\pi(y_1|\sigma) = \sigma_1(E_1)\sigma_2((A,F)) + \sigma_1(E_1)\sigma_2((A,A))$$

である.一方,両プレーヤー共に行動戦略をとる場合,

$$\pi(y_1|\beta) = \beta_1(x_0, E_1)\beta_2(x_1, A)$$

である. ここで, 所与の混合戦略 σ に対して, 行動戦略 β を以下のように定める.

$$\beta_{1}(x_{0}, A) = \frac{\sigma_{1}(A)}{\sum\limits_{s_{1} \in S_{1}} \sigma_{1}(s_{1})} = \sigma_{1}(A), \beta_{1}(x_{0}, E_{1}) = \frac{\sigma_{1}(E_{1})}{\sum\limits_{s_{1} \in S_{1}} \sigma_{1}(s_{1})} = \sigma_{1}(E_{1}), \beta_{1}(x_{0}, E_{2}) = \frac{\sigma_{1}(E_{2})}{\sum\limits_{s_{1} \in S_{1}} \sigma_{1}(s_{1})} = \sigma_{1}(E_{2})$$

$$\beta_{2}(x_{1}, A) = \frac{\sigma_{2}((A, F)) + \sigma_{2}((A, A))}{\sum\limits_{s_{2} \in S_{2}} \sigma_{1}(s_{2})} = \sigma_{2}((A, F)) + \sigma_{2}((A, A))$$

$$\beta_{2}(x_{2}, A) = \frac{\sigma_{2}((F, A)) + \sigma_{2}((A, A))}{\sum\limits_{s_{2} \in S_{2}} \sigma_{1}(s_{2})} = \sigma_{2}((F, A)) + \sigma_{2}((A, A))$$

7.7 展開形ゲーム **211**

 $\pi(y_1|\beta(\sigma))$ を計算すると、実際に

$$\pi(y_1|\beta(\sigma)) = \sigma_1(E_1)(\sigma_2((A,F)) + \sigma_2((A,A))) = \pi(y_1|\sigma)$$

が成立する. 他方, 所与の行動戦略 β に対して, 混合戦略 σ を以下のように定める.

$$\sigma_1(A) = \beta_1(x_0, A), \sigma_1(E_1) = \beta_1(x_0, E_1), \sigma_1(E_2) = \beta_1(x_0, E_2)$$

$$\sigma_2((A, A)) = \beta_2(x_1, A)\beta_2(x_2, A), \sigma_2((A, F)) = \beta_2(x_1, A)(1 - \beta_2(x_2, A))$$

$$\sigma_2((F, A)) = (1 - \beta_2(x_1, A))\beta_2(x_2, A), \sigma_2((F, F)) = (1 - \beta_2(x_1, A))(1 - \beta_2(x_2, A))$$

ここで, $\pi(y_1|\sigma(\beta))$ を計算すると,

$$\pi(y_1|\sigma(\beta)) = \beta_1(x_0, E_1)\beta_2(x_1, A)\beta_2(x_2, A) + \beta_1(x_0, E_1)\beta_2(x_1, A)(1 - \beta_2(x_2, A)) = \pi(y_1|\beta)$$

が成立する.

7.7.13 例 完全記憶の仮定が満たされないとき,T 上に同じ確率分布を与える行動戦略が存在しないような混合戦戦略が存在することを例 7.7.5 によって確認する.

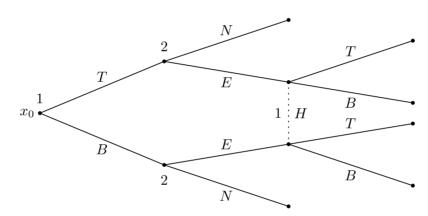


図 7.11 完全記憶ではない例

この展開形ゲームのプレイの終点を,各ノードに至るプレイ上でプレーヤー 1 が取った行動で呼ぶことにする.例えば,2 番目の終点を TT と呼ぶ.プレーヤー 1 の純粋戦略の集合は $\{TT,TB,BT,BB\}$ を含む.例えば, $\sigma_1(TT)=1/2,\sigma_1(BB)=1/2$ という混合戦略を考える.この展開形ゲームに対して,プレーヤー 1 が x_0 で T に与える確率を p,H で T に与える確率を q とする.

プレーヤー 1 の混合戦略 $\sigma_1(TT)=\sigma_1(BB)=1/2$ が終点に与える確率と任意のプレーヤー 2 の行動戦略に対して,同じ確率を与えるようなプレーヤー 1 の行動戦略は以下の 4 本の方程式を満たさなければならない.

$$pq = 1/2$$

 $p(1-q) = 0$
 $(1-p)q = 0$
 $(1-p)(1-q) = 1/2$

4本の方程式を満たす p,q は存在しない.したがって,完全記憶が成り立たないもとで,任意の $\sigma_i \in \Sigma_i$ に対して,T 上に同じ確率分布を与える $\beta_i \in B_i$ が常に存在するわけではないことがこの例によって確認できた.

7.7.14 例 より簡単な例を使って、完全記憶の仮定が満たされないとき、混合戦略では生成できるが、行動戦略では生成できない T 上の確率分布が存在することを確認する. ゲームの要素は次の通りである.

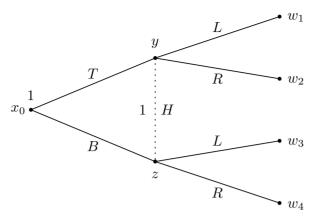


図 7.12 完全記憶ではない例 (2)

 $\mathcal{I} = \{0,1\}, T = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}, p(y) = p(z) = x_0, \iota(x_0) = \iota(y) = \iota(z) = 1, \mathcal{H} = \{\{x_0\}, \{y, z\}\}, A = \{T, B, L, R\}, \alpha(y) = T, \alpha(z) = B.$ ゲームツリーで表現すると図 7.12 のようになる.

純粋戦略は x_0 と H でとる行動を決めるものなので, $s=(s(\{x_0\}),s(\{y,z\}))\in\{(T,L),(T,R),(B,L),(B,R)\}$ である.各純粋戦略で到達されるターミナルノードは表 7.10 のようになる.

	L	R
T	w_1	w_2
B	w_3	w_4

表 7.10 純粋戦略とターミナルノードの関係

 σ を混合戦略とすると,混合戦略によって各ターミナルノードに到達する確率は, w_1 が $\sigma(TL)$, w_2 が $\sigma(TR)$, w_3 が $\sigma(BL)$, w_4 が $\sigma(BR)$ である.したがって,混合戦略は T 上の任意の確率分布を生成可能 である.

他方,行動戦略は($(\beta(\{x_0\},T),\beta(\{x_0\},B))$, $\beta(\{y,z\},L)$, $\beta(\{y,z\},R)$)で表される.この確率を((p,1-p),(q,1-q))と書く.独立性の仮定より,行動戦略によって各ターミナルノードに到達する確率は, w_1 が pq, w_2 が p(1-q), w_3 が (1-p)q, w_4 が (1-p)(1-q) である.先ほどの表を利用すると表7.11 のようになる.

	L	R
T	pq	p(1-q)
B	(1-p)q	(1-p)(1-q)

表 7.11 行動戦略が生成する確率分布

よって、混合戦略に比べて行動戦略では自由度が低いので、完全記憶の仮定が満たされないとき、混合戦略では生成できるが、行動戦略では生成できない T 上の確率分布が存在する。例えば、相関均衡で登場した例のような表 7.12 の確率分布は、行動戦略では生成できない T 上の確率分布である。

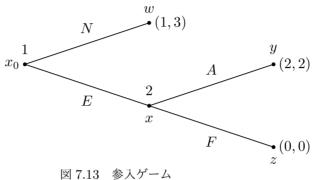
	L	R
T	$\frac{1}{2}$	0
B	0	$\frac{1}{2}$

表 7.12 行動戦略では生成できない確率分布

ちなみに、行動戦略によって生成される確率分布を達成する混合戦略 σ は $(\sigma(TL), \sigma(TR), \sigma(BL), \sigma(BR)) =$ (pq, p(1-q), (1-p)q, (1-p)(1-q)) を満たす.

7.8 部分ゲーム完全均衡

7.8.1 例 例 7.7.2 のゲームを考えよう. ゲームツリーを以下に再掲しておく.



このゲームの正規形表現は以下の通り.

	A	F
N	1,3	1,3
E	2,2	0,0

表 7.13 正規形表現

この利得表を見ると、ナッシュ均衡は (N,F) と (E,A) の 2 つがある.こうして正規形の表しか与えられ ていないときには、2つのナッシュ均衡はどちらも同様にもっともらしいが、展開形ゲームが与えられてい るときには、M 7.7.3 で行った「常識的にどんなことが起こりそうか」という分析と同様にして、(E,A) の ほうがもっともらしいことがわかる. なぜなら, もしプレーヤー 1 が E を選んで, x においてプレーヤー 2がAかFを選ぶ機会を与えられるとすると、プレーヤー2はAを選ぶのが合理的だからである.

これは展開形特有の問題である.プレーヤー 1 が実際に E を選んだとき,プレーヤー 2 の最適反応は Fではない. したがって, F は空脅し (empty threat) と言われる.

(N, F) のようなナッシュ均衡を排除するために、展開形ゲームのための新たな均衡概念が必要になる. この方針を一般化すると、どのようなノードに到達したとしても各プレーヤーはそこから先で最適反応を選 ぶべきということが言えそうである. お互いに最適反応を選んでいるというのはナッシュ均衡にほかならな いので, 部分ゲーム完全均衡という, ナッシュ均衡よりも強い均衡概念が得られる.

部分ゲームとは大雑把に言えば、あるノードから先の、小さい展開形ゲームのことである、ここでは、厳 密には定義しないが、完全情報でないゲーム、すなわち情報分割によって2つ以上のノードを含む情報集合 が存在するようなゲームでは、部分ゲームの定義には注意が必要であることを例で示そう.

 E_1 と E_2 の 2 つの参入行動がある例 7.7.3 のゲームをふたたび考えよう. プレーヤー 2 は 2 つのノード x_1, x_2 を区別できないとし、そのような情報集合を表す点線を補って修正したゲームツリーを下に再掲す る. このとき, x_1 と x_2 から先の小さい展開形ゲームは部分ゲームではない. プレーヤー 2 が x_1 と x_2 を 区別できないので、自分がどちらの状況に置かれているかが分からないからである.

他方,もしこれらが区別できるならば, x_1 と x_2 から先はそれぞれ別個の部分ゲームを構成する.

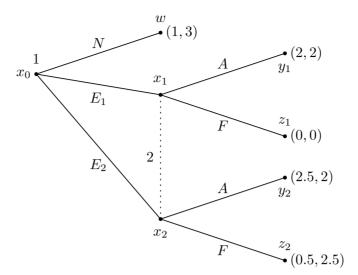


図 7.14 2 つのノードをもつ情報集合が存在するケース

このことは以下のように定式化できる:

7.8.2 定義 X の部分ゲーム (subgame) とは,あるノード $x \in X \setminus T$ の後に続くすべてのノードより成る 展開形ゲームであって,次の条件を満たすものである:もし y がその展開形ゲームに属するノードだとして, $z \in X, y \sim z$ ならば,z も同じ展開形ゲームのノードである.つまり,y が x によって達成可能で, $z \sim y$ ならば,z も x によって達成可能である.部分ゲームの利得や行動はもとの展開形ゲームをその部分 ゲーム(のノード)に制限したものである.

すなわち、部分ゲームはいずれのプレーヤーの情報集合も分断しない. 行動戦略は情報集合上に定義されるので、元の全体ゲームの行動戦略は部分ゲームに制限することが出来る. それゆえ、以下の定義にある「その制約がナッシュ均衡であるような戦略プロファイル」が意味をもつ.

7.8.3 定義 展開形ゲームの部分ゲーム完全均衡 (subgame-perfect equilibrium) とは、任意の部分ゲームに対し、その制限がナッシュ均衡であるような戦略プロファイルのことをいう.

7.8.4 注意 部分ゲームが全体ゲームのみであると、部分ゲーム完全均衡はナッシュ均衡に一致し、均衡の精緻化とはならない。不完全情報のゲームの多くでは、全体ゲームが唯一の全体ゲームなので、これは部分ゲーム完全均衡の欠点のひとつである。

7.8.5 例 例 7.7.6 のゲーム(の完全情報版,すなわち前掲のゲームツリーで点線のみ削除したもの)を考えよう. このゲームの純粋戦略ナッシュ均衡は 4 つで,そのうち部分ゲーム完全均衡はただ 1 つである.

一般に、部分ゲーム完全均衡は後ろ向き帰納法(バックワードインダクション、backward induction)によって求められる。最後の部分ゲームの初期ノードではプレーヤー 2 は T を選ぶ。これを前提すると、その直前の部分ゲームの初期ノードでは、プレーヤー 1 はもし C をとると次に 2 は T をとることがわかっているので、1 は T を選ぶ。その前の部分ゲームの初期ノードでも、もし 2 が C をとると 1 は T をとることがわかっているので、2 は T をとる。そして全体ゲームの初期ノードでも同様にして 1 は T をとることになる。そうして部分ゲーム完全均衡はすべての手番で T をとることになる。その結果、唯一の部分ゲーム完全均衡のプレイでは、最初の手番でプレーヤー 1 が T をとって終了する。

このゲームでは、ナッシュ均衡は以下の正規形表現より 8 つあることが確認できるが、どのナッシュ均衡でも最初の手番で T をとられて終わることが容易に示される。つまり、もともとのナッシュ均衡が変なものばかりだと、部分ゲーム完全均衡の概念によって精緻化をしてもあまり意味がないことになる。

	(T,T)	(T,C)	(C,T)	(C,C)
(T,T)	4,0	4,0	4,0	4,0
(T,C)	4,0	4,0	4,0	4,0
(C,T)	2,4	2,4	6, 2	6, 2
(C,C)	2,4	2,4	4,6	5, 5

表 7.14 正規形表現

練習問題 7.8.1 例 7.7.3 の展開形ゲームを考えよう. ゲームツリーは以下に再掲する.

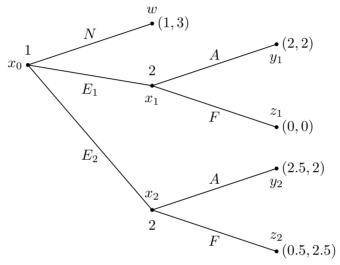


図 7.15 参入ゲーム

- 1. この展開形ゲームの正規形表現を書け.
- 2. (1) で得た正規形ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡をすべて求めよ.
- 3. この展開形ゲームの純粋戦略部分ゲーム完全均衡をすべて求めよ.

練習問題 7.8.2 例 7.7.3 の情報が不完全な展開形ゲームを考えよう. ゲームツリーは以下に再掲する.

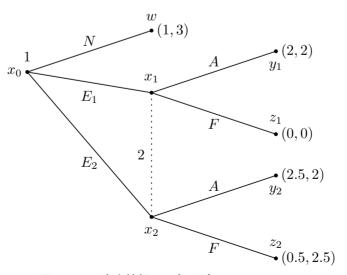


図 7.16 不完全情報での参入ゲーム

1. この展開形ゲームの正規形表現を書け.

- 2. (1) で得た正規形ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡と混合戦略ナッシュ均衡をすべて求めよ.
- 3. この展開形ゲームの純粋戦略部分ゲーム完全均衡と行動戦略 (behavioral strategy) 部分ゲーム完全 均衡をすべて求めよ.

練習問題 7.8.3 以下のような、「自然」の手番が最初にある 2 人展開形ゲームを考えよう.

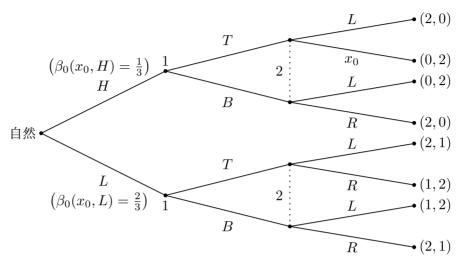


図 7.17 自然の手番がある展開形ゲーム

- 1. この展開形ゲームの純粋戦略部分ゲーム完全均衡と行動戦略部分ゲーム完全均衡をすべて求めよ.
- 2. この展開形ゲームを表現する正規形ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡と混合戦略ナッシュ均衡をすべて求めよ.

練習問題 7.8.4 正規形ゲーム $\Gamma_N=(\{1,\ldots,I\},(S_i)_{i=1,\ldots,I},(u_i)_{i=1,\ldots,I})$ を N 回プレーする展開形ゲーム Γ_E を考えよう. ただし,どのプレーヤーも Γ_N の純粋戦略のみを採ることができるとし,任意の $n\leq N$ に 対し,n 回目に各プレーヤーが同時に行動(Γ_N の純粋戦略)を決めるとき,(n-1) 回目までのすべてのプレーヤーが採った行動を知っているものとする. Γ_E における各プレーヤーの利得は,各回に Γ_N から得られたの利得の合計とする.

もし Γ_N がただひとつの純粋戦略ナッシュ均衡 s を持つなら、常に s をプレーする(つまり、各プレーヤー i は、過去に選択された行動によらずに s_i を採る)戦略が、 Γ_E の唯一の純粋戦略部分ゲーム完全均衡であることを証明せよ.

7.9 ベイジアンゲーム

標準形ゲームを非対称情報がある不確実性下のゲームに一般化することを考えよう.

ここで付け加える新しい要素は,タイプ空間 (T_1,\ldots,T_I) と,確率評価 (P_1,\ldots,P_I) である. T_i は,プレーヤーi だけが入手できる情報の内容の集合であり, P_i は,不確実な環境と,他のプレーヤーの情報に関するプレーヤーi の確率的評価である.

不確実性を表す状態空間は,直積集合 $T=T_1\times T_2\times \cdots \times T_I$ であり,プレーヤー i は T_i の実現値だけを知ると仮定する.

このようなゲームの具体例は、オークションで品物を競り落とそうとしているとき相手の評価する価値額 はいくらであるか、あるいは原油を採掘しようとしているときにその原油の埋蔵量はどれくらいであるか、 といった問題である. 7.9 ベイジアンゲーム **217**

7.9.1 例 I=47 とする。各県庁所在地にプレーヤーがいて,湿度が私的情報である。すなわち,各プレーヤーは自分が計測した湿度は観測して知っているが,他都道府県の湿度は知らないとする。各都道府県の湿度を列挙したものの集合 T で表される不確実性の全容のうち,各プレーヤーは自分の県 i の T_i に関する部分のみ知っている。

7.9.2 注意 不確実性が直積で書けるというのは、一見、特殊なケースを扱っているようであるが、実はそれほど特殊ではない。

T に関する情報が与えられるというのは,数学的には,T 上の分割(partition)を与えるということである.このとき, T_i とは 1 つの分割 \mathcal{P}_i を与えることにほかならない.より一般に, T,T_1,\ldots,T_I という (1+I) 個の集合が与えられ,各 i について関数 $h_i:T\to T_i$ が与えられ, $t\in T$ が起きたときに i は(t そのものは観察できないが) $h_i(t)\in T_i$ は観察できる(シグナルだけを観察できる)とする定式化は,先の直積による定式化と実質的に同値である.ただし, $T_1\times\cdots\times T_I$ のいくつかの元は決して実現されないこともある.たとえば, $h_1=h_2=\cdots=h_I$ ならば,生起しうる $(t_1,\ldots,t_I)\in T_1\times\cdots\times T_I$ は $t_1=\cdots=t_I$ を満たすものに限られる.

各プレーヤーは観察した情報にもとづいて自らの行動を決める。つまり、行動の集合 S_i の要素を、 T_i の要素である観察した情報に応じて選ぶ。たとえば、自分の絵画に対する評価額はこれくらいなので、こういう入札をする、というようにである。これは T_i から S_i への写像として定められる。これらの写像の集合を G_i で表す。これがプレーヤーi の戦略集合である。正規形ゲームのときと同じように、それらの直積を $G=G_1\times\cdots\times G_I$ と書き、また G_{-i} で i 以外の直積を表す。

利得関数 $U_i: G \to \mathbf{R}$ を以下のように定義しよう。ベイジアンゲームでは、自分のもつ情報に従って利得の期待値を最大化するような合理的な主体を考える。

- (1) 各プレーヤーi は、 $t_i \in T_i$ という私的情報を得たとき、他のプレーヤーの観察 t_{-i} の主観的確率分布 $(T_{-i}$ 上の確率分布)が存在して、 $P_i(\cdot,t_i)$ と書く、他の人が得た情報 t_{-i} は知らないので、自分の t_i を見たあとに他のプレーヤーの情報を推察するわけである。このとき自分が受けとったシグナルに応じて他の人の t_j に関する分布は変わることがある。たとえば、ここの原油の採掘でこれだけの埋蔵量があるだろうという自分の情報が高くなったときには、他の人の予想も高くなっただろうと予想するような定式化を許す。
- (2) 各プレーヤー i に対し、ある効用関数 $u_i: S \times T \to \mathbf{R}$ が存在するとする. これは他のプレーヤーの タイプにも依存してもかまわない. そこで、

$$U_i: S_i \times G_{-i} \times T_i \to \mathbf{R}$$

を次のように定義する:

$$U_i(s_i, g_{-i}, t_i) = \int_{T_{-i}} u_i(s_i, g_{-i}(t_{-i}), (t_i, t_{-i})) dP_i(t_{-i}, t_i),$$

ただし.

$$g_{-i}(t_{-i}) = (g_j(t_j))_{j \neq i} \in S_{-i}$$

である.プレーヤー i は t_{-i} は知らないので,この計算では, t_i で条件づけた主観的確率 $P(\cdot,t_i)$ に基づいて期待効用を計算する.これは, t_i を観察して行動 s_i をとり,なおかつ他のプレーヤーが戦略 g_{-i} を使うと予想しているときのプレーヤー i の期待効用である.

以上で与えた要素の組として, ベイジアンゲームを,

$$\Gamma_B = (\{1, \dots, I\}, (S_i)_{i=1,\dots,I}, (T_i)_{i=1,\dots,I}, (u_i)_{i=1,\dots,I}, (P_i)_{i=1,\dots,I})$$

と定義する.

7.10 ベイズ・ナッシュ均衡

7.10.1 定義 (最適戦略) タイプ $t_i \in T_i$ において, $s_i \in S_i$ が $g_{-i} \in G_{-i}$ に対する最適反応 (best response) であるとは、すべての $r_i \in S_i$ に対して、

$$U_i(s_i, g_{-i}, t_i) \ge U_i(r_i, g_{-i}, t_i)$$

となることをいう.

タイプが異なれば最適反応も変わることに注意しよう.最適反応の集合を $R_i(g_{-i},t_i)$ と書く.

7.10.2 定義 (ベイズ・ナッシュ均衡) 戦略プロファイル $g \in G$ がベイズ・ナッシュ均衡 (Bayesian Nash equilibrium) であるとは、任意の i と任意の $t_i \in T_i$ に対し、

$$g_i(t_i) \in R_i(g_{-i}, t_i)$$

が成立することをいう.

ベイズ・ナッシュ均衡の定義では、 t_i は各プレーヤーが持ち得る情報やタイプと考えた。しかし、数学的には、 t_i を人の名前と考える、すなわち各プレーヤーの各タイプを1人のプレーヤーと考えることが可能である。つまり、

$$\bigcup_{i=1}^{I} (\{i\} \times T_i)$$

をプレーヤーの集合とし,同じiに対応する「プレーヤー」は同じ u_i や S_i をもつとする。 (i,t_i) の効用関数は $U_i(\cdot,t_i)$ で与えられる。ただしその定義では, g_{-i} は $\bigcup_{j\neq i}(\{j\}\times T_j)$ に属するプレーヤーがとる行動のプロファイルなので, U_i はiの他のタイプがとる戦略には依存しない。この正規形ゲームを,もとのベイジアンゲームの**タイプ標準形** (type-normal form) という。そうするとここでのベイズ・ナッシュ均衡はタイプ標準形のナッシュ均衡に他ならない。

タイプ標準形ゲームは以下の3つの要素より構成されることがわかる。第一にプレーヤー $\mathcal{I} = \bigcup_{i=1}^{I} (\{i\} \times T_i)$ である。第二の要素は各プレーヤー $(i,t_i) \in \mathcal{I}$ の戦略集合 $S_{(i,t_i)}$ であるが,これは S_i に一致する。このプレーヤーの戦略は T_i から S_i への写像であり,この集合を G_i ,この G_i の直積を $G = G_1 \times \cdots \times G_I$ と書く。最後の要素は利得関数 $U_{(i,t_i)}$ であり,これは $U_{(i,t_i)}(g) = \int_{T_{-i}} u_i(g_i(t_i),g_{-i}(t_{-i}),t_i,t_{-i})dP_i(t_{-i},t_i)$ である。

このようにベイジアンゲームはタイプ標準形ゲームに書き変えられる。このタイプ標準形ゲームのナッシュ均衡は元のベイジアンゲームのベイズ・ナッシュ均衡である。タイプ標準形ゲームのナッシュ均衡は、 $S_{(i,t_i)}$ が非空、凸、コンパクトかつ $U_{(i,t_i)}$ が連続で g_i に関して準凹であれば、ナッシュ均衡の存在と同様に、不動点定理より存在が保障される。

7.10.1 共通事前確率

文献ではこれと異なる定式化をしていることがあるので、それについて断っておく。ここでは t_i に対して、 T_{-i} 上の確率分布 $P_i(\cdot,t_i)$ をひとつ決めるのだが、自分の観察する t_i に、自分の観察できない値についての確率分布をあてがうというこの操作は、 t_i で与えられる T_{-i} 上の条件付確率を与えるときにも行われる。これまでの定式化では t_i にはプレーヤー i 自身は周辺分布をもっていない。ただ、 T_i 上に(周辺)分

布をひとつ与えると、T 上の確率分布 \hat{P}_i が決まり、任意の $t_i \in T_i$ について、 $P_i(\cdot,t_i)$ は t_i が与えられたときの \hat{P}_i の条件付分布に一致すると考えることができる、つまり

$$P_i(\cdot, t_i) = \hat{P}_i(\cdot|t_i)$$

が成立する. \hat{P}_i の T_i 上の周辺分布を \hat{P}_{i,T_i} で表し, $\hat{U}_i:G \to \mathbf{R}$ を次のように定義する

$$\hat{U}_i(g) = \hat{U}_i(g_i, g_{-i}) = \int_{T_i} U_i(g_i(t_i), g_{-i}, t_i) \, d\hat{P}_{i, T_i}(t_i).$$

 U_i は t_i に依存するので, \hat{U}_i を期待効用とは解釈できない. \hat{U}_i から導出される最適反応を \hat{R}_i で表す.

7.10.3 命題 任意の $t_i \in T_i$ に対し, $\hat{P}_{i,T_i}(t_i) > 0$ ならば,g がベイズ・ナッシュ均衡であることは,すべてのプレーヤーi について $g_i \in \hat{R}_i(g_{-i})$ が成立することと同値である.

ここで 2 段階にわたって定式化をしてみせたのは、各プレーヤーは t_i に関する確率評価を実際には抱いていないとしても、形式的にはこの後者のようにも書けることを示すためである。

 $\hat{P}_1,\dots,\hat{P}_I$ はそれぞれすべて T 上の確率分布である。共通事前確率の仮定 (common prior assumption) は, $\hat{P}_1=\dots=\hat{P}_I$ ($=\hat{P}$) を要請するが,これは各 i が使う P_i は,あるひとつの共通の確率 \hat{P} を条件づけ たものにほかならないことを要請する.その共通の \hat{P} は,誰もまだ私的情報を受けとっていない段階での 共通事前分布である.そして私的情報 t_i を知ったプレーヤー i は,その t_i を使って \hat{P} をアップデートして 自分のもつ確率評価 P_i を得る.

これは、事前の確率的評価は完全に一致しているが、各人が受けとった情報によって、実際に使う確率的評価が異なることを意味する。換言すれば、最適戦略を決めるにあたり、各人が違う確率評価で期待効用を計算しているなら、それは違う情報を受けとったからに他ならないという仮定(仮説)である。共通事前確率の仮定はひとつの確率分布を考えれば十分であるということは、分析の上でも便宜ももたらす。

また、共通事前確率の下では、ベイジアンゲームを、自然が最初のノードで行動する展開形ゲームとして も定式化できる。

練習問題 7.10.1 ベイジアンゲーム $\Gamma_B=(\{1,2,\ldots,I\},(S_i)_{i=1,2,\ldots,I},(u_i)_{i=1,2,\ldots,I},(T_i)_{i=1,2,\ldots,I},(P_i)_{i=1,2,\ldots,I})$ を考える. 任意の i にたいして $T_i=\{0,1\}$ と仮定する. 共通事前分布の仮定を置き,タイプのプロファイル $t=(t_1,t_2,\ldots,t_I)$ が生起する確率を $\hat{P}(t)$ と書くことにする. このとき,以下の分布を求めよ.

- 1. プレーヤー 1 のタイプが 1 であったときに抱く、プレーヤー 2 のタイプの分布.
- 2. プレーヤー 1 のタイプが 1 であったときに抱く,プレーヤー 2 が抱くプレーヤー 3 のタイプの分布 の分布
- 3. プレーヤー 1 のタイプが 1 であったときに抱く,プレーヤー 2 が抱くプレーヤー 1 のタイプの分布 の分布.

練習問題 7.10.2 ランダムな限界費用を持つ 2 企業間のクールノー競争を考えよう. 逆需要関数は $D^{-1}(q)=2-q$ で与えられるとする. 限界費用の水準は以下のように決められる. まず, Z を, パラメーター (α,β) のベータ分布に従う確率変数とする. つまり, Z は確率 1 で (0,1) 区間内に値をとり, その区間上での密度関数は

$$z \mapsto \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1}$$

であるとする(ここで Γ はガンマ関数を表す).次に,各 i 企業の限界費用は一定であり,その水準 C_i は確率 Z で 1 をとり,確率 1-Z で 0 をとる確率変数とする.Z で条件づけられたとき, C_1 と C_2 は互いに独立であるとする.企業 i は C_i の実現値は知るが, C_{3-i} と Z の実現値は知らないと仮定する.

- 1. この状況を,各企業のタイプは限界費用の水準であるベイジアンゲーム $\Gamma_B=(\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2),(T_1,T_2),(P_1,P_2))$ として定式化せよ.
- 2. (1) で導出したベイジアンゲームのベイジアンナッシュ均衡を求めよ.

7.11 ベイズ・ナッシュ均衡の応用例

ベイジアンゲームの重要な応用例として、本節ではオークションの問題を考える.

7.11.1 ファーストプライス・オークション

一番高い値段をつけた入札者が競り落とし、その入札したとおりの値段を支払うようなオークションを、ファーストプライス・オークション (first-price auction) という.

入札者 (bidder) がこのゲームのプレーヤーで、その集合を $\{1,\ldots,I\}$ とする.

ここでは全員が同時にビッド (支払ってもよい金額) を提示する。各プレーヤーの行動集合はビッドの集合で、 $S_i = \mathbf{R}_+$ とする。

タイプは、各人が心に抱く評価額であり、 $T_i = \mathbf{R}_+$ とする.

効用関数は評価額から落札額を差し引いたものに等しい:

$$u_i(s,t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{J}(t_i - s_i) & \left(\begin{array}{l} s_i = \max\{s_1, \ldots, s_I\} \text{ のとき.} \\ \text{ただしここで } J = |\{j|s_j = \max\{s_1, \ldots, s_I\}| \end{array} \right) \\ 0 & \left(s_i < \max\{s_1, \ldots, s_I\} \text{ のとき} \right) \end{array} \right.$$

この効用関数は線形なので、リスク中立性が仮定されている.

確率評価 P_i は, t_i には依存しないとする.つまり,自分の評価と他人の評価は独立であるとする.さらに, $(t_j)_{j\neq i}$ は独立同分布 (i.i.d.) であるとする.これは私的価値 (private value) のケースである.骨董品の値打ちのような例では,私的価値と考えられるが,冒頭に述べた原油の埋蔵量の市場価値の問題だと,私的価値とは考えづらい.この仮定により,同一分布の分布関数を $F: \mathbf{R}_+ \to [0,1]$ とすると,任意の i と任意の $t_i \in \mathbf{R}_+$, $\bar{t}_{-i} \in \mathbf{R}_+^{I-1}$ に対し, \mathbf{R}_+^{I-1} 上の確率分布 $P_i(t_i,\cdot)$ が事象 $\{t_{-i} \leq \bar{t}_{-i}\} = \{(t_j)_{j\neq i} \mid$ すべての $j \neq i$ について $t_j \leq \bar{t}_j\}$ に付与する確率は, $\prod_{j\neq i} F(\bar{t}_j)$ に等しい.

各プレーヤーの戦略 g_i は、 g_i : \mathbf{R}_+ からそれ自身への関数である.

F は微分可能と仮定し、以下のような条件を満たすべイズ・ナッシュ均衡の特徴を探ろう.

- 1. $g_1 = \cdots = g_I$, すなわち対称均衡.
- 2. 各iに対し、 g_i は狭義単調増加かつFのサポート上で微分可能.

条件から、任意の i と任意の t_i に対して、 $g_i(t_i)$ からどんな別の行動 $s_i \in S_i$ に変えても期待効用は上がらない。ここではある \hat{t}_i に対し $g_i(\hat{t}_i)$ と一致する行動だけを考える。つまり、ほかのタイプであったならば提示するであろうようなビッドの額を考える。それは、 t_i が別のタイプ \hat{t}_i のふりをしても効用が上がらないということを考えるということである。

プレーヤーi がそうして落札できるのは、すべての $j \neq i$ について、 $g_j(t_j) \leq g_i(\hat{t}_i)$ のときである。g は 単調増加と仮定したので、それは $t_i \leq \hat{t}_i$ と同値である。これが起こる確率は、 $(F(\hat{t}_i))^{I-1}$ である。

実際に落札できたとすると、落札時に得られる効用は、 $t_i - g_i(t)$ に等しい. よって、

$$U_i(g_i(\hat{t}_i), g_{-i}, t_i) = (F(\hat{t}_i))^{I-1}(t_i - g_i(\hat{t}_i))$$

が成立する. g_i は均衡戦略 (最適反応) なので, $\hat{t}_i = t_i$ でこの値は最大化される.

 $\hat{t}_i = t_i$ が解であるための 1 階の必要条件は、任意の i に対し、

$$(I-1)(F(t_i))^{I-2}F'(t_i)t_i = (I-1)(F(t_i))^{I-2}F'(t_i)g_i(t_i) + (F(t_i))^{I-1}g_i'(t_i)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_i}((F(t_i))^{I-1}g_i(t_i))$$

が成立することである.

両辺を積分すると、任意の $t_i \in T_i$ に対し、

$$g_i(t_i) = \frac{\int_0^{t_i} (I-1)(F(w))^{I-2} F'(w) w \, \mathrm{d}w + (F(0))^{I-1} g_i(0)}{(F_i(t_i))^{I-1}}$$

が導かれる. F が $[\underline{t},\overline{t}]$ 上の一様分布 $(0 \leq \underline{t} < \overline{t} < \infty)$ に従うならば, $w \in [\underline{t},\overline{t}]$ に対して, $F(w) = \frac{1}{\overline{t}-\underline{t}}(w-\underline{t})$ なので

$$g_i(t_i) = \left(1 - \frac{1}{I}\right)t_i + \frac{1}{I}\underline{t}$$

が成立する.よってビッドは本当の評価額 t_i とありうる評価額の下限 \underline{t} との加重平均であり,本当の評価額より少し下のほうでビッドを述べるのが均衡戦略である.そして,I が大きい,すなわち競売に参加している人が多ければ多いほど,正直な申告に近く $I \to \infty$ のとき $g_i(t_i)$ は t_i に収束する.

一様分布では,2 階の必要条件が成立している.他に 1 階の必要条件をみたす \hat{t}_i は存在しない.実際, $\hat{t}_i = \underline{t}$ または \bar{t} は最大値を達成しない(つまり,この問題の解は端点解でない)ことは容易にわかる.よって上の g_i が実際に最大値を達成する.ゆえに全員がこういう g_i を提示するのはひとつのベイズ・ナッシュ均衡である.

この項を終えるにあたって、視点を変えて、オークションから得られる売り手の期待収益を考えてみよう。 プレーヤーが皆この g_i にしたがってビッドをするとき、このうちで一番高いものが落札価格になる。 $\max\{t_1,\ldots,t_I\}=t_{(I)}$ と書く(順序統計量)。 実現する収益は、

$$\left(1 - \frac{1}{I}\right)t_{(I)} + \frac{1}{I}\,\underline{t}$$

である.順序統計量 $t_{(I)}$ の従う分布を H^I と書く.期待収益は,上記の収益の H^I に関する期待値,

$$\int_{t}^{\overline{t}} \left(\left(1 - \frac{1}{I} \right) w + \frac{1}{I} \underline{t} \right) dH^{I}(w) = \frac{I - 1}{I + 1} \overline{t} + \frac{2}{I + 1} \underline{t}$$

である.これは \bar{t} と \underline{t} との加重平均になっており,I が大きくなると \bar{t} にかかるウェイトが大きくなり全体は \bar{t} に近づくことがわかる.

7.11.2 セカンドプライス・オークション

セカンドプライス・オークションのルールでは、一番高いビッドを出した人が落札できるという点でファーストプライス・オークションと同じだが、落札したプレーヤーが実際に支払う価格は、自分の入札した額ではなくて、2番目に高い人の入札した価格とする.

この想定は一見奇妙なようだが、イングリッシュ・オークション(価格をつりあげていく通常のオークション)は実際にはこれと同じようなことをやっている。イングリッシュ・オークションでは、落札価格は最後に残ったライバルがドロップアウトするところの額で決まる。つまり、落札価格は勝者の評価額まで上がりきったところではなくて、2番目に高い人の評価で決まっているのである。

これは経済学的に非常に理にかなっている.ここでは「あなたが落札することで経済にどんな損失が生じますか」という問いに対する答えは、「あなた」の評価額ではなくて、他の人たちのなかでの一番高い評価額である.2番目に高い人の評価額を落札者に支払わせるということになっている.

7.11.1 命題 任意のプレーヤー i にとって,任意の $t_i \in T_i$ について $g_i(t_i) = t_i$ なる「正直申告」は他のいかなる戦略をも弱支配する.よって全員が正直申告戦略を選ぶのはセカンドプライス・オークションにおけるベイズ・ナッシュ均衡である.

命題 7.11.1 の略証 任意のプレーヤー i の任意のタイプ $t_i \in T_i$ を考える. t_i とは異なってもよい任意の $s_i \in S_i$ をビッドするとする. ほかの人がどんな戦略をとっていようが,正直申告が最善であるということ, すなわち,他のプレーヤーの任意の戦略の組 $q_{-i} \in G_{-i}$ に対して,

$$U_i(t_i, g_{-i}, t_i) \ge U_i(s_i, g_{-i}, t_i)$$

となることを示せばよい.このことは、正直入札によって落札できるときにはそれ以上ビッドを上げるインセンティブがなく、またセカンドプライスだからビッドを下げたところで支払う金額は変わらないので下げるインセンティブもないことと、正直入札によって落札できないときには無理に入札をつりあげても高い価格を支払わされ損をするということでわかる. ///

最後に、セカンドプライス・オークションで売り手が得る期待収益を考えよう。 H^{I-1} で、2番目に高いビッドの従う分布関数を表すことにする。複数の入札者の評価額が一致するという確率 0 の事象を除けば、2番目に大きな評価額がx以下であるというのは、すべての評価額がx以下である場合と、ある 1 人の入札者の評価額はx より大きくて他の全ての入札者の評価額はx 以下である場合のどちらかであり、かつこれらの事象は排他的である。したがって、 $H^{I-1}(x)$ は任意の $x \in \mathbf{R}$ について、

$$\begin{split} H^{I-1}(x) &= \operatorname{Prob}(\max_i t_i \leq x) + \sum_{j=1}^I \operatorname{Prob}(t_j > x \text{ かつ任意の } i \neq j \text{ について } t_i \leq x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ x^I + I(1-x)x^{I-1} = Ix^{I-1} + (1-I)x^I & \text{if } x \in (0,1) \\ 1 & \text{if } x \geq 1 \end{cases} \end{split}$$

である.

したがって、正直申告のベイズ・ナッシュ均衡における売り手の期待収益は、

$$\int_{t}^{\overline{t}} w \, \mathrm{d}H^{I-1}(w)$$

である.

ファーストプライスとセカンドプライスを比べて、どちらのオークションのほうが期待収益が高いかは、一見してもわからない。まず、分布は、前者の H^I のほうが(順序統計量の定義から当然)高いほうに寄っている。ところがファーストプライス・オークションでは申告がやや \underline{t} のほうに引っぱられているため、被積分関数は後者のほうが高い。実はこれらは互いに等しいことが確認できる。これは収入同値定理 (revenue equivalence theorem) が成立する一例である。

参考文献

- [1] Kreps, David M. (1990). A Course in Microeconomic Theory, Princeton University Press.
- [2] Kreps, David M. (2012). *Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets*, Princeton University Press.
- [3] Dasgupta, P., and Maskin, E. (1986). "The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, I: Theory," *The Review of Economic Studies*, **53**(1), 1-26.
- [4] Gale, D., and Mas-Colell, A. (1979). "Corrections to an equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences," *Journal of Mathematical Economics*, **2**(1), 9-15.
- [5] Hart, S., and Schmeidler, D. (1989). "Existence of Correlated Equilibria," *Mathematics of Operations Research*, **14**(1), 18-25.
- [6] Myerson, Roger B.(1991). GAME THEORY: Analysis of Conflict, Harvard University Press.